7 Espacio métrico

1. Distancia entre puntos y rectas en el espacio

Piensa y calcula

Dados los puntos A(3, –4, 1) y B(5, 1, 4), halla las coordenadas del vector: $\overrightarrow{AB}$

Solución:

$\overrightarrow{AB}(2, 5, 3)$

Aplica la teoría

1. Calcula la distancia que hay entre los puntos:

A(1, –2, 3) y B(4, 5, –7)

Solución:

$d(A, B) = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}$

$\overrightarrow{AB}(3, 7, -10)$

$d(A, B) = \sqrt{3^2 + 7^2 + (-10)^2} = 12,57$ unidades.

2. Halla la distancia entre el origen de coordenadas y la recta intersección de los planos de ecuaciones respectivas:

$$x + y + 2z = 4$$
$$2x - y + z = 2$$

Solución:

$d(P, r) = \dfrac{|\overrightarrow{AP} \times \vec{v}|}{|\vec{v}|}$

P(0, 0, 0)

A(0, 0, 2) $\in$ r

$\overrightarrow{AP}(0, 0, 2)$

Vector director de la recta **r**

$\vec{v}(3, 3, -3)$

$\overrightarrow{AP} \times \vec{v} = (-6, 6, 0)$

$|\overrightarrow{AP} \times \vec{v}| = 6\sqrt{2}$

$|\vec{v}| = 3\sqrt{3}$

$d(P, r) = \dfrac{6\sqrt{2}}{3\sqrt{3}} = \dfrac{2}{3}\sqrt{6} = 1,63$ unidades.

3. Calcula la distancia existente entre las rectas:

$$r \equiv \begin{cases} x = 2 \\ y = 1 + t \ ; \ t \in \mathbb{R} \\ z = -2 - t \end{cases} \qquad s \equiv \begin{cases} x + z = 4 \\ 2y + z = 5 \end{cases}$$

Solución:

$d(r, s) = \dfrac{|[\overrightarrow{AB}, \vec{u}, \vec{v}]|}{|\vec{u} \times \vec{v}|}$

A(2, 1, –2) $\in$ r

B(3, 2, 1) $\in$ s

$\overrightarrow{AB}(1, 1, 3)$

$\vec{u}(0, 1, -1), \vec{v}(-2, -1, 2)$

$$[\overrightarrow{AB}, \vec{u}, \vec{v}] = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & -1 \\ -2 & -1 & 2 \end{vmatrix} = 9 \neq 0$$

Las rectas **r** y **s** se cruzan.

$\vec{u} \times \vec{v}(1, 2, 2)$

$d(r, s) = \dfrac{|9|}{\sqrt{1^2 + 2^2 + 2^2}} = \dfrac{9}{\sqrt{9}} = 3$ unidades.

4. Calcula el plano mediador del segmento que tiene por extremos los puntos A(1, 4, 3) y B(5, 2, –1)

Solución:

El punto medio del segmento es M(3, 3, 1)

$\vec{n} = \overrightarrow{AB}(4, -2, -4) \parallel (2, -1, -2)$

El plano es:

$2(x - 3) - (y - 3) - 2(z - 1) = 0$

$2x - y - 2z = 1$

2. Distancia a un plano en el espacio

Piensa y calcula

Calcula mentalmente la distancia del punto P(0, 0, 5) al plano z = 0

Solución:
d(P, π) = 5 unidades.

Aplica la teoría

5. Calcula la distancia del origen de coordenadas al plano π determinado por los puntos:

A(1, –3, 1), B(2, 3, 1) y C(1, 3, –1)

Solución:

$$d(P, \pi) = \frac{|Ap_1 + Bp_2 + Cp_3 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$$

P(0, 0, 0)

Determinación del plano π

$A(1, -3, 1) \in \pi$

$\vec{u} = \overrightarrow{AB}(1, 6, 0)$

$\vec{v} = \overrightarrow{AC}(0, 6, -2) \parallel (0, 3, -1)$

$$\begin{vmatrix} x-1 & y+3 & z-1 \\ 1 & 6 & 0 \\ 0 & 3 & -1 \end{vmatrix} = 0$$

6x – y – 3z – 6 = 0

$$d(P, \pi) = \frac{|6 \cdot 0 - 1 \cdot 0 - 3 \cdot 0 - 6|}{\sqrt{6^2 + (-1)^2 + (-3)^2}} = \frac{|-6|}{\sqrt{46}} =$$

= 0,88 unidades.

6. Halla la distancia entre la recta:

$$r \equiv \frac{x-1}{2} = y - 2 = \frac{z-1}{-1}$$

y el plano: π ≡ x – y + z + 2 = 0

Solución:

Se estudia en primer lugar la posición relativa entre la recta y el plano:

$\vec{v}(2, 1, -1)$

$\vec{n}(1, -1, 1)$

$\vec{v} \cdot \vec{n} = 2 - 1 - 1 = 0$

La recta y el plano son paralelos o la recta está en el plano.

$A(1, 2, 1) \in r$

Se comprueba si el punto A está en el plano π

$1 - 2 + 1 + 2 = 2 \neq 0$

Como el punto A no está en el plano π, la recta y el plano son paralelos.

Se calcula la distancia de un punto de la recta **r** al plano π

$$d(P, \pi) = \frac{|Ap_1 + Bp_2 + Cp_3 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$$

A(1, 2, 1)

$$d(A, \pi) = \frac{|1 \cdot 1 - 1 \cdot 2 + 1 \cdot 1 + 2|}{\sqrt{1^2 + (-1)^2 + 1^2}} = \frac{|2|}{\sqrt{3}} = 1,15 \text{ u}$$

7. Halla la distancia que hay entre los planos:

3x – 2y + z + 5 = 0
4x + 3y – z – 7 = 0

Solución:

Se estudia en primer lugar la posición relativa entre los dos planos:

$$\frac{3}{4} \neq \frac{-2}{3} \neq \frac{1}{-1}$$

Los dos planos se cortan.

Por tanto, la distancia entre ellos es cero:

d(π, π') = 0

8. Calcula el plano bisector de los planos:

2x – y + 2z + 3 = 0
6x + 2y – 3z – 5 = 0

Solución:

Sea P(x, y, z) un punto genérico del plano bisector:

d(P, π) = d(P, π')

$$\frac{|2x - y + 2z + 3|}{\sqrt{2^2 + (-1)^2 + 2^2}} = \frac{|6x + 2y - 3z - 5|}{\sqrt{6^2 + 2^2 + (-3)^2}}$$

$$\frac{|2x - y + 2z + 3|}{3} = \frac{|6x + 2y - 3z - 5|}{7}$$

7|2x – y + 2z + 3| = 3|6x + 2y – 3z – 5|

Del valor absoluto se obtienen dos soluciones:

7(2x – y + 2z + 3) = 3(6x + 2y – 3z – 5)
4x + 13y – 23z – 36 = 0
7(2x – y + 2z + 3) = –3(6x + 2y – 3z – 5)
32x – y + 5z + 6 = 0

3. Ángulos en el espacio

Piensa y calcula

Calcula mentalmente el ángulo que forma la recta $x = 0, y = 0$, con el plano $z = 0$

Solución:

El ángulo que forma la recta con el plano es de 90°

Aplica la teoría

9. Halla el ángulo que forman la recta **r,** que pasa por el punto A(1, –1, 0) y tal que su vector director es $\vec{u}(-2, 0, 1)$, y la recta **s,** de ecuación:

$$x - 7 = y + 6 = z$$

Solución:

$\cos \alpha = \dfrac{|\vec{u} \cdot \vec{v}|}{|\vec{u}| \cdot |\vec{v}|}$

Vector director de la primera recta: $\vec{u}(-2, 0, 1)$

Vector director de la segunda recta: $\vec{v}(1, 1, 1)$

$\vec{u} \cdot \vec{v} = -2 + 0 + 1 = -1$

$|\vec{u} \cdot \vec{v}| = |-1| = 1$

$|\vec{u}| = \sqrt{5}$

$|\vec{v}| = \sqrt{3}$

$|\vec{u}| \cdot |\vec{v}| = \sqrt{15}$

$\cos \alpha = \dfrac{1}{\sqrt{15}}$

$\alpha = 75° \; 2' \; 12''$

10. Halla el ángulo que forman los planos:

$$\pi \equiv 2x - y - 3z + 4 = 0$$
$$\pi' \equiv 4x + 2y - 5 = 0$$

Solución:

$\cos \alpha = \dfrac{|\vec{n} \cdot \vec{n}'|}{|\vec{n}| \cdot |\vec{n}'|}$

$\vec{n}(2, -1, -3)$

$\vec{n}'(4, 2, 0)$

$\vec{n} \cdot \vec{n}' = 8 - 2 + 0 = 6$

$|\vec{n} \cdot \vec{n}'| = 6$

$|\vec{n}| = \sqrt{14}$

$|\vec{n}'| = \sqrt{20}$

$|\vec{n}| \cdot |\vec{n}'| = \sqrt{280}$

$\cos \alpha = \dfrac{6}{\sqrt{280}}$

$\alpha = 68° \; 59' \; 16''$

11. Halla el ángulo que forma la recta:

$$r \equiv x - 1 = \frac{y - 2}{3} = \frac{z + 5}{2}$$

con el plano: $\pi \equiv 2x - 3y + z - 1 = 0$

Solución:

$\operatorname{sen} \alpha = \dfrac{|\vec{v} \cdot \vec{n}|}{|\vec{v}| \cdot |\vec{n}|}$

$\vec{v}(1, 3, 2)$

$\vec{n}(2, -3, 1)$

$\vec{v} \cdot \vec{n} = 2 - 9 + 2 = -5 \neq 0$

$|\vec{v} \cdot \vec{n}| = |-5| = 5$

$|\vec{v}| = \sqrt{14}$

$|\vec{n}| = \sqrt{14}$

$\operatorname{sen} \alpha = \dfrac{5}{\sqrt{14} \cdot \sqrt{14}} = \dfrac{5}{14}$

$\alpha = 20° \; 55' \; 29''$

12. Considera los planos:

$$\pi_1 \equiv 2x + 5 = 0$$
$$\pi_2 \equiv 3x + 3y - 4 = 0$$

¿Qué ángulo determinan ambos planos?

Solución:

$\cos \alpha = \dfrac{|\vec{n} \cdot \vec{n}'|}{|\vec{n}| \cdot |\vec{n}'|}$

$\vec{n}(2, 0, 0) \parallel (1, 0, 0)$

$\vec{n}'(3, 3, 0) \parallel (1, 1, 0)$

$\vec{n} \cdot \vec{n}' = 1 + 0 + 0 = 1$

$|\vec{n} \cdot \vec{n}'| = 1$

$|\vec{n}| = 1$

$|\vec{n}'| = \sqrt{2}$

$|\vec{n}| \cdot |\vec{n}'| = \sqrt{2}$

$\cos \alpha = \dfrac{1}{\sqrt{2}} = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$

$\alpha = 45°$

4. Perpendicularidad en el espacio

Piensa y calcula

Halla mentalmente un vector paralelo y otro perpendicular al vector $\vec{v}(3, 0, 4)$

Solución:

Un vector paralelo será cualquier vector que sea proporcional: $-\vec{v} = (-3, 0, -4)$ o bien $2\vec{v} = (6, 0, 8)$

Un vector que sea perpendicular es aquel que al multiplicarlo escalarmente dé cero. Como tiene una coordenada cero, cambiamos las otras dos coordenadas y una de ellas la cambiamos de signo: $\vec{n}(4, 0, -3)$

Aplica la teoría

13. Halla la ecuación de la recta que pasa por el punto P(2, –1, 1) y corta perpendicularmente a la recta:

$$r \equiv \frac{x-2}{2} = \frac{y-1}{2} = z$$

Solución:

En primer lugar hay que hallar el plano perpendicular a la recta **r** que pasa por el punto P(2, –1, 1)

Después se halla la intersección de la recta y del plano.

La recta pedida es la que pasa por P y P'

$\vec{n}(2, 2, 1)$

$2(x-2) + 2(y+1) + z - 1 = 0$

$2x + 2y + z = 3$

Se pasa la recta a forma paramétrica y se sustituyen los valores de x, y, z en la ecuación del plano.

$$r \equiv \begin{cases} x = 2 + 2t \\ y = 1 + 2t \\ z = t \end{cases}$$

$2(2 + 2t) + 2(1 + 2t) + t = 3$

$t = -\frac{1}{3}$

$P'\left(\frac{4}{3}, \frac{1}{3}, -\frac{1}{3}\right)$

$\vec{v} = \overrightarrow{PP'}\left(-\frac{2}{3}, \frac{4}{3}, -\frac{4}{3}\right) \parallel (1, -2, 2)$

$s \equiv x - 2 = \frac{y+1}{2} = \frac{z-1}{2}$

14. Halla la ecuación cartesiana del plano que contiene a la recta:

$$r \equiv \begin{cases} x = 1 + t \\ y = -1 + 2t;\ t \in \mathbb{R} \\ z = t \end{cases}$$

y es perpendicular al plano: $\pi \equiv 2x + y - z = 2$

Solución:

Un vector director del plano es el vector director de la recta **r:**

$$\vec{v}(1, 2, 1)$$

Otro vector director es el vector normal del plano perpendicular π:

$$\vec{u} = \vec{n}(2, 1, -1)$$

Un punto del plano es un punto de la recta **r:**

$$P(1, -1, 0)$$

Ecuación del plano:

$$\begin{vmatrix} x-1 & y+1 & z \\ 2 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

$$3x - 3y + 3z - 6 = 0$$

$$x - y + z = 2$$

15. Considera los planos:

$$\pi_1 \equiv 2x + 5 = 0$$

$$\pi_2 \equiv 3x + 3y - 4 = 0$$

Halla el plano que pasa por el origen de coordenadas y es perpendicular a los dos planos dados.

Solución:

Un vector perpendicular a los dos planos dados es el producto vectorial de sus vectores normales:

$$\vec{n} \times \vec{n}'(0, 0, 6) \parallel (0, 0, 1)$$

$$P(0, 0, 0)$$

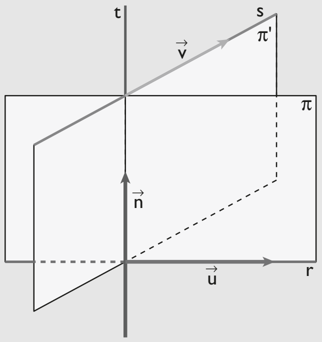
$$0(x-0) + 0(y-0) + 1(z-0) = 0$$

$$z = 0$$

16. Halla la ecuación de la recta que se apoya perpendicularmente en las rectas **r** y **s,** definidas respectivamente por

$$r \equiv x - 1 = y - 2 = \frac{z-1}{-2},\quad s \equiv \frac{x-4}{-1} = \frac{y+1}{3} = \frac{z}{2}$$

Solución:



a) Vector director de la recta **r:** $\vec{u}(1, 1, -2)$; punto $A(1, 2, 1)$

Vector director de la recta **s:** $\vec{v}(-1, 3, 2)$; punto $B(4, -1, 0)$

b) Se halla el vector perpendicular a $\vec{u}$ y $\vec{v}$:

$$\vec{n} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & 1 & -2 \\ -1 & 3 & 2 \end{vmatrix} = 8i + 4k \Rightarrow \vec{n}(8, 0, 4) \parallel (2, 0, 1)$$

c) El plano π, que contiene a la recta **r** y es perpendicular a **s:**

$$\pi \equiv \begin{vmatrix} x-1 & y-2 & z-1 \\ 1 & 1 & -2 \\ 2 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow$$

$\Rightarrow \pi \equiv x - 5y - 2z + 11 = 0$

El plano π', que contiene a la recta **s** y es perpendicular a **r:**

$$\pi' \equiv \begin{vmatrix} x-4 & y+1 & z \\ -1 & 3 & 2 \\ 2 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow$$

$\Rightarrow \pi' \equiv 3x + 5y - 6z - 7 = 0$

La recta es:

$$t \equiv \begin{cases} x - 5y - 2z + 11 = 0 \\ 3x + 5y - 6z - 7 = 0 \end{cases}$$

5. Simetría en el espacio

Piensa y calcula

Calcula mentalmente el punto simétrico del punto $P(1, 2, 3)$ respecto del origen $O(0, 0, 0)$

Solución:

$P'(-1, -2, -3)$

Aplica la teoría

17. Calcula el punto simétrico del punto $P(1, -2, 4)$ respecto del punto $A(2, -3, 1)$

Solución:

Sea $P'(x, y, z)$. Se tiene que verificar:

$\dfrac{1 + x}{2} = 2 \Rightarrow 1 + x = 4 \Rightarrow x = 3$

$\dfrac{-2 + y}{2} = -3 \Rightarrow -2 + y = -6 \Rightarrow y = -4$

$\dfrac{4 + z}{2} = 1 \Rightarrow 4 + z = 2 \Rightarrow z = -2$

$P'(3, -4, -2)$

18. Calcula las coordenadas del punto simétrico del punto $P(1, -3, 7)$ respecto de la recta dada por la ecuación:

$$r \equiv x - 1 = y + 3 = \frac{z - 4}{2}$$

Solución:

a) El vector director de la recta **r** es $\vec{v}(1, 1, 2)$, que es el vector normal al plano π perpendicular, $\vec{n}(1, 1, 2)$

$x - 1 + y + 3 + 2(z - 7) = 0$

$x + y + 2z - 12 = 0$

b) Se pasa la recta a forma paramétrica:

$$r \equiv \begin{cases} x = 1 + t \\ y = -3 + t \, ; \; t \in \mathbb{R} \\ z = 4 + 2t \end{cases}$$

Se sustituyen las variables en la ecuación del plano:

$1 + t - 3 + t + 2(4 + 2t) - 12 = 0$

$t = 1 \Rightarrow M(2, -2, 6)$

c) Sea P'(x, y, z). Se tiene que verificar:

$\frac{1 + x}{2} = 2 \Rightarrow 1 + x = 4 \Rightarrow x = 3$

$\frac{-3 + y}{2} = -2 \Rightarrow -3 + y = -4 \Rightarrow y = -1$

$\frac{7 + z}{2} = 6 \Rightarrow 7 + z = 12 \Rightarrow z = 5$

$P'(3, -1, 5)$

19. Halla las coordenadas del simétrico del punto P(1, 2, –2) respecto al plano de ecuación:

$$x - 2y + z - 7 = 0$$

Solución:

a) El vector normal del plano π, $\vec{n}(1, -2, 1)$, que es el vector director $\vec{v}(1, -2, 1)$ de la recta perpendicular **r**

$$r \equiv \begin{cases} x = 1 + t \\ y = 2 - 2t \; ; \; t \in \mathbb{R} \\ z = -2 + t \end{cases}$$

Se sustituyen las variables en la ecuación del plano:

$1 + t - 2(2 - 2t) - 2 + t - 7 = 0$

$t = 2 \Rightarrow M(3, -2, 0)$

b) Sea P'(x, y, z); se tiene que verificar:

$\frac{1 + x}{2} = 3 \Rightarrow 1 + x = 6 \Rightarrow x = 5$

$\frac{2 + y}{2} = -2 \Rightarrow 2 + y = -4 \Rightarrow y = -6$

$\frac{-2 + z}{2} = 0 \Rightarrow -2 + z = 0 \Rightarrow z = 2$

$P'(5, -6, 2)$

20. Halla las coordenadas del punto simétrico de A(0, –1, 1) con respecto a la recta

$$\frac{x - 5}{2} = y = \frac{z - 2}{3}$$

Solución:

a) El vector director de la recta **r** es $\vec{v}(2, 1, 3)$, que es el vector normal al plano π perpendicular, $\vec{n}(2, 1, 3)$

$2x + y + 1 + 3(z - 1) = 0$

$2x + y + 3z - 2 = 0$

b) Se pasa la recta a forma paramétrica:

$$r \equiv \begin{cases} x = 5 + 2t \\ y = t \; ; \; t \in \mathbb{R} \\ z = 2 + 3t \end{cases}$$

Se sustituyen las variables en la ecuación del plano:

$2(5 + 2t) + t + 3(2 + 3t) - 2 = 0$

$t = -1 \Rightarrow M(3, -1, -1)$

c) Sea P'(x, y, z); se tiene que verificar:

$\frac{x}{2} = 3 \Rightarrow x = 6$

$\frac{-1 + y}{2} = -1 \Rightarrow -1 + y = -2 \Rightarrow y = -1$

$\frac{1 + z}{2} = -1 \Rightarrow 1 + z = -2 \Rightarrow z = -3$

$P'(6, -1, -3)$

Preguntas tipo test

Contesta en tu cuaderno:

1 Dada la recta definida por:

$$r \equiv \frac{x-1}{2} = \frac{y+1}{3} = \frac{z-2}{1}$$

la ecuación del plano que pasa por el origen y es perpendicular a **r** es:

- ☐ $7x - 3y - 5z = 0$
- ☒ $2x + 3y + z = 0$
- ☐ $3x - 2y + z = 0$
- ☐ $3x - 7y - 5z = 0$

2 El punto de la recta $r \equiv \begin{cases} x = \lambda \\ y = 3 - \lambda;\ \lambda \in \mathbb{R} \\ z = 1 + 2\lambda \end{cases}$

cuya distancia al punto $P(1, 0, 2)$ es igual a $\sqrt{5}$, es:

- ☐ $(0, 3, 1)$
- ☐ $(1, -1, 2)$
- ☒ $(1, 2, 3)$
- ☐ $(1, -3, 1)$

3 Dados el punto $O(0, 0, 0)$ y el plano $\pi \equiv x + y + z = 6$, las coordenadas del punto simétrico de O respecto del plano π son:

- ☐ $(-4, -4, -4)$
- ☐ $(-2, -2, -2)$
- ☐ $(2, 2, 2)$
- ☒ $(4, 4, 4)$

4 Dada la recta $r \equiv \begin{cases} x = -1 \\ y - z - 1 = 0 \end{cases}$

y el plano $\pi \equiv x + y - 2 = 0$, la posición relativa de la recta y el plano y el ángulo que forman es:

- ☐ La recta está contenida en el plano y forman un ángulo de 0°
- ☒ La recta y el plano se cortan y forman un ángulo de 30°
- ☐ La recta es paralela al plano y forman un ángulo de 0°
- ☐ Ninguna de las anteriores es correcta.

5 Dadas las rectas

$$r \equiv \begin{cases} x + y - z = 0 \\ x + 2y = 7 \end{cases} \qquad s \equiv \begin{cases} x = 2 \\ y = -5 \end{cases}$$

un punto de cada una de ellas, de tal forma que el vector que los una sea perpendicular a ambas rectas, es:

- ☐ No tiene solución porque las rectas son perpendiculares.
- ☐ $A(5, 1, 6)$ $B(2, -5, 1)$
- ☐ $A(7, 0, 7)$ $B(2, -5, 0)$
- ☒ $A(5, 1, 6)$ y $B(2, -5, 6)$

6 Sean las rectas $r \equiv \begin{cases} y = 1 \\ z = 0 \end{cases};\ s \equiv \begin{cases} x = 0 \\ z = 2 \end{cases}$

¿Cuál es su posición relativa y la distancia entre **r** y **s**?

- ☒ Se cruzan y su distancia es 2 unidades.
- ☐ Son paralelas y su distancia es $\sqrt{2}$ unidades.
- ☐ Son paralelas y su distancia es $\sqrt{3}$ unidades.
- ☐ Son secantes y su distancia es 0 unidades.

7 Se considera el punto $P(3, 2, 0)$ y la recta

$$r \equiv \begin{cases} x + y - z - 3 = 0 \\ x + 2z + 1 = 0 \end{cases}$$

El punto Q simétrico de P respecto a **r** es:

- ☐ $Q(1, 1, -1)$
- ☒ $Q(-1, 0, -2)$
- ☐ $Q(3, 2, 0)$
- ☐ Ninguna de las anteriores es cierta.

8 Sean las rectas

$$r \equiv \begin{cases} 3x + y = 1 \\ x - kz = 2 \end{cases} \qquad s \equiv \begin{cases} x = 1 - t \\ y = 2 + 3t;\ t \in \mathbb{R} \\ z = t \end{cases}$$

El valor de **k** que hace que las rectas sean perpendiculares es:

- ☐ $k = 1$
- ☐ $k = -1/10$
- ☒ $k = 1/10$
- ☐ Para ningún valor de **k** pueden ser perpendiculares.

9 Sea la recta $r \equiv \begin{cases} x = 1 - t \\ y = 2 + 3t;\ t \in \mathbb{R} \\ z = t \end{cases}$

La distancia del punto $A(1, 1, 1)$ a la recta **r** es:

- ☒ $\frac{3\sqrt{22}}{11}$
- ☐ 0
- ☐ $\sqrt{2}$
- ☐ Ninguna de las anteriores es cierta.

10 Los puntos de la recta:

$$r \equiv \frac{x-3}{1} = \frac{y-5}{1} = \frac{z+1}{-1}$$

cuya distancia al plano $\pi \equiv 2x - y + 2z + 1 = 0$ es igual a 1, son:

- ☐ $A(3, 5, -1)$ y $B(6, 8, -4)$
- ☐ Solo hay un punto $A(6, 8, -4)$
- ☐ Es imposible porque la recta está contenida en el plano.
- ☒ $A(0, 2, 2)$ y $B(6, 8, -4)$

1. Distancia entre puntos y rectas en el espacio

21. Calcula la distancia que hay entre los puntos:

$A(2, -3, 5)$ y $B(7, -1, -4)$

Solución:

$d(A, B) = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}$

$\overrightarrow{AB}(5, 2, -9)$

$d(A, B) = \sqrt{5^2 + 2^2 + (-9)^2} = 10{,}49$ unidades.

22. Encuentra la distancia del punto $P(1, 1, 1)$ a la recta de ecuación:

$$\begin{cases} x + y - z = 2 \\ 2x + y = 1 \end{cases}$$

Solución:

$d(P, r) = \dfrac{|\overrightarrow{AP} \times \vec{v}|}{|\vec{v}|}$

$P(1, 1, 1)$

$A(0, 1, -1) \in r$

$\overrightarrow{AP}(1, 0, 2)$

Vector director de la recta **r:**

$\vec{v}(1, -2, -1)$

$\overrightarrow{AP} \times \vec{v} = (4, 3, -2)$

$|\overrightarrow{AP} \times \vec{v}| = \sqrt{29}$

$|\vec{v}| = \sqrt{6}$

$d(P, r) = \dfrac{\sqrt{29}}{\sqrt{6}} = 2{,}20$ unidades.

23. Halla la distancia que hay entre las rectas:

$$r \equiv \frac{x-2}{3} = y + 1 = \frac{z+3}{2}$$

$$s \equiv \frac{x+1}{2} = \frac{y+2}{3} = z + 5$$

Solución:

$d(r, s) = \dfrac{|[\overrightarrow{AB}, \vec{u}, \vec{v}]|}{|\vec{u} \times \vec{v}|}$

$A(2, -1, -3) \in r$

$B(-1, -2, -5) \in s$

$\overrightarrow{AB}(-3, -1, -2)$

$\vec{u}(3, 1, 2), \vec{v}(2, 3, 1)$

$[\overrightarrow{AB}, \vec{u}, \vec{v}] = \begin{vmatrix} -3 & -1 & -2 \\ 3 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 1 \end{vmatrix} = 0$

Las rectas **r** y **s** están en el mismo plano:

$\dfrac{3}{2} \neq \dfrac{1}{3} \neq \dfrac{2}{1}$ y no son paralelas. Por tanto, se cortan.

$d(r, s) = 0$

24. Halla la distancia que hay entre las rectas:

$$r \equiv \begin{cases} x = t + 1 \\ y = -t \\ z = 2t + 2 \end{cases} \qquad s \equiv \begin{cases} x = t \\ y = 3t + 1\,;\ t \in \mathbb{R} \\ z = -t - 1 \end{cases}$$

Solución:

$d(r, s) = \dfrac{|[\overrightarrow{AB}, \vec{u}, \vec{v}]|}{|\vec{u} \times \vec{v}|}$

$A(1, 0, 2) \in r$

$B(0, 1, -1) \in s$

$\overrightarrow{AB}(-1, 1, -3)$

$\vec{u}(1, -1, 2)$

$\vec{v}(1, 3, -1)$

$[\overrightarrow{AB}, \vec{u}, \vec{v}] = \begin{vmatrix} -1 & 1 & -3 \\ 1 & -1 & 2 \\ 1 & 3 & -1 \end{vmatrix} = -4 \neq 0$

Las rectas **r** y **s** se cruzan.

$\vec{u} \times \vec{v} = (-5, 3, 4)$

$d(r, s) = \dfrac{|-4|}{\sqrt{(-5)^2 + 3^2 + 4^2}} = \dfrac{4}{\sqrt{50}} = 0{,}57$ unidades.

25. Calcula el plano mediador del segmento que tiene por extremos los puntos $A(-3, 1, -4)$ y $B(1, -1, 2)$

Solución:

El punto medio del segmento AB es $M(-1, 0, -1)$

$\vec{n} = \overrightarrow{AB}(4, -2, 6) \parallel (2, -1, 3)$

El plano es:

$2(x + 1) - y + 3(z + 1) = 0$

$2x - y + 3z + 5 = 0$

2. Distancia a un plano en el espacio

26. Halla la distancia del punto $P(2, 7, 3)$ al plano determinado por los puntos:

$A(1, 0, 0), B(2, -1, 2)$ y $C(5, -1, 1)$

Solución:

$d(P, \pi) = \dfrac{|Ap_1 + Bp_2 + Cp_3 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$

$P(2, 7, 3)$

Determinación del plano π:

$A(1, 0, 0) \in \pi$

$\vec{u} = \overrightarrow{AB}(1, -1, 2)$

$\vec{v} = \overrightarrow{AC}(4, -1, 1)$

$$\begin{vmatrix} x-1 & y & z \\ 1 & -1 & 2 \\ 4 & -1 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

$x + 7y + 3z - 1 = 0$

$$d(P, \pi) = \frac{|1 \cdot 2 + 7 \cdot 7 + 3 \cdot 3 - 1|}{\sqrt{1^2 + 7^2 + 3^2}} = \frac{|59|}{\sqrt{59}} =$$

$= \sqrt{59} = 7{,}68$ unidades.

27. Halla la distancia entre la recta:

$$r \equiv \frac{x-1}{3} = \frac{y+1}{2} = z + 2$$

y el plano $\pi \equiv 2x - 3y + 4z + 2 = 0$

Solución:

Estudiamos en primer lugar la posición relativa entre la recta y el plano:

$\vec{v}(3, 2, 1)$

$\vec{n}(2, -3, 4)$

$\vec{v} \cdot \vec{n} = 6 - 6 + 4 = 4 \neq 0$

La recta y el plano se cortan.

$d(r, \pi) = 0$

28. Calcula el volumen de un cubo sabiendo que dos de sus caras están, respectivamente, en los planos:

$$\pi \equiv 2x - 2y + z - 1 = 0$$
$$\pi' \equiv 2x - 2y + z - 5 = 0$$

Solución:

Estudiamos, en primer lugar, la posición relativa entre los dos planos:

$$\frac{2}{2} = \frac{-2}{-2} = \frac{1}{1} \neq \frac{-1}{-5}$$

Los dos planos son paralelos.

La arista del cubo es la distancia que hay entre los dos planos.

Para hallar la distancia que hay entre ellos, se halla un punto en el primero y se calcula la distancia desde ese punto al segundo plano.

$$a = d(P, \pi') = \frac{|Ap_1 + Bp_2 + Cp_3 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$$

$P(0, 0, 1) \in r$

$$a = d(P, \pi') = \frac{|2 \cdot 0 - 2 \cdot 0 + 1 \cdot 1 - 5|}{\sqrt{2^2 + (-2)^2 + 1^2}} = \frac{|-4|}{3} = \frac{4}{3} =$$

$= 1{,}33$ unidades.

Volumen del cubo: $a^3 = 1{,}33^3 = 2{,}35$ unidades cúbicas.

29. Calcula el plano bisector de los planos:

$$\pi \equiv 3x - 6y - 2z + 5 = 0$$
$$\pi' \equiv x + 2y - 2z - 3 = 0$$

Solución:

Sea $P(x, y, z)$ un punto genérico del plano bisector:

$$d(P, \pi) = d(P, \pi')$$

$$\frac{|3x - 6y - 2z + 5|}{\sqrt{3^2 + (-6)^2 + (-2)^2}} = \frac{|x + 2y - 2z - 3|}{\sqrt{1^2 + 2^2 + (-2)^2}}$$

$$\frac{|3x - 6y - 2z + 5|}{7} = \frac{|x + 2y - 2z - 3|}{3}$$

$3|3x - 6y - 2z + 5| = 7|x + 2y - 2z - 3|$

Del valor absoluto se obtienen dos soluciones:

$3(3x - 6y - 2z + 5) = 7(x + 2y - 2z - 3)$

$x - 16y + 4z + 18 = 0$

$3(3x - 6y - 2z + 5) = -7(x + 2y - 2z - 3)$

$8x - 2y - 10z - 3 = 0$

3. Ángulos en el espacio

30. Calcula el ángulo que forman las rectas **r** y **s**

$$r \equiv \frac{x-3}{2} = y - 2 = \frac{z-1}{2}$$

$$s \equiv \begin{cases} x + y - z = 2 \\ 2x - 2y + z = -1 \end{cases}$$

Solución:

$$\cos \alpha = \frac{|\vec{u} \cdot \vec{v}|}{|\vec{u}| \cdot |\vec{v}|}$$

Vector director de la recta **r:** $\vec{u}(2, 1, 2)$

Vector director de la recta **s:** $\vec{v}(-1, -3, -4)$

$\vec{u} \cdot \vec{v} = -2 - 3 - 8 = -13$

$|\vec{u} \cdot \vec{v}| = |-13| = 13$

$|\vec{u}| = 3$

$|\vec{v}| = \sqrt{26}$

$|\vec{u}| \cdot |\vec{v}| = 3\sqrt{26}$

$$\cos \alpha = \frac{13}{3\sqrt{26}} = \frac{\sqrt{26}}{6}$$

$\alpha = 31° \ 48' \ 22''$

31. Halla el ángulo que forman los planos:

$$\pi \equiv x - z + 5 = 0$$
$$\pi' \equiv 3x - 4y + z = 0$$

Solución:

$$\cos \alpha = \frac{|\vec{n} \cdot \vec{n}|}{|\vec{n}| \cdot |\vec{n}'|}$$

$\vec{n}(1, 0, -1)$

$\vec{n}'(3, -4, 1)$

$\vec{n} \cdot \vec{n}' = 3 + 0 - 1 = 2$

$|\vec{n} \cdot \vec{n}'| = 2$

$|\vec{n}| = \sqrt{2}$

$|\vec{n}'| = \sqrt{26}$

$|\vec{n}| \cdot |\vec{n}'| = \sqrt{52} = 2\sqrt{13}$

$\cos \alpha = \dfrac{2}{2\sqrt{13}} = \dfrac{1}{\sqrt{13}}$

$\alpha = 73° \ 53' \ 52''$

32. Dada la recta:

$$r \equiv \begin{cases} 2x - 3y = -1 \\ x + y - z = 2 \end{cases}$$

y el plano:

$$\pi \equiv ax - y + z = 5$$

halla el valor de **a** para que el ángulo formado por la recta **r** y el plano π sea de 30°

Solución:

$\text{sen } \alpha = \dfrac{|\vec{v} \cdot \vec{n}|}{|\vec{v}| \cdot |\vec{n}|}$

$\vec{v}(3, 2, 5)$

$\vec{n}(a, -1, 1)$

$\vec{v} \cdot \vec{n} = 3a - 2 + 5 = 3a + 3$

$|\vec{v} \cdot \vec{n}| = |3a + 3|$

$|\vec{v}| = \sqrt{38}$

$|\vec{n}| = \sqrt{a^2 + 2}$

$\text{sen } \alpha = \dfrac{|3a + 3|}{\sqrt{38} \cdot \sqrt{a^2 + 2}}$

$\text{sen } 30° = \dfrac{1}{2}$

$\dfrac{|3a + 3|}{\sqrt{38} \cdot \sqrt{a^2 + 2}} = \dfrac{1}{2}$

$a = 18 + 4\sqrt{19}$

$a = 18 - 4\sqrt{19}$

33. Considera los planos siguientes:

$$\pi \equiv 5x - 3y + 4z - 1 = 0$$
$$\pi' \equiv 4y + 3z + 2 = 0$$

¿Qué ángulo determinan ambos planos?

Solución:

$\text{sen } \alpha = \dfrac{|\vec{n} \cdot \vec{n}|}{|\vec{n}| \cdot |\vec{n}'|}$

$\vec{n}(5, -3, 4)$

$\vec{n}'(0, 4, 3)$

$\vec{n} \cdot \vec{n}' = 0 - 12 + 12 = 0$

$|\vec{n} \cdot \vec{n}'| = 0$

Los planos son perpendiculares.

$\alpha = 90°$

4. Perpendicularidad en el espacio

34. Calcula el punto de la recta de ecuación:

$$x - 1 = \frac{y + 2}{2} = \frac{z + 1}{-3}$$

más cercano al punto $A(1, -1, 1)$

Solución:

El punto pedido es la proyección A' del punto $A(1, -1, 1)$ sobre la recta **r**

A' es la intersección de la recta con el plano perpendicular que pasa por $(1, -1, 1)$

El vector normal al plano perpendicular es el vector director de la recta.

$$\vec{n}(1, 2, -3)$$

El plano perpendicular que pasa por $A(1, -1, 1)$ es:

$x - 1 + 2(y + 1) - 3(z - 1) = 0$

$x + 2y - 3z + 4 = 0$

Se pasa la recta a forma paramétrica y se sustituyen los valores de x, y, z en la ecuación del plano:

$$r \equiv \begin{cases} x = 1 + t \\ y = -2 + 2t \ ; \ t \in \mathbb{R} \\ z = -1 - 3t \end{cases}$$

$1 + t + 2(-2 + 2t) - 3(-1 - 3t) + 4 = 0$

$t = -\dfrac{2}{7}$

$A'\left(\dfrac{5}{7}, -\dfrac{18}{7}, -\dfrac{1}{7}\right)$

35. Halla la ecuación del plano cuyo punto más próximo al origen es $P(-1, 2, 1)$

Solución:

Es el plano perpendicular al vector $\overrightarrow{OP}$ que pasa por $P(-1, 2, 1)$

$\overrightarrow{OP} = \vec{n}(-1, 2, 1)$

$-1(x + 1) + 2(y - 2) + z - 1 = 0$

$x - 2y - z + 6 = 0$

36. Considera los planos:

$\pi_1 \equiv x + 2y - 3 = 0 \qquad \pi_2 \equiv 2x - 3z + 1 = 0$

Halla el plano que pasa por el punto P(1, 1, 1) y es perpendicular a los dos planos dados.

Solución:

Un vector perpendicular a los dos planos dados es el producto vectorial de sus vectores normales:

$\vec{n} \times \vec{n}'(-6, 3, -4) \parallel (6, -3, 4)$

$P(1, 1, 1)$

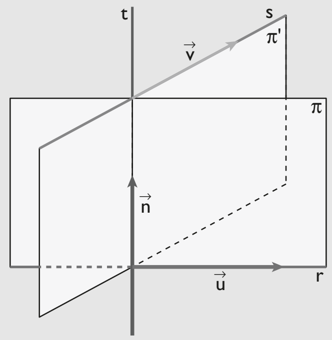
$6(x - 1) - 3(y - 1) + 4(z - 1) = 0$

$6x - 3y + 4z - 7 = 0$

37. Halla las ecuaciones paramétricas de la recta que corta perpendicularmente a las rectas

$r \equiv x = \dfrac{y-1}{2} = \dfrac{z+1}{2} \qquad s \equiv x - 1 = y = \dfrac{z}{2}$

Solución:



a) Vector director de la recta **r:** $\vec{u}(1, 2, 2)$; punto $A(0, 1, -1)$

Vector director de la recta **s:** $\vec{v}(1, 1, 2)$; punto $B(1, 0, 0)$

b) Se halla el vector perpendicular a $\vec{u}$ y $\vec{v}$:

$$\vec{n} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 2 \end{vmatrix} = 2i - k \Rightarrow \vec{n}(2, 0, -1)$$

c) El plano π, que contiene a la recta **r** y es perpendicular a **s:**

$$\pi \equiv \begin{vmatrix} x & y-1 & z+1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 2 & 0 & -1 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow$$

$\Rightarrow \pi \equiv -2x + 5y - 4z - 9 = 0$

El plano π', que contiene a la recta **s** y es perpendicular a **r:**

$$\pi' \equiv \begin{vmatrix} x-1 & y & z \\ 1 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & -1 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow$$

$\Rightarrow \pi' \equiv -x + 5y - 2z + 1 = 0$

La recta es:

$$t \equiv \begin{cases} 2x - 5y + 4z + 9 = 0 \\ x - 5y + 2z - 1 = 0 \end{cases}$$

5. Simetría en el espacio

38. Calcula el punto simétrico del punto P(–4, 1, 0) respecto del punto A(–1, 3, –2)

Solución:

Sea P'(x, y, z); se tiene que verificar:

$\dfrac{-4+x}{2} = -1 \Rightarrow -4 + x = -2 \Rightarrow x = 2$

$\dfrac{1+y}{2} = 3 \Rightarrow 1 + y = 6 \Rightarrow y = 5$

$\dfrac{z}{2} = -2 \Rightarrow z = -4$

$P'(2, 5, -4)$

39. Dado el punto A(3, 1, 0), halla su simétrico respecto de la recta **r** dada por las ecuaciones paramétricas:

$$r \equiv \begin{cases} x = 1 - t \\ y = -2 + t \; ; \; t \in \mathbb{R} \\ z = 2t \end{cases}$$

Solución:

a) El vector director de la recta **r** es $\vec{v}(-1, 1, 2)$, que es el vector normal al plano π perpendicular, $\vec{n}(-1, 1, 2)$

$-(x - 3) + y - 1 + 2z = 0$

$x - y - 2z - 2 = 0$

b) La ecuación de la recta ya nos la dan en forma paramétrica.

Se sustituyen las variables en la ecuación del plano:

$1 - t - (-2 + t) - 2(2t) - 2 = 0$

$t = \dfrac{1}{6}$

$M\left(\dfrac{5}{6}, -\dfrac{11}{6}, \dfrac{1}{3}\right)$

c) Sea P'(x, y, z); se tiene que verificar:

$\dfrac{3+x}{2} = \dfrac{5}{6} \Rightarrow 18 + 6x = 10 \Rightarrow x = -\dfrac{4}{3}$

$\dfrac{1+y}{2} = -\dfrac{11}{6} \Rightarrow 6 + 6y = -22 \Rightarrow y = -\dfrac{14}{3}$

$\dfrac{z}{2} = \dfrac{1}{3} \Rightarrow 3z = 2 \Rightarrow z = \dfrac{2}{3}$

$P'\left(-\dfrac{4}{3}, -\dfrac{14}{3}, \dfrac{2}{3}\right)$

40. Calcula el punto simétrico de $P(2, -3, -2)$ respecto del plano: $\pi \equiv x + y + z = 0$

Solución:

a) El vector normal al plano π es $\vec{n}(1, 1, 1)$, que es el vector director $\vec{v}(1, 1, 1)$ de la recta perpendicular a **r**

$$r \equiv \begin{cases} x = 2 + t \\ y = -3 + t \; ; \; t \in \mathbb{R} \\ z = -2 + t \end{cases}$$

Se sustituyen las variables en la ecuación del plano:

$2 + t - 3 + t - 2 + t = 0$

$t = 1 \Rightarrow M(3, -2, -1)$

b) Sea $P'(x, y, z)$; se tiene que verificar:

$$\frac{2 + x}{2} = 3 \Rightarrow 2 + x = 6 \Rightarrow x = 4$$

$$\frac{-3 + y}{2} = -2 \Rightarrow -3 + y = -4 \Rightarrow y = -1$$

$$\frac{-2 + z}{2} = -1 \Rightarrow -2 + z = -2 \Rightarrow z = 0$$

$P'(4, -1, 0)$

41. Calcula el punto simétrico de $P(1, -2, 3)$ respecto de la recta de ecuación:

$$r \equiv \begin{cases} x - 2y = 1 \\ x - y - z = 0 \end{cases}$$

Solución:

a) El vector director de la recta **r** es:

$$\vec{v}(2, 1, 1)$$

que es el vector normal al plano π perpendicular, $\vec{n}(2, 1, 1)$

$2(x - 1) + y + 2 + z - 3 = 0$

$2x + y + z - 3 = 0$

b) Se pasa la recta a forma paramétrica.

Un punto de la recta es $A(1, 0, 1)$:

$$r \equiv \begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = t \; ; \; t \in \mathbb{R} \\ z = 1 + t \end{cases}$$

Se sustituyen las variables en la ecuación del plano:

$2(1 + 2t) + t + 1 + t - 3 = 0$

$t = 0 \Rightarrow M(1, 0, 1)$

c) Sea $P'(x, y, z)$; se tiene que verificar:

$$\frac{x + 1}{2} = 1 \Rightarrow x + 1 = 2 \Rightarrow x = 1$$

$$\frac{-2 + y}{2} = 0 \Rightarrow -2 + y = 0 \Rightarrow y = 2$$

$$\frac{3 + z}{2} = 1 \Rightarrow 3 + z = 2 \Rightarrow z = -1$$

$P'(1, 2, -1)$

Para ampliar

42. Halla la distancia desde el punto $P(0, 0, 10)$ al plano que pasa por los puntos:

$$A(0, 0, 1), B(4, 2, 7) \text{ y } C(4, 0, 3)$$

Solución:

$$d(P, \pi) = \frac{|Ap_1 + Bp_2 + Cp_3 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$$

$P(0, 0, 10)$

Determinación del plano π: $A(0, 0, 1) \in \pi$

$\vec{u} = \overrightarrow{AB}(4, 2, 6) \parallel (2, 1, 3)$

$\vec{v} = \overrightarrow{AC}(4, 0, 2) \parallel (2, 0, 1)$

$$\begin{vmatrix} x & y & z - 1 \\ 2 & 1 & 3 \\ 2 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow x + 4y - 2z + 2 = 0$$

$$d(P, \pi) = \frac{|1 \cdot 0 + 4 \cdot 0 - 2 \cdot 10 + 2|}{\sqrt{1^2 + 4^2 + (-2)^2}} = \frac{18}{\sqrt{21}} = 3{,}93 \text{ u}$$

43. Encuentra la distancia del punto $P(1, 1, 1)$ al plano determinado por las rectas:

$$r \equiv \begin{cases} x = 1 + t \\ y = 2 - t \; ; \; t \in \mathbb{R} \\ z = t \end{cases}$$

$s \equiv x + 1 = y = z - 3$

Solución:

$$d(P, \pi) = \frac{|Ap_1 + Bp_2 + Cp_3 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$$

$P(1, 1, 1)$

Determinación del plano π en forma general:

$A(1, 2, 0) \in \pi$

$\vec{u} = (1, -1, 1)$

$\vec{v} = (1, 1, 1)$

$$\begin{vmatrix} x-1 & y-2 & z \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

$x - z - 1 = 0$

$$d(P,\pi) = \frac{|1 \cdot 1 + 0 \cdot 1 - 1 \cdot 1 - 1|}{\sqrt{1^2 + 0^2 + (-1)^2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} = 0{,}71 \text{ u}$$

44. Determina todos los puntos del plano

$$2x - y + 2z - 1 = 0$$

que equidistan de los puntos:

$$A(3, 0, -2) \text{ y } B(1, 2, 0)$$

¿Qué representan geométricamente?

Solución:

Sea P(x, y, z) un punto del plano. Se tiene que cumplir:

d(P, A) = d(P, B)

Se resuelve el sistema:

$$\begin{cases} \sqrt{(x-3)^2 + y^2 + (z+2)^2} = \sqrt{(x-1)^2 + (y-2)^2 + z^2} \\ 2x - y + 2z - 1 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} -6x \quad + 4z + 13 = -2x - 4y + 5 \\ 2x - y + 2z - 1 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x - y - z - 2 = 0 \\ 2x - y + 2z - 1 = 0 \end{cases}$$

Son dos planos que definen una recta.

Un punto de la recta es (–1, –3, 0) y el vector director (–3, –4, 1)

$$r \equiv \frac{x+1}{-3} = \frac{y+3}{-4} = z$$

45. Considera los puntos A(1, 2, 3), B(3, 2, 1) y C(2, 0, 2). Halla el punto simétrico del origen de coordenadas respecto del plano que contiene a A, B y C

Solución:

Determinación del plano π en forma general:

$A(1, 2, 3) \in \pi$

$\vec{u} = \overrightarrow{AB}(2, 0, -2) \parallel (1, 0, -1)$

$\vec{v} = \overrightarrow{AC}(1, -2, -1)$

$$\begin{vmatrix} x-1 & y-2 & z-3 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & -2 & -1 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow x + z - 4 = 0$$

a) El vector normal del plano π es $\vec{n}(1, 0, 1)$, que es el vector director $\vec{v}(1, 0, 1)$ de la recta perpendicular **r**

$$r \equiv \begin{cases} x = t \\ y = 0\,; \ t \in \mathbb{R} \\ z = t \end{cases}$$

Se sustituyen las variables en la ecuación del plano:

$t + t - 4 = 0$

$t = 2 \Rightarrow M(2, 0, 2)$

b) Sea P'(x, y, z); se tiene que verificar:

$\frac{x}{2} = 2 \Rightarrow x = 4$

$\frac{y}{2} = 0 \Rightarrow y = 0$

$\frac{z}{2} = 2 \Rightarrow z = 4$

P'(4, 0, 4)

46. Halla el valor de **k** para que las siguientes rectas sean perpendiculares:

$$r \equiv x - 1 = \frac{y+2}{3} = \frac{z}{5} \qquad s \equiv \begin{cases} x = 2 \\ y = -1 + kt\,; \ t \in \mathbb{R} \\ z = 3t \end{cases}$$

Solución:

Para que sean perpendiculares, el producto escalar de sus vectores directores tiene que ser cero:

$\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$

$\vec{u}(1, 3, 5)$

$\vec{v}(0, k, 3)$

$\vec{u} \cdot \vec{v} = 0 + 3k + 15 = 3k + 15$

$3k + 15 = 0$

$k = -5$

47. Los puntos A(1, 1, 1), B(2, 2, 2) y C(1, 3, 3) son tres vértices consecutivos de un paralelogramo. Clasifica el paralelogramo por sus lados y por sus ángulos.

Solución:

a) Clasificación por sus lados:

$d(A, B) = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}$

$\overrightarrow{AB}(1, 1, 1)$

$d(A, B) = \sqrt{1^2 + 1^2 + 1^2} = \sqrt{3}$ unidades.

$\overrightarrow{BC}(-1, 1, 1)$

$d(B, C) = \sqrt{(-1)^2 + 1^2 + 1^2} = \sqrt{3}$ unidades.

Los lados consecutivos son iguales; por tanto, es un cuadrado o un rombo.

b) Clasificación por los ángulos:

Si los lados son perpendiculares, es un cuadrado; en otro caso, es un rombo.

$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BC} = -1 + 1 + 1 = 1 \neq 0$

Por lo tanto, es un rombo.

48. Halla la distancia desde el punto P(0, 0, 7) al plano que pasa por los puntos:

$$A(0, 0, 0), B(0, 2, 2) \text{ y } C(2, 0, 2)$$

Solución:

$$d(P,\pi) = \frac{|Ap_1 + Bp_2 + Cp_3 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$$

P(0, 0, 7)

Determinación del plano π:

$A(0, 0, 0) \in \pi$

$\vec{u} = \overrightarrow{AB}(0, 2, 2) \parallel (0, 1, 1)$

$\vec{v} = \overrightarrow{AC}(2, 0, 2) \parallel (1, 0, 1)$

$$\begin{vmatrix} x & y & z \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow x + y - z = 0$$

$$d(P,\pi) = \frac{|1 \cdot 0 - 1 \cdot 0 - 1 \cdot 7 + 0|}{\sqrt{1^2 + 1^2 + (-1)^2}} = \frac{|-7|}{\sqrt{3}} =$$

$$= \frac{7\sqrt{3}}{3} = 4{,}04 \text{ unidades.}$$

49. Halla razonadamente las ecuaciones de los dos planos paralelos al plano $\pi \equiv 12x + 3y - 4z = 7$, que dista 6 unidades de π

Solución:

$$d(P,\pi) = \frac{|Ap_1 + Bp_2 + Cp_3 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$$

$$\frac{|12x + 3y - 4z - 7|}{\sqrt{12^2 + 3^2 + (-4)^2}} = 6$$

$$\frac{|12x + 3y - 4z - 7|}{13} = 6$$

$|12x + 3y - 4z - 7| = 78$

De la igualdad del valor absoluto se deducen dos igualdades:

a) $12x + 3y - 4z - 7 = 78$

$12x + 3y - 4z = 85$

b) $12x + 3y - 4z - 7 = -78$

$12x + 3y - 4z = -71$

50. Halla el punto de la recta $r \equiv x = \dfrac{y+2}{2} = \dfrac{z-3}{-1}$ que equidista del punto A(1, 2, 1) y del origen de coordenadas.

Solución:

Tomamos un punto genérico de la recta e igualamos las distancias desde dicho punto al origen de coordenadas y al punto A(1, 2, 1)

Pasamos la recta a forma paramétrica:

$$r \equiv \begin{cases} x = t \\ y = -2 + 2t \ ; \ t \in \mathbb{R} \\ z = 3 - t \end{cases}$$

$P(t, -2 + 2t, 3 - t)$

$d(O, P) = d(A, P)$

$\overrightarrow{OP}(t, -2 + 2t, 3 - t)$

$d(O, P) = \sqrt{t^2 + (-2 + 2t)^2 + (3 - t)^2}$

$\overrightarrow{AP}(t - 1, -4 + 2t, 2 - t)$

$d(A, P) = \sqrt{(t - 1)^2 + (-4 + 2t)^2 + (2 - t)^2}$

$\sqrt{t^2 + (-2 + 2t)^2 + (3 - t)^2} =$

$= \sqrt{(t - 1)^2 + (-4 + 2t)^2 + (2 - t)^2} \Rightarrow t = 1$

P(1, 0, 2)

51. Determina los puntos de la recta:

$$r \equiv \frac{x-1}{2} = \frac{y+1}{3} = \frac{z+2}{2}$$

que equidistan de los planos de ecuaciones

$\pi \equiv 3x + 4y - 1 = 0 \qquad \pi' \equiv 4x - 3z - 1 = 0$

Solución:

Tomamos un punto genérico de la recta e igualamos las distancias desde dicho punto a cada uno de los planos.

Pasamos la recta a forma paramétrica:

$$r \equiv \begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = -1 + 3t \ ; \ t \in \mathbb{R} \\ z = -2 + 2t \end{cases}$$

$P(1 + 2t, -1 + 3t, -2 + 2t)$

$d(P, \pi) = d(P, \pi')$

$$\frac{|3(1 + 2t) + 4(-1 + 3t) - 1|}{\sqrt{3^2 + 4^2 + 0^2}} =$$

$$= \frac{|4(1 + 2t) - 3(-2 + 2t) - 1|}{\sqrt{4^2 + (-3)^2 + 0^2}}$$

$$\frac{|3(1 + 2t) + 4(-1 + 3t) - 1|}{5} =$$

$$= \frac{|4(1 + 2t) - 3(-2 + 2t) - 1|}{5}$$

$|3(1 + 2t) + 4(-1 + 3t) - 1| = |4(1 + 2t) - 3(-2 + 2t) - 1|$

De la igualdad del valor absoluto se deducen dos igualdades:

a) $3(1 + 2t) + 4(-1 + 3t) - 1 =$

$= 4(1 + 2t) - 3(-2 + 2t) - 1$

$$t = \frac{11}{16} \Rightarrow A\left(\frac{19}{8}, \frac{17}{16}, -\frac{5}{8}\right)$$

b) $3(1 + 2t) + 4(-1 + 3t) - 1 =$

$= -[4(1 + 2t) - 3(-2 + 2t) - 1]$

$$t = -\frac{7}{20} \Rightarrow B\left(\frac{3}{10}, -\frac{41}{20}, -\frac{27}{10}\right)$$

52. Dados los planos

$\pi \equiv 6x - ay + 4z + 9 = 0$

$\pi' \equiv 9x - 3y + bz - b = 0$

a) determina **a** y **b** para que sean paralelos.

b) calcula la distancia entre dichos planos.

Solución:

a) Para que los planos sean paralelos, los coeficientes de las variables tienen que ser proporcionales y no serlo los términos independientes:

$$\frac{6}{9} = \frac{-a}{-3} = \frac{4}{b} \neq \frac{9}{-b}$$

a = 2, b = 6

b) Para hallar la distancia entre los dos planos paralelos:

$\pi \equiv 6x - 2y + 4z + 9 = 0$

$\pi' \equiv 9x - 3y + 6z - 6 = 0$

se halla un punto P de uno de los planos y se calcula la distancia desde ese punto P al otro plano:

$P'(0, 0, 1) \in \pi'$

$$d(P, \pi) = \frac{|6 \cdot 0 - 2 \cdot 0 + 4 \cdot 1 + 9|}{\sqrt{6^2 + (-2)^2 + 4^2}} = \frac{13}{\sqrt{56}} =$$

= 1,74 unidades.

53. Calcula alguna recta que sea paralela al plano de ecuación x + z = 2 y corte perpendicularmente a la recta de ecuaciones:

$$r \equiv \begin{cases} x + y = 0 \\ y + z = 0 \end{cases}$$

Solución:

Para que una recta **s** sea paralela a un plano, el vector director de la recta tiene que ser perpendicular al vector normal al plano.

$$\vec{n}(1, 0, 1)$$

Vector director de la recta del enunciado:

$$\vec{v}(1, -1, 1)$$

Para que la recta **s** sea perpendicular a la recta anterior, sus vectores directores tienen que ser perpendiculares. Luego estamos buscando un vector perpendicular a $\vec{n}(1, 0, 1)$ y a $\vec{v}(1, -1, 1)$, es decir, su producto vectorial:

$$\vec{u}(1, 0, -1)$$

Como nos piden una recta cualquiera, elegimos un punto; por ejemplo, O(0, 0, 0)

$$s \equiv \begin{cases} x = t \\ y = 0 \\ z = -t \end{cases} ; \ t \in \mathbb{R}$$

54. Escribe la ecuación de la recta que pasa por los puntos A(–1, 0, 1) y B(1, 2, 3). Halla los puntos de dicha recta tales que su distancia al punto C(2, –1, 1) es de tres unidades.

Solución:

A(–1, 0, 1)

$v = \overrightarrow{AB}(2, 2, 2) \parallel (1, 1, 1)$

$$r \equiv \begin{cases} x = -1 + t \\ y = t \\ z = 1 + t \end{cases} ; \ t \in \mathbb{R}$$

Se toma un punto genérico de la recta:

P(–1 + t, t, 1 + t)

C(2, –1, 1)

d(C, P) = 3

$\sqrt{(t - 3)^2 + (t + 1)^2 + t^2} = 3$

$(t - 3)^2 + (t + 1)^2 + t^2 = 9$

$t = 1, t = \frac{1}{3}$

$t = 1 \Rightarrow Q(0, 1, 2)$

$t = \frac{1}{3} \Rightarrow R\left(-\frac{2}{3}, \frac{1}{3}, \frac{4}{3}\right)$

Problemas

55. Calcula la distancia entre las rectas **r** y **s,** donde **r** tiene por ecuación:

$$x = 3y = 5z$$

y la recta **s** pasa por los puntos P(1, 1, 1), Q(1, 2, –3)

Solución:

$$d(r, s) = \frac{|[\overrightarrow{AB}, \vec{u}, \vec{v}]|}{|\vec{u} \times \vec{v}|}$$

$$r \equiv \frac{x}{15} = \frac{y}{5} = \frac{z}{3}$$

$A(0, 0, 0) \in r$

$B(1, 1, 1) \in s$

$\overrightarrow{AB}(1, 1, 1)$

$\vec{u}(15, 5, 3)$

$\vec{v} = \overrightarrow{PQ}(0, 1, -4)$

$$[\overrightarrow{AB}, \vec{u}, \vec{v}] = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 15 & 5 & 3 \\ 0 & 1 & -4 \end{vmatrix} = 52 \neq 0$$

Las rectas **r** y **s** se cruzan.

$$\vec{u} \times \vec{v} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 15 & 5 & 3 \\ 0 & 1 & -4 \end{vmatrix} = -23i + 60j + 15k$$

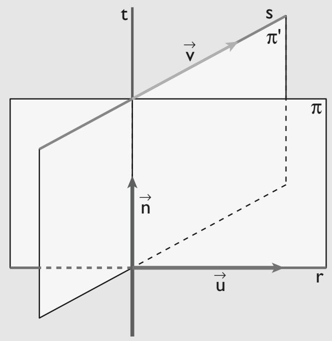
$$d(r, s) = \frac{|52|}{\sqrt{(-23)^2 + 60^2 + 15^2}} = \frac{52}{\sqrt{4354}} =$$

= 0,79 unidades.

56. Encuentra la ecuación de la perpendicular común a las rectas:

$$r \equiv \begin{cases} x = 5 + t \\ y = 6 + t\,;\ t \in \mathbb{R} \\ z = -1 + t \end{cases} \qquad s \equiv \begin{cases} x = 1 + t \\ y = t\,;\ t \in \mathbb{R} \\ z = -1 - t \end{cases}$$

Solución:



a) Vector director de la recta **r:** $\vec{u}(1, 1, 1)$; punto $A(5, 6, -1)$

Vector director de la recta **s:** $\vec{v}(1, 1, -1)$; punto $B(1, 0, -1)$

b) Se halla el vector perpendicular a $\vec{u}$ y $\vec{v}$:

$$\vec{n} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{vmatrix} = -2i + 2j \Rightarrow \vec{n}(-2, 2, 0) \parallel (1, -1, 0)$$

c) El plano π, que contiene a la recta **r** y es perpendicular a **s:**

$$\pi \equiv \begin{vmatrix} x-5 & y-6 & z+1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow$$

$\Rightarrow \pi \equiv x + y - 2z - 13 = 0$

El plano π', que contiene a la recta **s** y es perpendicular a **r:**

$$\pi' \equiv \begin{vmatrix} x-1 & y & z+1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow$$

$\Rightarrow \pi' \equiv -x - y - 2z - 1 = 0$

La recta es:

$$t \equiv \begin{cases} x + y - 2z - 13 = 0 \\ x + y + 2z + 1 = 0 \end{cases}$$

57. Se consideran el plano π y la recta **r** siguientes:

$\pi \equiv x + y - 2z = 6$

$$r \equiv \frac{x-1}{2} = \frac{y}{3} = \frac{z-1}{-1}$$

Se pide:

a) hallar el punto simétrico de $M(1, 1, 1)$ respecto del plano π

b) hallar el punto simétrico de $M(1, 1, 1)$ respecto de la recta **r**

Solución:

a) El vector normal del plano π es $\vec{n}(1, 1, -2)$, que es el vector director $\vec{v}(1, 1, -2)$ de la recta perpendicular **r**

$$r \equiv \begin{cases} x = 1 + t \\ y = 1 + t\,;\ t \in \mathbb{R} \\ z = 1 - 2t \end{cases}$$

Se sustituyen las variables en la ecuación del plano:

$1 + t + 1 + t - 2(1 - 2t) - 6 = 0$

$t = 1 \Rightarrow P(2, 2, -1)$

Sea $M'(x, y, z)$; se tiene que verificar:

$$\frac{1+x}{2} = 2 \Rightarrow 1 + x = 4 \Rightarrow x = 3$$

$$\frac{1+y}{2} = 2 \Rightarrow 1 + y = 4 \Rightarrow y = 3$$

$$\frac{1+z}{2} = -1 \Rightarrow 1 + z = -2 \Rightarrow z = -3$$

$M'(3, 3, -3)$

b) El vector director de la recta **r** es $\vec{v}(2, 3, -1)$, que es el vector normal al plano π perpendicular, $\vec{n}(2, 3, -1)$

$2(x - 1) + 3(y - 1) - (z - 1) = 0$

$2x + 3y - z - 4 = 0$

Se pasa la recta a forma paramétrica:

$$r \equiv \begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = 3t\,;\ t \in \mathbb{R} \\ z = 1 - t \end{cases}$$

Se sustituyen las variables en la ecuación del plano:

$2(1 + t) + 3 \cdot 3t - (1 - t) - 4 = 0$

$$t = \frac{1}{4} \Rightarrow Q\left(\frac{3}{2}, \frac{3}{4}, \frac{3}{4}\right)$$

Sea $M'(x, y, z)$; se tiene que verificar:

$$\frac{1+x}{2} = \frac{3}{2} \Rightarrow 2 + 2x = 6 \Rightarrow x = 2$$

$$\frac{1+y}{2} = \frac{3}{4} \Rightarrow 4 + 4y = 6 \Rightarrow y = \frac{1}{2}$$

$$\frac{1+z}{2} = \frac{3}{4} \Rightarrow 4 + 4z = 6 \Rightarrow z = \frac{1}{2}$$

$$M'\left(2, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$$

58. Un cuadrado tiene dos vértices consecutivos en los puntos $P(2, 1, 3)$ y $Q(1, 3, 1)$, y los otros dos sobre una recta **r** que pasa por el punto $R(-4, 7, -6)$.

Se pide:

a) ecuación de la recta **r**

b) hallar el plano que contiene al cuadrado.

c) calcular los otros dos vértices de este cuadrado y la longitud de su diagonal.

Solución:

a) La recta **r** pasa por el punto R(–4, 7, –6) y tiene de vector director:

$\vec{v} = \overrightarrow{PQ}(-1, 2, -2) \parallel (1, -2, 2)$

$$x + 4 = \frac{y - 7}{-2} = \frac{z + 6}{2}$$

b) El plano π pasa por el punto P(2, 1, 3) y tiene como vectores directores:

$\vec{v} = \overrightarrow{PQ}(-1, 2, -2) \parallel (1, -2, 2)$

$\vec{u} = \overrightarrow{PR}(-6, 6, -9) \parallel (2, -2, 3)$

$$\begin{vmatrix} x-2 & y-1 & z-3 \\ 1 & -2 & 2 \\ 2 & -2 & 3 \end{vmatrix} = 0$$

$2x - y - 2z + 3 = 0$

c) La recta está contenida en el plano.

El vértice A del cuadrado es el punto de corte de la recta **r** y del plano perpendicular que pasa por P(2, 1, 3)

$$r \equiv \begin{cases} x = -4 + t \\ y = 7 - 2t \\ z = -6 + 2t \end{cases}$$

Plano perpendicular a **r** que pasa por P(2, 1, 3):

$\vec{n} = \vec{v}(1, -2, 2)$

$x - 2 - 2(y - 1) + 2(z - 3) = 0$

$x - 2y + 2z - 6 = 0$

Se sustituyen las coordenadas de la recta en la ecuación del plano:

$-4 + t - 2(7 - 2t) + 2(-6 + 2t) - 6 = 0$

$t = 4$

A(0, –1, 2)

$\overrightarrow{OB} = \overrightarrow{OP} + \overrightarrow{PA} + \overrightarrow{PQ}$

$\overrightarrow{OB} = (2, 1, 3) + (-2, -2, -1) + (-1, 2, -2)$

$\overrightarrow{OB} = (-1, 1, 0)$

B(–1, 1, 0)

La longitud de la diagonal es la distancia entre los puntos P y B

$\overrightarrow{PB}(-3, 0, -2)$

$d(P, C) = \sqrt{(-3)^2 + 0^2 + (-2)^2} = \sqrt{13} =$

$= 3{,}61$ unidades.

59. Se consideran los puntos:

A(1, 1, 1), B(0, –2, 2), C(–1, 0, 2), D(2, –1, –2)

a) Calcula la distancia del punto D al plano determinado por los puntos A, B y C

b) Halla unas ecuaciones cartesianas de la recta que pasa por D y es perpendicular al plano determinado por los puntos A, B y C

Solución:

a) $$d(D, \pi) = \frac{|Ap_1 + Bp_2 + Cp_3 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$$

D(2, –1, –2)

Determinación del plano π:

$A(1, 1, 1) \in \pi$

$\vec{u} = \overrightarrow{AB}(-1, -3, 1) \parallel (1, 3, -1)$

$\vec{v} = \overrightarrow{AC}(-2, -1, 1) \parallel (2, 1, -1)$

$$\begin{vmatrix} x-1 & y-1 & z-1 \\ 1 & 3 & -1 \\ 2 & 1 & -1 \end{vmatrix} = 0$$

$2x + y + 5z - 8 = 0$

$$d(D, \pi) = \frac{|2 \cdot 2 + 1 \cdot (-1) + 5 \cdot (-2) - 8|}{\sqrt{2^2 + 1^2 + 5^2}} = \frac{15}{\sqrt{30}} =$$

$$= \frac{\sqrt{30}}{2} = 2{,}74 \text{ unidades.}$$

b) Vector director de la recta **r** es el vector normal al plano.

$\vec{n}(2, 1, 5)$

D(2, –1, –2)

$$r \equiv \frac{x - 2}{2} = y + 1 = \frac{z + 2}{5}$$

60. Se consideran las rectas:

$$r \equiv x = \frac{y - 1}{-2} = \frac{z - 3}{2}, \quad s \equiv \frac{x - 2}{3} = y = 1 - z$$

a) Calcula la distancia entre **r** y **s**

b) Halla unas ecuaciones cartesianas de la recta perpendicular a **r** y **s,** y que corta a ambas.

Solución:

a) $$d(r, s) = \frac{|[\overrightarrow{AB}, \vec{u}, \vec{v}]|}{|\vec{u} \times \vec{v}|}$$

$A(0, 1, 3) \in r$

$B(2, 0, 1) \in s$

$\overrightarrow{AB}(2, -1, -2)$

$\vec{u}(1, -2, 2)$

$\vec{v}(3, 1, -1)$

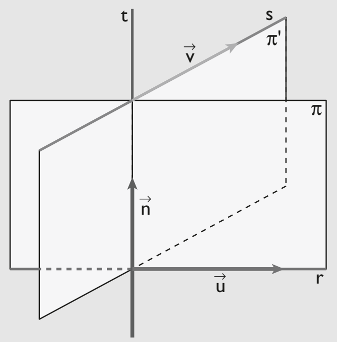
$$[\overrightarrow{AB}, \vec{u}, \vec{v}] = \begin{vmatrix} 2 & -1 & -2 \\ 1 & -2 & 2 \\ 3 & 1 & -1 \end{vmatrix} = -21 \neq 0$$

Las rectas **r** y **s** se cruzan.

$\vec{u} \times \vec{v} = (0, 7, 7)$

$$d(r, s) = \frac{|-21|}{\sqrt{0^2 + 7^2 + 7^2}} = \frac{21}{7\sqrt{2}} = 3\sqrt{2} = 4{,}24 \text{ u}$$

b)



Vector director de la recta **r:** $\vec{u}(1, -2, 2)$; punto $A(0, 1, 3)$

Vector director de la recta **s:** $\vec{v}(3, 1, -1)$; punto $B(2, 0, 1)$

Se halla el vector perpendicular a $\vec{u}$ y $\vec{v}$:

$$\vec{n} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & -2 & 2 \\ 3 & 1 & -1 \end{vmatrix} = 7j + 7k \Rightarrow \vec{n}(0, 7, 7) \parallel (0, 1, 1)$$

El plano π, que contiene a la recta **r** y es perpendicular a **s:**

$$\pi \equiv \begin{vmatrix} x & y-1 & z-3 \\ 1 & -2 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \pi \equiv -4x - y + z - 2 = 0$$

El plano π', que contiene a la recta **s** y es perpendicular a **r:**

$$\pi' \equiv \begin{vmatrix} x-2 & y & z-1 \\ 3 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \pi' \equiv 2x - 3y + 3z - 7 = 0$$

La recta es:

$$t \equiv \begin{cases} 4x + y - z + 2 = 0 \\ 2x - 3y + 3z - 7 = 0 \end{cases}$$

61. Se considera el tetraedro cuyos vértices son los puntos

$A(1, 0, 0), B(1, 1, 1), C(-2, 1, 0)$ y $D(0, 1, 3)$

a) Calcula la distancia de D al plano determinado por los puntos A, B y C

b) Halla la distancia entre las rectas AC y BD

Solución:

a) $$d(D, \pi) = \frac{|Ap_1 + Bp_2 + Cp_3 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$$

$D(0, 1, 3)$

Determinación del plano π:

$A(1, 0, 0) \in \pi$

$\vec{u} = \overrightarrow{AB}(0, 1, 1)$

$\vec{v} = \overrightarrow{AC}(-3, 1, 0)$

$$\begin{vmatrix} x-1 & y & z \\ 0 & 1 & 1 \\ -3 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 0$$

$x + 3y - 3z - 1 = 0$

$$d(D, \pi) = \frac{|1 \cdot 0 + 3 \cdot 1 - 3 \cdot 3 - 1|}{\sqrt{1^2 + 3^2 + (-3)^2}} = \frac{7}{\sqrt{19}} =$$

$= 1{,}61$ unidades.

b) $$d(r, s) = \frac{|[\overrightarrow{AB}, \vec{u}, \vec{v}]|}{|\vec{u} \times \vec{v}|}$$

$A(1, 0, 0) \in r$

$B(1, 1, 1) \in s$

$\overrightarrow{AB}(0, 1, 1)$

$\vec{u} = \overrightarrow{AC}(-3, 1, 0)$

$\vec{v} = \overrightarrow{BD}(-1, 0, 2)$

$$[\overrightarrow{AB}, \vec{u}, \vec{v}] = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ -3 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 2 \end{vmatrix} = 7 \neq 0$$

Las rectas **r** y **s** se cruzan.

$\vec{u} \times \vec{v} = (2, 6, 1)$

$$d(r, s) = \frac{|7|}{\sqrt{2^2 + 6^2 + 1^2}} = \frac{7}{\sqrt{41}} = 1{,}09 \text{ unidades.}$$

62. Sean los puntos $P(8, 13, 8)$ y $Q(-4, -11, -8)$. Se considera el plano π, perpendicular al segmento PQ por su punto medio.

a) Obtén la ecuación del plano π

b) Calcula la proyección ortogonal del punto $O(0, 0, 0)$ sobre π

c) Halla el volumen del tetraedro determinado por los puntos en los que el plano π corta a los ejes coordenados y el origen de coordenadas.

Solución:

a) El punto medio del segmento es $M(2, 1, 0)$

$\vec{n} = \overrightarrow{PQ}(-12, -24, -16) \parallel (3, 6, 4)$

El plano es:

$3(x - 2) + 6(y - 1) + 4z = 0$

$3x + 6y + 4z - 12 = 0$

b) Es el punto O', de corte de la recta perpendicular que pasa por $O(0, 0, 0)$ con el plano obtenido.

Vector director de la recta:

$\vec{v} = \vec{n}(3, 6, 4)$

$$r \equiv \begin{cases} x = 3t \\ y = 6t\,; \; t \in \mathbb{R} \\ z = 4t \end{cases}$$

Se sustituyen las coordenadas de la recta en el plano:

$3 \cdot 3t + 6 \cdot 6t + 4 \cdot 4t - 12 = 0$

$9t + 36t + 16t - 12 = 0$

$61t - 12 = 0$

$t = \frac{12}{61}$

$O'\left(\frac{36}{61}, \frac{72}{61}, \frac{48}{61}\right)$

c) Volumen del tetraedro $= \frac{1}{6}\left|[\vec{OA}, \vec{OB}, \vec{OC}]\right|$

$O(0, 0, 0)$

A es el punto donde corta al eje X, $y = 0, z = 0$

$A(4, 0, 0)$

B es el punto donde corta al eje Y, $x = 0, z = 0$

$B(0, 2, 0)$

C es el punto donde corta el eje Z, $x = 0, y = 0$

$C(0, 0, 3)$

$$\left|[\vec{OA}, \vec{OB}, \vec{OC}]\right| = \begin{vmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{vmatrix} = 24$$

$\left|[\vec{OA}, \vec{OB}, \vec{OC}]\right| = 24$

Volumen del tetraedro $= \frac{1}{6} \cdot 24 = 4\ u^3$

63. Sean la recta $r \equiv \frac{x-1}{m} = \frac{y}{4} = \frac{z-1}{2}$

y el plano $\pi \equiv 2x - y + kz = 0$

a) Calcula **m** y **k** para que la recta sea perpendicular al plano.

b) Calcula **m** y **k** para que la recta esté contenida en el plano.

Solución:

a) Para que la recta sea perpendicular al plano, las coordenadas del vector director de la recta tienen que ser proporcionales a las del vector normal al plano.

$\vec{v}(m, 4, 2)$

$\vec{n}(2, -1, k)$

$\frac{m}{2} = \frac{4}{-1} = \frac{2}{k}$

$m = -8, k = -\frac{1}{2}$

b) Para que la recta esté contenida en el plano:

• $A(1, 0, 1) \in$ **r** tiene que estar en el plano

$2 \cdot 1 - 0 + k \cdot 1 = 0$

$k = -2$

La ecuación del plano es:

$\pi \equiv 2x - y - 2z = 0$

• El vector director $\vec{v}$ de la recta **r** tiene que ser perpendicular al vector normal $\vec{n}$ al plano π:

$\vec{v}(m, 4, 2)$

$\vec{n}(2, -1, -2)$

Por tanto, su producto escalar tiene que ser cero:

$\vec{v} \cdot \vec{n} = 0$

$2m - 4 - 4 = 0$

$m = 4$

64. Resuelve las siguientes cuestiones:

a) Halla el lugar geométrico de los puntos que equidistan de los planos de ecuaciones:

$\pi \equiv 3x - 4y + 5 = 0$

$\pi' \equiv 2x - 2y + z + 9 = 0$

b) ¿Qué puntos del eje Y equidistan de ambos planos, π y π'?

Solución:

a) Como los planos no son paralelos, las soluciones son planos bisectores:

$$\frac{|3x - 4y + 5|}{\sqrt{3^2 + 4^2 + 0^2}} = \frac{|2x - 2y + z + 9|}{\sqrt{2^2 + 2^2 + 1^2}}$$

$$\frac{|3x - 4y + 5|}{5} = \frac{|2x - 2y + z + 9|}{3}$$

$3|3x - 4y + 5| = 5|2x - 2y + z + 9|$

De esta igualdad de valor absoluto se derivan dos igualdades:

$3(3x - 4y + 5) = 5(2x - 2y + z + 9)$

$\sigma \equiv x + 2y + 5z + 30 = 0$

$3(3x - 4y + 5) = -5(2x - 2y + z + 9)$

$\sigma' \equiv 19x - 22y + 5z + 60 = 0$

b) Sea el punto $P(0, b, 0)$ que pertenece al eje Y:

$d(P, \pi) = d(P, \pi')$

$$\frac{|3 \cdot 0 - 4 \cdot b + 5|}{\sqrt{3^2 + 4^2 + 0^2}} = \frac{|2 \cdot 0 - 2 \cdot b + 1 \cdot 0 + 9|}{\sqrt{2^2 + 2^2 + 1^2}}$$

$$\frac{|-4b + 5|}{5} = \frac{|-2b + 9|}{3}$$

$3|-4b + 5| = 5|-2b + 9|$

De esta igualdad de valor absoluto se derivan dos igualdades:

$3(-4b + 5) = 5(-2b + 9)$

$b = -15$

$P(0, -15, 0)$

$3(-4b + 5) = -5(-2b + 9)$

$b = \frac{30}{11}$

$P\left(0, \frac{30}{11}, 0\right)$

65. Sean la recta **r** y el plano π, dados por:

$$r \equiv \begin{cases} x = -1 - \lambda \\ y = \quad -\lambda \,;\ \lambda \in \mathbb{R} \\ z = \quad 2\lambda \end{cases} \qquad \pi \equiv 2x - 3y + z + 1 = 0$$

a) Calcula el seno del ángulo que forman la recta **r** y el plano π

b) Halla la ecuación de la recta proyección ortogonal de **r** sobre π

Solución:

a) $\text{sen}\ \alpha = \dfrac{|\vec{v} \cdot \vec{n}|}{|\vec{v}| \cdot |\vec{n}|}$

$\vec{v}(-1, -1, 2) \parallel (1, 1, -2)$

$\vec{n}(2, -3, 1)$

$\vec{v} \cdot \vec{n} = -2 + 3 + 2 = 3 \neq 0$

La recta y el plano se cortan.

$|\vec{v} \cdot \vec{n}| = 3$

$|\vec{v}| = \sqrt{6}$

$|\vec{n}| = \sqrt{14}$

$\text{sen}\ \alpha = \dfrac{3}{\sqrt{6} \cdot \sqrt{14}} = \dfrac{3}{\sqrt{84}}$

b) La recta de proyección ortogonal es la que pasa por el punto de intersección de la recta con el plano y la proyección de cualquier punto de la recta sobre el plano.

- Para hallar el punto P de intersección de la recta con el plano, se sustituyen las variables en la ecuación del plano:

$2(-1 - \lambda) - 3(-\lambda) + 2\lambda + 1 = 0$

$\lambda = \dfrac{1}{3}$

$P\left(-\dfrac{4}{3}, -\dfrac{1}{3}, \dfrac{2}{3}\right)$

- Sea $A(-1, 0, 0) \in r$. Vamos a calcular la recta perpendicular al plano que pasa por este punto A:

$\vec{u} = \vec{n}(2, -3, 1)$

$$s \equiv \begin{cases} x = -1 + 2t \\ y = \quad -3t \,;\ t \in \mathbb{R} \\ z = \quad t \end{cases}$$

$2(-1 + 2t) - 3(-3t) + t + 1 = 0$

$t = \dfrac{1}{14}$

$A'\left(-\dfrac{6}{7}, -\dfrac{3}{14}, \dfrac{1}{14}\right)$

La recta pedida pasa por el punto:

$$P\left(-\frac{4}{3}, -\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right)$$

y tiene como vector director:

$\overrightarrow{PA'}\left(\dfrac{10}{21}, \dfrac{5}{42}, -\dfrac{25}{42}\right) \parallel (4, 1, -5)$

$\dfrac{x + 4/3}{4} = y + \dfrac{1}{3} = \dfrac{z - 2/3}{-5}$

66. Considera los puntos

$A(1, 0, 3), B(3, -1, 0), C(0, -1, 2)$ y $D(a, 4, -1)$

Halla **a** sabiendo que la recta que pasa por A y B es perpendicular a la recta que pasa por C y D

Solución:

Los vectores $\overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{CD}$ tienen que ser perpendiculares:

$\overrightarrow{AB}(2, -1, -3)$

$\overrightarrow{CD}(a, 5, -3)$

$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CD} = 0$

$(2, -1, -3) \cdot (a, 5, -3) = 0$

$2a + 4 = 0$

$a = -2$

67. Halla la ecuación del plano que pasa por el punto $A(1, 0, -1)$, es perpendicular al plano $x - y + 2z + 1 = 0$ y es paralelo a la recta:

$$\begin{cases} x - 2y = 0 \\ z = 0 \end{cases}$$

Solución:

- Pasa por el punto $A(1, 0, -1)$
- Si es perpendicular al plano:

$x - y + 2z + 1 = 0$

Un vector director es:

$\vec{u} = \vec{n}(1, -1, 2)$

- Si es paralelo a la recta:

$$\begin{cases} x - 2y = 0 \\ z = 0 \end{cases}$$

El otro vector director es:

$\vec{v}(-2, -1, 0) \parallel (2, 1, 0)$

- Ecuación del plano:

$$\begin{vmatrix} x - 1 & y & z + 1 \\ 1 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 0$$

$2x - 4y - 3z - 5 = 0$

68. Sea **r** la recta de ecuación:

$$r \equiv \begin{cases} 3x + 2y \quad = 0 \\ 3x \quad + z = 0 \end{cases}$$

a) Halla los puntos de **r** cuya distancia al origen es de 7 unidades.

b) Halla la ecuación del plano perpendicular a **r** que pasa por el punto P(1, 2, – 1)

Solución:

a) Pasamos la recta a paramétricas:

O(0, 0, 0) $\in$ r

$\vec{v}(2, -3, -6)$

$$r \equiv \begin{cases} x = 2t \\ y = -3t \,;\ t \in \mathbb{R} \\ z = -6t \end{cases}$$

Un punto genérico de la recta es:

P(2t, –3t, –6t)

d(O, P) = 7

$\sqrt{(2t)^2 + (-3t)^2 + (-6t)^2} = 7$

$(2t)^2 + (-3t)^2 + (-6t)^2 = 7^2$

t = 1, t = – 1

Se obtienen dos puntos:

A(2, –3, –6)

B(–2, 3, 6)

b) El vector normal al plano es el vector director de la recta.

$\vec{n} = \vec{v}(2, -3, -6)$

P(1, 2, – 1)

2(x – 1) – 3(y – 2) – 6(z + 1) = 0

2x – 3y – 6z – 2 = 0

69. Considera el plano 2x + y + 2z – 4 = 0

a) Halla el área del triángulo cuyos vértices son los puntos de corte del plano con los ejes coordenados.

b) Calcula la distancia del origen al plano dado.

Solución:

a) A es el punto donde corta al eje X, y = 0, z = 0

A(2, 0, 0)

B es el punto donde corta al eje Y, x = 0, z = 0

B(0, 4, 0)

C es el punto donde corta al eje Z, x = 0, y = 0

C(0, 0, 2)

Área del triángulo $= \frac{1}{2}|\vec{AB} \times \vec{AC}|$

$\vec{AB}(-2, 4, 0)$

$\vec{AC}(-2, 0, 2)$

$\vec{AB} \times \vec{AC} = (8, 4, 8)$

$|\vec{AB} \times \vec{AC}| = \sqrt{8^2 + 4^2 + 8^2} = 12$

Área del triángulo $= \frac{1}{2}|12| = 6$ unidades cuadradas.

b) $d(P, \pi) = \dfrac{|Ap_1 + Bp_2 + Cp_3 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$

P(0, 0, 0)

$d(P, \pi) = \dfrac{|2 \cdot 0 + 1 \cdot 0 + 2 \cdot 0 - 4|}{\sqrt{2^2 + 1^2 + 2^2}} = \dfrac{|-4|}{3} =$

$= \dfrac{4}{3} = 1{,}33$ unidades.

70. Halla el punto del plano de ecuación x – z = 3 que está más cerca del punto P(3, 1, 4), así como la distancia entre el punto P y el plano dado.

Solución:

• El punto más cercano es la intersección del plano con la recta perpendicular que pasa por el punto P(3, 1, 4)

El vector director de la recta perpendicular es el vector normal al plano:

$$\vec{v} = \vec{n}(1, 0, -1) \Rightarrow r \equiv \begin{cases} x = 3 + t \\ y = 1 \quad ;\ t \in \mathbb{R} \\ z = 4 - t \end{cases}$$

Se sustituyen las variables en la ecuación del plano:

3 + t – (4 – t) = 3 ⇒ t = 2

P'(5, 1, 2)

• $\vec{PP'}(2, 0, -2)$

$|\vec{PP'}| = 2\sqrt{2}$ unidades.

71. Dada la recta:

$$r \equiv \begin{cases} x - y - 5 = 0 \\ x - 3y - z - 7 = 0 \end{cases}$$

a) calcula un punto R de la recta **r** que equidiste de los puntos P(1, 0, – 1) y Q(2, 1, 1)

b) calcula el área del triángulo determinado por los puntos P, Q y R

Solución:

a) Pasamos la recta a paramétricas y tomamos un punto R genérico:

A(5, 0, –2)

$\vec{v}(1, 1, -2)$

$$r \equiv \begin{cases} x = 5 + t \\ y = t \,;\ t \in \mathbb{R} \\ z = -2 - 2t \end{cases}$$

R(5 + t, t, –2 – 2t)

d(P, R) = d(Q, R)

$\vec{PR}(4 + t, t, -1 - 2t)$

$\vec{QR}(3 + t, t - 1, -3 - 2t)$

$$\sqrt{(4+t)^2+t^2+(-1-2t)^2} =$$
$$= \sqrt{(3+t)^2+(t-1)^2+(-3-2t)^2}$$
$$(4+t)^2+t^2+(-1-2t)^2 =$$
$$= (3+t)^2+(t-1)^2+(-3-2t)^2$$
$$t = -\frac{1}{2}$$
$$R\left(\frac{9}{2}, -\frac{1}{2}, -1\right)$$

b) Área del triángulo $= \frac{1}{2}|\overrightarrow{PR} \times \overrightarrow{QR}|$

$$\overrightarrow{PR}\left(\frac{7}{2}, -\frac{1}{2}, 0\right)$$
$$\overrightarrow{QR}\left(\frac{5}{2}, -\frac{3}{2}, -2\right)$$
$$\overrightarrow{PR} \times \overrightarrow{QR} = (1, 7, -4)$$
$$|\overrightarrow{PR} \times \overrightarrow{QR}| = \sqrt{1^2+7^2+(-4)^2} = \sqrt{66} = 8{,}12 \text{ u}$$

Área del triángulo $= \frac{1}{2}|8{,}12| = 4{,}06 \text{ u}^2$

72. Consideremos el punto P(1, 0, – 1) y la recta **r,** dada por

$$r \equiv \begin{cases} x + y = 0 \\ z - 1 = 0 \end{cases}$$

a) Halla el punto de la recta **r** más cercano a P

b) Calcula la distancia entre P y **r**

c) Determina el plano que pasa por el punto P y contiene a la recta **r**

Solución:

a) El punto más cercano es la intersección de la recta con el plano perpendicular que pasa por el punto P(1, 0, – 1)

El vector normal al plano perpendicular es el vector director de la recta:

$\vec{n} = \vec{v}(1, -1, 0)$

$x - 1 - y = 0$

$x - y - 1 = 0$

Pasamos la recta a forma paramétrica:

A(0, 0, 1)

$\vec{v}(1, -1, 0)$

$$r \equiv \begin{cases} x = t \\ y = -t\,;\ t \in \mathbb{R} \\ z = 1 \end{cases}$$

Sustituyendo estas variables en la ecuación del plano, se tiene:

$t + t - 1 = 0$

$t = \frac{1}{2}$

El punto es: $B\left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, 1\right)$

b) d(P, r) = d(P, B)

$$\overrightarrow{PB}\left(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, 2\right)$$
$$d(P, B) = \sqrt{(-1/2)^2+(-1/2)^2+2^2} = \sqrt{9/2} =$$
$$= \frac{3}{\sqrt{2}} = \frac{3\sqrt{2}}{2} = 2{,}12 \text{ unidades}$$

c) El plano pedido pasa por los puntos P(1, 0, – 1), A(0, 0, 1) y otro punto cualquiera de la recta **r**

Por ejemplo, para t = 1 se obtiene:

C(1, – 1, 1)

Los vectores directores del plano son:

$\vec{u} = \overrightarrow{AP}(1, 0, -2)$

$\vec{v} = \overrightarrow{AC}(1, -1, 0)$

$n(-2, -2, -1) \parallel (2, 2, 1)$

Tomando el punto A(0, 0, 1)

$2x + 2y + z - 1 = 0$

73. Calcula todos los planos perpendiculares a la recta **r,** de ecuaciones paramétricas:

$$r \equiv \begin{cases} x = -10 + 5t \\ y = 100 \qquad ;\ t \in \mathbb{R} \\ z = 250 - 12t \end{cases}$$

que se encuentra a 2 unidades de distancia del punto P(2, –7, 1)

Solución:

El vector director $\vec{v}$ de la recta **r** será el vector normal $\vec{n}$ a los planos π perpendiculares:

$$\vec{n} = \vec{v}(5, 0, -12)$$

Las ecuaciones de dichos planos serán de la forma:

$$\pi \equiv 5x - 12z + k = 0$$

Se tiene que verificar:

$d(P, \pi) = 2$

$$d(P, \pi) = \frac{|Ap_1 + Bp_2 + Cp_3 + D|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}$$

P(2, –7, 1)

$$d(P, \pi) = \frac{|5 \cdot 2 + 0 \cdot (-7) - 12 \cdot 1 + k|}{\sqrt{5^2+0^2+(-12)^2}} = \frac{|-2+k|}{13}$$

$$\frac{|-2+k|}{13} = 2$$

$|-2 + k| = 26$

De la igualdad de valor absoluto se deducen dos igualdades:

$-2 + k = 26$
$k = 28$
$-2 + k = -26$
$k = -24$
Luego se obtienen dos planos de ecuaciones:
$\pi_1 \equiv 5x - 12z + 28 = 0$
$\pi_2 \equiv 5x - 12z - 24 = 0$

74. Dados los puntos

$$A(1, 1, 1), B(-1, 3, 1), C(1, 0, 0) \text{ y } D(0, 2, 0)$$

halla el punto P perteneciente a la recta determinada por A y B tal que el triángulo CDP sea rectángulo con hipotenusa CP

Solución:

Recta determinada por A y B:

$$\vec{v} = \overrightarrow{AB}(-2, 2, 0) \parallel (1, -1, 0)$$

$$r \equiv \begin{cases} x = 1 + t \\ y = 1 - t\ ;\ t \in \mathbb{R} \\ z = 1 \end{cases}$$

Un punto genérico de la recta **r** es:

$$P(1 + t, 1 - t, 1)$$

Si la hipotenusa es CP, entonces los otros dos lados son perpendiculares:

$$\overrightarrow{CD} \perp \overrightarrow{DP}$$

Por lo tanto:
$\overrightarrow{CD} \cdot \overrightarrow{DP} = 0$
$\overrightarrow{CD}(-1, 2, 0)$
$\overrightarrow{DP}(1 + t, -1 - t, 1)$
$(-1, 2, 0)\ (1 + t, -1 - t, 1) = 0$
$-3t - 3 = 0$
$t = -1$
El punto P es: $P(0, 2, 1)$

75. De los planos paralelos al plano $x + y + z = 8$, halla los que determinan con los ejes de coordenadas un triángulo de área $8\sqrt{3}$

Solución:

Los planos paralelos tienen de ecuación:

$$x + y + z = m$$

Este plano corta a los ejes en los puntos:

$$A(m, 0, 0),\ B(0, m, 0),\ C(0, 0, m)$$

Área del triángulo $= \dfrac{1}{2}|\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}|$
$\overrightarrow{AB}(-m, m, 0)$
$\overrightarrow{AC}(-m, 0, m)$

$$\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ -m & m & 0 \\ -m & 0 & m \end{vmatrix} = m^2 i + m^2 j + m^2 k$$

$$|\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}| = \sqrt{m^4 + m^4 + m^4} = m^2\sqrt{3}$$

$$\text{Área del triángulo} = \frac{1}{2}|m^2\sqrt{3}| = \frac{\sqrt{3}}{2}m^2$$

Por lo tanto:
$\dfrac{\sqrt{3}}{2}m^2 = 8\sqrt{3}$
$m^2 = 16$
$m = \pm 4$
Para $m = 4$, se obtiene el plano:

$$x + y + z = 4$$

Para $m = -4$, se obtiene el plano:

$$x + y + z = -4$$

76. La recta:

$$r \equiv \begin{cases} x = -2 + 3t \\ y = \ \ 4 - 2t\ ;\ t \in \mathbb{R} \\ z = -6 + 5t \end{cases}$$

corta al plano $x - y - 2z = 1$ en el punto A, y al plano $x + y - z = 0$ en el punto B

Si O es el origen de coordenadas:

a) halla el ángulo que forman los vectores $\overrightarrow{OA}$ y $\overrightarrow{OB}$
b) halla el área del triángulo OAB

Solución:

Para hallar el punto A, se sustituyen las variables de la recta en la ecuación del plano:
$-2 + 3t - (4 - 2t) - 2(-6 + 5t) = 1$
$t = 1$
$A(1, 2, -1)$
Para hallar el punto B, se sustituyen las variables de la recta en la ecuación del plano:
$-2 + 3t + 4 - 2t - (-6 + 5t) = 0$
$t = 2$
$B(4, 0, 4)$

a) $\overrightarrow{OA}(1, 2, -1)$
$\overrightarrow{OB}(4, 0, 4)$
Se observa que su producto escalar es cero:

$$(1, 2, -1) \cdot (4, 0, 4) = 0$$

Por tanto, son perpendiculares:

$$\alpha = 90°$$

b) Área del triángulo OAB:

Como $\vec{OA} \perp \vec{OB}$

Área del triángulo $= \frac{1}{2}|\vec{OA}| \cdot |\vec{OB}|$

$|\vec{OA}| = \sqrt{6}$

$|\vec{OB}| = 4\sqrt{2}$

Área del triángulo $= \frac{1}{2}\sqrt{6} \cdot 4\sqrt{2} = 4\sqrt{3} = 6{,}93$ u^2

77. Considera los puntos A(–5, 2, 4), B(–3, 2, 0) y la recta

$$r \equiv \frac{x-1}{-3} = y = \frac{z}{2}$$

a) Calcula la recta que corta perpendicularmente a **r** y pasa por B

b) Se considera el rectángulo que tiene dos vértices en A y B, y uno de los lados que pasa por A está contenido en la recta **r.** Calcula su área.

Solución:

a) Hay que hallar el plano perpendicular a la recta **r** que pasa por B y luego hallar el punto de intersección P de dicho plano con la recta dada. La recta pedida es la que pasa por B y P:

$$\vec{n} = \vec{v}(-3, 1, 2)$$

El plano es:

$-3(x + 3) + y - 2 + 2z = 0$

$3x - y - 2z + 11 = 0$

Pasamos la recta a forma paramétrica:

$$r \equiv \begin{cases} x = 1 - 3t \\ y = \quad t\ ;\ t \in \mathbb{R} \\ z = \quad 2t \end{cases}$$

Se sustituyen las variables en la ecuación del plano:

$3(1 - 3t) - t - 2 \cdot 2t + 11 = 0$

$t = 1$

P(–2, 1, 2)

Ecuación de la recta que pasa por B y P

Punto: B(–3, 2, 0)

$\vec{u} = \vec{BP}(1, -1, 2)$

$x + 3 = \frac{y-2}{-1} = \frac{z}{2}$

b) El punto A(–5, 2, 4) $\in$ **r**

El área del triángulo es:

Área $= |\vec{AP}| \cdot |\vec{BP}|$

$\vec{AP}(3, -1, -2)$

$|\vec{AP}| = \sqrt{14}$

$\vec{BP}(1, 1, -2)$

$|\vec{BP}| = \sqrt{6}$

Área del triángulo $= \sqrt{14} \cdot \sqrt{6} = 2\sqrt{21} = 9{,}17$ u^2

78. Dada la recta:

$$r \equiv \begin{cases} 3x - y + z = 0 \\ x - y \quad\quad = 1 \end{cases}$$

a) determina la ecuación de la recta **s** que pasa por el punto P(2, –1, 0) y corta perpendicularmente a **r**

b) obtén, explicando el procedimiento utilizado, una recta paralela a **s** que se cruce con **r**

Solución:

a) Hay que hallar el plano perpendicular a la recta **r** y luego hallar el punto de intersección de dicho plano con la recta.

La recta pedida es la que pasa por P y el punto de intersección.

El vector director de la recta es el vector normal al plano:

$$\vec{n} = \vec{v}(1, 1, -2)$$

El plano perpendicular que pasa por P(2, –1, 0) es:

$x - 2 + y + 1 - 2z = 0$

$\pi \equiv x + y - 2z - 1 = 0$

Pasamos la recta a forma paramétrica:

A(1, 0, –3) $\in$ r

$$r \equiv \begin{cases} x = \ \ 1 + t \\ y = \quad\quad t \\ z = -3 - 2t \end{cases}$$

Se sustituyen las variables en la ecuación del plano:

$1 + t + t - 2(-3 - 2t) - 1 = 0$

$t = -\frac{3}{4}$

$Q\left(\frac{1}{4}, -\frac{3}{4}, -\frac{3}{2}\right)$

Ecuación de la recta que pasa por P y Q

P(2, –1, 0)

$\vec{PQ}\left(-\frac{7}{4}, \frac{1}{4}, -\frac{3}{2}\right) \parallel (7, -1, 6)$

$s \equiv \frac{x-2}{7} = \frac{y+1}{-1} = \frac{z}{6}$

b) Cualquier recta paralela a **s** que esté en el plano perpendicular que hemos calculado y que no pase por el punto Q; por ejemplo:

R(1, 0, 0) $\in \pi$

$t \equiv \frac{x-1}{7} = \frac{y}{-1} = \frac{z}{6}$

79. Dado el plano $\pi_1 \equiv 3x + my + z = 6$

a) calcula **m** para que la recta **r** que pasa por el punto P(1, 1, 2) y es perpendicular a este plano π_1 sea paralela al plano: $\pi_2 \equiv x - y = 3$

b) calcula la distancia de la recta **r** al origen.

Solución:

a) Recta perpendicular que pasa por P

El vector normal al plano es el vector director de la recta:

$$\vec{v} = \vec{n}(3, m, 1)$$

$r \equiv \dfrac{x-1}{3} = \dfrac{y-1}{m} = z-2$

Esta recta es paralela al plano π_2 si el vector de la recta es perpendicular al vector normal al plano; por tanto, el producto escalar tiene que ser cero.

$(3, m, 1) \cdot (1, -1, 0) = 0$

$3 - m = 0$

$m = 3$

Ecuación de la recta:

$r \equiv \dfrac{x-1}{3} = \dfrac{y-1}{3} = z-2$

b) $d(P, r) = \dfrac{|\overrightarrow{AP} \times \vec{v}|}{|\vec{v}|}$

$O(0, 0, 0)$

$P(1, 1, 2) \in r$

$\overrightarrow{OP}(1, 1, 2)$

$\vec{v}(3, 3, 1)$

$\overrightarrow{OP} \times \vec{v} = (-5, 5, 0)$

$|\overrightarrow{OP} \times \vec{v}| = 5\sqrt{2}$

$|\vec{v}| = \sqrt{19}$

$d(P, r) = \dfrac{5\sqrt{2}}{\sqrt{19}} = 1{,}62$ unidades.

80. Dado el punto P(1, 1, 1) y la recta:

$$r \equiv \begin{cases} x = 1 + t \\ y = 1 - t \ ; \ t \in \mathbb{R} \\ z = 3 + 2t \end{cases}$$

a) calcula la distancia del punto P(1, 1, 1) a la recta **r**

b) comprueba si los puntos A(1, 1, 3) y B(0, 2, 1) pertenecen a la recta **r,** y determina el área del triángulo PAB

Solución:

a) $d(P, r) = \dfrac{|\overrightarrow{AP} \times \vec{v}|}{|\vec{v}|}$

$P(1, 1, 1)$

$A(1, 1, 3) \in r$

$\overrightarrow{AP}(0, 0, -2)$

$\vec{v}(1, -1, 2)$

$\overrightarrow{AP} \times \vec{v} = (-2, -2, 0)$

$|\overrightarrow{AP} \times \vec{v}| = 2\sqrt{2}$

$|\vec{v}| = \sqrt{6}$

$d(P, r) = \dfrac{2\sqrt{2}}{\sqrt{6}} = \dfrac{2\sqrt{3}}{3} = 1{,}15$ unidades.

b) En las ecuaciones de la recta para t = 0, se obtiene el punto A

En las ecuaciones de la recta para t = –1, se obtiene el punto B

Área del triángulo $= \dfrac{1}{2}|\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AP}|$

$\overrightarrow{AB}(-1, 1, -2)$

$\overrightarrow{AP}(0, 0, -2)$

$\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AP} = (-2, -2, 0)$

$|\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AP}| = 2\sqrt{2}$

Área del triángulo $= \dfrac{1}{2}|2\sqrt{2}| = \sqrt{2} = 1{,}41\ u^2$

81. Resuelve las siguientes cuestiones:

a) Determina la distancia del punto P(12, –1, 1) a la recta **r** que pasa por el punto A(1, 1, 1) y que tiene como vector de dirección el vector $\vec{v}(3, 4, 0)$

b) Encuentra qué punto (o puntos) de la recta **r** determina (o determinan) junto con A y P un triángulo de área igual a 50 unidades cuadradas.

Solución:

a) $d(P, r) = \dfrac{|\overrightarrow{AP} \times \vec{v}|}{|\vec{v}|}$

$P(12, -1, 1)$

$A(1, 1, 1) \in r$

$\overrightarrow{AP}(11, -2, 0)$

$\vec{v}(3, 4, 0)$

$\overrightarrow{AP} \times \vec{v} = (0, 0, 50)$

$|\overrightarrow{AP} \times \vec{v}| = 50$

$|\vec{v}| = 5$

$d(P, r) = \dfrac{50}{5} = 10$ unidades.

b) Área del triángulo $= \dfrac{1}{2}\left|\overrightarrow{AP} \times \overrightarrow{AQ}\right|$

Las ecuaciones paramétricas de la recta **r** son:

$$r \equiv \begin{cases} x = 1 + 3t \\ y = 1 + 4t \\ z = 1 \end{cases}$$

$Q(1 + 3t, 1 + 4t, 1)$

Área del triángulo APQ = 50

$\dfrac{1}{2}\left|\overrightarrow{AP} \times \overrightarrow{AQ}\right| = 50$

$\overrightarrow{AP}(11, -2, 0)$

$\overrightarrow{AQ}(3t, 4t, 0)$

$\overrightarrow{AP} \times \overrightarrow{AQ} = (0, 0, 50t)$

$\frac{1}{2}|50t| = 50$

$|t| = 2 \Rightarrow t \pm 2$

Para $t = 2 \Rightarrow Q(7, 9, 1)$

Para $t = -2 \Rightarrow Q'(-5, -7, 1)$

82. Se considera un paralelepípedo de bases ABCD y EFGH, siendo A(1, 1, 1) B(2, 1, 1), C(2, 4, 1) y D(1, 2, 7)

a) Halla el área de una de las bases.

b) Calcula el volumen del paralelepípedo.

c) Halla la distancia entre las bases.

Solución:

a) Área del paralelogramo = $|\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}|$

$\overrightarrow{AB}(1, 0, 0)$

$\overrightarrow{AC}(1, 3, 0)$

$$\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 0 \end{vmatrix} = 3k$$

Área del paralelogramo ABCD = 3 u^2

b) Volumen del paralelepípedo = $\left|[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD}]\right|$

$\overrightarrow{AB}(1, 0, 0)$

$\overrightarrow{AC}(1, 3, 0)$

$\overrightarrow{AD}(0, 1, 6)$

$$\left|[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD}]\right| = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 6 \end{vmatrix} = 18$$

$\left|[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD}]\right| = 18$

Volumen del paralelepípedo = 18 u^3

c) La distancia entre las bases es la longitud de la altura.

Volumen del paralelepípedo = $A_B \cdot H$

$$18 = 3H \Rightarrow H = 6 \text{ unidades.}$$

Para profundizar

83. Sea $\mathbf{r_1}$ la recta que pasa por los puntos A(0, 0, 0) y B(80, 10, 0) y sea $\mathbf{r_2}$ la recta que pasa por C(0, 0, 10) y D(m, 10, 10).

a) Obtén la distancia que hay entre $\mathbf{r_1}$ y $\mathbf{r_2}$

b) Justifica geométricamente que la distancia entre $\mathbf{r_1}$ y $\mathbf{r_2}$ es independiente del valor de **m**

Solución:

a) $d(r, s) = \dfrac{\left|[\overrightarrow{AC}, \vec{u}, \vec{v}]\right|}{|\vec{u} \times \vec{v}|}$

$A(0, 0, 0) \in r$

$C(0, 0, 10) \in s$

$\overrightarrow{AC}(0, 0, 10)$

$\vec{u} = \overrightarrow{AB}(80, 10, 0)$

$\vec{v} = \overrightarrow{CD}(m, 10, 0)$

$$[\overrightarrow{AC}, \vec{u}, \vec{v}] = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 10 \\ 80 & 10 & 0 \\ m & 10 & 0 \end{vmatrix} = 8\,000 - 100m$$

$$\vec{u} \times \vec{v} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 80 & 10 & 0 \\ m & 10 & 0 \end{vmatrix} = (800 - 10m)k$$

$$d(r, s) = \frac{|8\,000 - 100m|}{|800 - 10m|} = 10 \text{ unidades.}$$

b) La recta r_1 está contenida en el plano z = 0 y la recta r_2 está contenida en el plano z = 10

La distancia entre ellas es la distancia que hay entre ambos planos, es decir, de 10 unidades.

84. Dados el plano $\pi \equiv x + y + z = 1$, la recta

$$r \equiv (x, y, z) = (1, 0, 0) + \lambda(0, 1, 1);\ \lambda \in \mathbb{R}$$

y el punto P(1, 1, 0):

a) halla la ecuación de una recta **s** que sea perpendicular a π y pase por P

b) halla el punto P', simétrico de P respecto de **r**

c) halla el punto P'', simétrico de P respecto de π

Solución:

a) El vector director de la recta **s** es el vector normal al plano π

$\vec{v} = \vec{n}(1, 1, 1)$

$s \equiv x - 1 = y - 1 = z$

b) Tenemos que hallar, en primer lugar, el punto de intersección de la recta **r** con el plano perpendicular que pasa por P, y ése será el punto medio entre P y P'

El plano perpendicular tiene como vector normal el vector director de la recta **r**

$u = \vec{n}'(0, 1, 1)$

$y - 1 + z = 0$

$y + z = 1$

Un punto genérico de la recta **r** es:

$$M(1, \lambda, \lambda)$$

Se sustituyen sus coordenadas en la ecuación del plano:

$\lambda + \lambda - 1 = 0$

$\lambda = \frac{1}{2}$

$M\left(1, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$

Sea P'(x, y, z)

$\frac{x+1}{2} = 1 \Rightarrow x + 1 = 2 \Rightarrow x = 1$

$\frac{y+1}{2} = \frac{1}{2} \Rightarrow y + 1 = 1 \Rightarrow y = 0$

$\frac{z}{2} = \frac{1}{2} \Rightarrow z = 1$

P'(1, 0, 1)

$P''\left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, -\frac{2}{3}\right)$

85. Resuelve las siguientes cuestiones:

a) Halla un punto A que esté sobre la recta:

$$\begin{cases} y = 1 + x \\ z = 1 + 2x \end{cases}; \ x \in \mathbb{R}$$

que diste del punto B(1, 0, 1) el doble que del punto C(0, 0, 0) y que esté por debajo del plano XY

b) Halla la proyección ortogonal de C sobre la recta BP, donde P es el punto en el que la recta dada en el apartado anterior corta al plano YZ

Solución:

a) Un punto genérico de la recta es: A(t, 1 + t, 1 + 2t)

B(1, 0, 1)

$\overrightarrow{BA}(t-1, t+1, 2t)$

$d(B, A) = \sqrt{(t-1)^2 + (t+1)^2 + (2t)^2}$

C(0, 0, 0)

$\overrightarrow{CA}(t, 1+t, 1+2t)$

$d(C, A) = \sqrt{t^2 + (t+1)^2 + (1+2t)^2}$

d(B, A) = 2d(C, A)

$\sqrt{(t-1)^2 + (t+1)^2 + (2t)^2} =$

$= 2\sqrt{t^2 + (t+1)^2 + (1+2t)^2}$

$t = -1, t = -\frac{1}{3}$

Para $t = -1 \Rightarrow A(-1, 0, -1)$

Para $t = -\frac{1}{3} \Rightarrow A'\left(-\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{1}{3}\right)$

Como se pide que esté por debajo del plano XY, la z tiene que ser negativa.

Es el punto: A(–1, 0, –1)

b) La proyección ortogonal es el punto de corte de la recta BP con el plano perpendicular que pasa por C

Se halla el punto P en primer lugar.

En el plano YZ, x = 0

P(0, 1, 1)

Recta BP:

$\vec{u} = \overrightarrow{BP}(-1, 1, 0) \parallel (1, -1, 0)$

$$\text{Recta BP} \equiv \begin{cases} x = t \\ y = 1 - t \\ z = 1 \end{cases}$$

Plano que pasa por C y es perpendicular a la recta BP

$$x - y = 0$$

Intersección de recta y plano:

$t - (1 - t) = 0$

$t = \frac{1}{2}$

$C'\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 1\right)$

Paso a paso

86. Halla d(P, r), siendo: P(2, – 3, 5)

$$r \equiv \frac{x-1}{4} = \frac{y+6}{-2} = \frac{z}{3}$$

Representa el punto **P** y la recta **r**

Solución:
Resuelto en el libro del alumnado.

87. Halla el valor de **k** para que los siguientes planos sean perpendiculares y represéntalos:

$$\pi \equiv x - 4y + 1 = 0$$
$$\pi' \equiv 2x + ky - 3z - 8 = 0$$

Solución:
Resuelto en el libro del alumnado.

88. Halla la ecuación de la recta que corta perpendicularmente a las siguientes rectas y representa las tres rectas:

$$r \equiv x - 1 = y - 3 = \frac{z+1}{-1}$$
$$s \equiv x - 2 = \frac{y-4}{4} = \frac{z-4}{2}$$

Solución:
Resuelto en el libro del alumnado.

89. Halla el punto simétrico Q del punto P(2, –3, –5) respecto del punto M(3, 1, –1)

Representa los puntos P, M, Q y el segmento PQ

Solución:
Resuelto en el libro del alumnado.

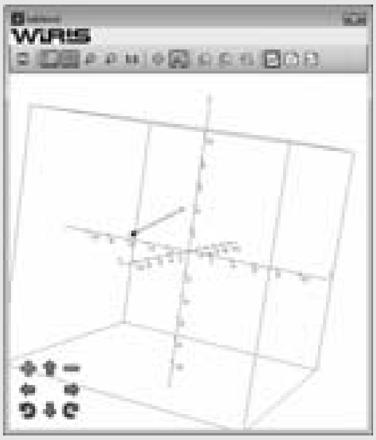
90. **Internet.** Abre: **www.editorial-bruno.es** y elige **Matemáticas, curso** y **tema.**

Practica

91. Dado los puntos A(3, –4, 1) y B(5, 1, 4), halla la distancia de A a B y representa el segmento AB

Solución:

```
Ejercicio 91
A := punto(3, −4, 1) → punto(3,−4,1)
B := punto(5, 1, 4) → punto(5,1,4)
distancia(A, B) → √38
√38. → 6.1644
d(A, B) = 6.16 unidades
dibujar3d(A, {color = azul, tamaño_punto = 8})
dibujar3d(B, {color = verde, tamaño_punto = 8})
dibujar3d(segmento(A, B), {color = rojo, anchura_linea = 2})
```

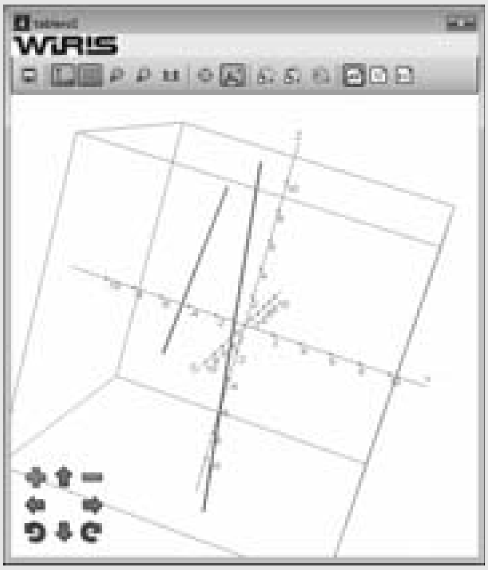


92. Calcula la distancia que hay entre las rectas siguientes y represéntalas:

$$r \equiv \begin{cases} x = 1 + 6t \\ y = -4 + t \ ;\ t \in \mathbb{R} \\ z = 3 - 2t \end{cases} \qquad s \equiv \frac{x-3}{2} = y = \frac{z+1}{-5}$$

Solución:

```
Ejercicio 92
A := punto(1, −4, 3) → punto(1,−4,3)
u = [6, 1, −2] → [6,1,−2]
B := punto(3, 0, −1) → punto(3,0,−1)
v = [2, 1, −5] → [2,1,−5]
AB = vector(A, B) → [2,4,−4]
|2 4 −4|
|6 1 −2| → 82
|2 1 −5|
|u × v| → √701
d = |82.| / √701 → 3.0971
d(r, s) = 3,10 unidades
r = recta(A, u) → −x+6·y+25=0∩x+4·y+5·z=0
dibujar3d(r, {color = rojo, anchura_linea = 2})
s = recta(B, v) → −x+2·y+3=0∩x+13·y+3·z=0
dibujar3d(s, {color = azul, anchura_linea = 2})
```



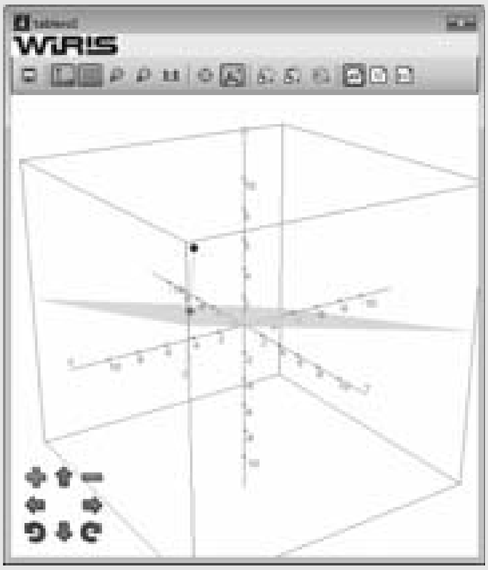
93. Calcula el plano mediador del segmento que tiene por extremos los puntos.

$$A(2, -3, 5) \text{ y } B(4, -1, -3)$$

Representa el segmento AB y el plano mediador.

Solución:

```
Ejercicio 93
A := punto(2, −3, 5) → punto(2,−3,5)
B := punto(4, −1, −3) → punto(4,−1,−3)
M = (A + B)/2 → (3,−2,1)
n = vector(A, B) → [2,2,−8]
p = plano ([x − 3, y + 2, z − 1] · [2,2,−8] = 0) → x+y−4·z+3=0
dibujar3d(A, {color = azul, tamaño_punto = 8})
dibujar3d(B, {color = cian, tamaño_punto = 8})
dibujar3d(segmento(A, B), {color = cian, anchura_linea = 2})
dibujar3d(M, {color = rojo, tamaño_punto = 8})
dibujar3d(p, {color = verde})
```

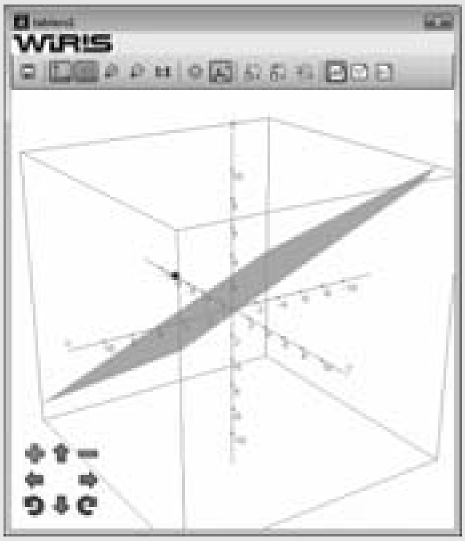


94. Halla la distancia que hay desde el punto P(4, –1, 3) al plano: $\pi \equiv 2x - 3y + 5z - 7 = 0$

Representa el punto P y el plano π

Solución:

```
Ejercicio 94
P := punto(4, −1, 3) → punto(4,−1,3)
p = plano(2x − 3y + 5z − 7 = 0) → 2·x−3·y+5·z−7=0
distancia(P, p) → √38/2
√38/2. → 3.0822
d(P, p) = 3,08 unidades
p = plano(2x − 3y + 5z − 7 = 0) → 2·x−3·y+5·z−7=0
dibujar3d(P, {color = azul, tamaño_punto = 8})
dibujar3d(p, {color = rojo})
```



95. Calcula la distancia que hay entre la recta y el plano siguientes:

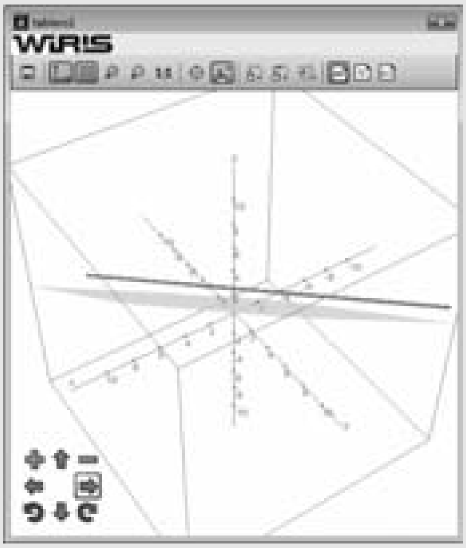
$$r \equiv \frac{x-2}{3} = \frac{y+5}{-4} = -z$$

$$\pi \equiv 6x + 7y - 10z + 9 = 0$$

Representa la recta **r** y el plano π

Solución:

```
Ejercicio 96
A := punto(2, −5, 0) → punto(2,−5,0)
p = plano(6x + 7y − 10z + 9 = 0) → 6·x+7·y−10·z+9=0
distancia(A, p) → 14·√185/185
14·√185/185. → 1.0293
d(r, p) = 1,03 unidades
v = [3, −4, −1] → [3,−4,−1]
r = recta(A, v) → 4·x+3·y+7=0∩5·x+2·y+7·z=0
dibujar3d(r, {color = rojo, anchura_linea = 4})
p = plano(6x + 7y − 10z + 9 = 0) → 6·x+7·y−10·z+9=0
dibujar3d(p, {color = verde})
```



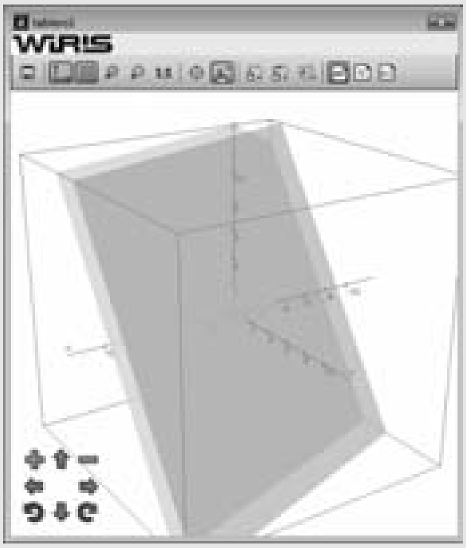
96. Calcula la distancia que hay entre los planos siguientes:

$$\pi' \equiv x - 3y - 2z + 4 = 0$$
$$\pi' \equiv 2x - 6y - 4z - 7 = 0$$

Representa ambos planos.

Solución:

```
Ejercicio 96
p = plano(x − 3y − 2z + 4 = 0)  →  x−3·y−2·z+4=0
q = plano(2x − 6y − 4z − 7 = 0)  →  2·x−6·y−4·z−7=0
dibujar3d(q, {color = cian})  →  tablero1
distancia(p, q)  →  15·√14 / 28
15·√14 / 28.  →  2.0045
d(P, p) = 2 unidades
dibujar3d(p, {color = rosa})
dibujar3d(q, {color = cian})
```



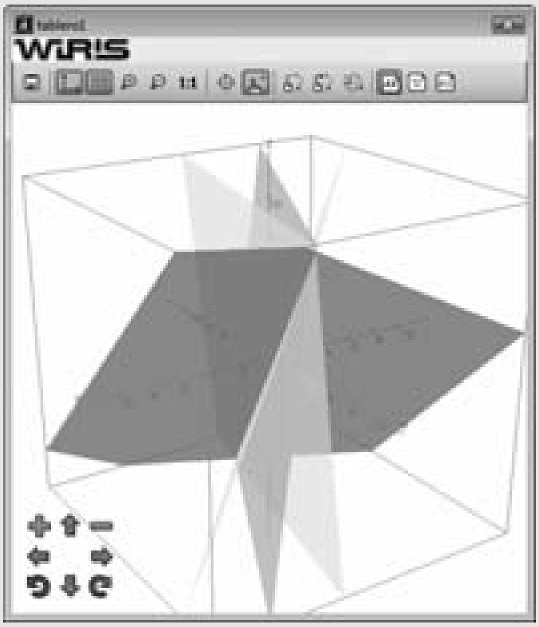
97. Calcula el plano bisector de los planos:

$$\pi \equiv x + 2y - 2z = 5$$
$$\pi' \equiv 8x - 4y + z = 3$$

Representa los cuatro planos.

Solución:

```
Ejercicio 97
n1 = [1, 2, −2]  →  [1,2,−2]
n2 = [8, −4, 1]  →  [8,−4,1]
resolver( [illegible] )  →  [illegible]
p1 = plano(x + 2y − 2z − 5 = 0)  →  [illegible]
dibujar3d(p1, {color = rojo})
p2 = plano(8x − 4y + z − 3 = 0)  →  [illegible]
dibujar3d(p2, {color = rojo})
q1 = plano( [illegible] )  →  [illegible]
dibujar3d(q1, {color = verde})
q2 = plano( [illegible] )  →  [illegible]
dibujar3d(q2, {color = verde})
```



98. Halla el valor de **k** para que las siguientes rectas sean perpendiculares:

$$r \equiv \frac{x-2}{5} = \frac{y+3}{4} = \frac{z-1}{-2} \qquad s \equiv \begin{cases} x = -3 + 2t \\ y = \ \ 5 + kt \ ; \ t \in \mathbb{R} \\ z = -2 - \ \ t \end{cases}$$

Representa ambas rectas.

Solución:

```
Ejercicio 98
A := punto(2, −3, 1)  →  punto(2,−3,1)
u = [5, 4, −2]  →  [5,4,−2]
B := punto(−3, 5, −2)  →  punto(−3,5,−2)
v = [2, k, −1]  →  [2,k,−1]
resolver(u · v = 0)  →  {{k=−3}}
v = [2, −3, −1]  →  [2,−3,−1]
r = recta(A, u)  →  −4·x+5·y+23=0∩2·x+9·y+23·z=0
s = recta(B, v)  →  −3·x−2·y+1=0∩11·x+7·y+z=0
dibujar3d(r, {color = rojo, anchura_linea = 4})
dibujar3d(s, {color = azul, anchura_linea = 4})
```

99. Justifica por qué la recta **r** y el plano π son perpendiculares:

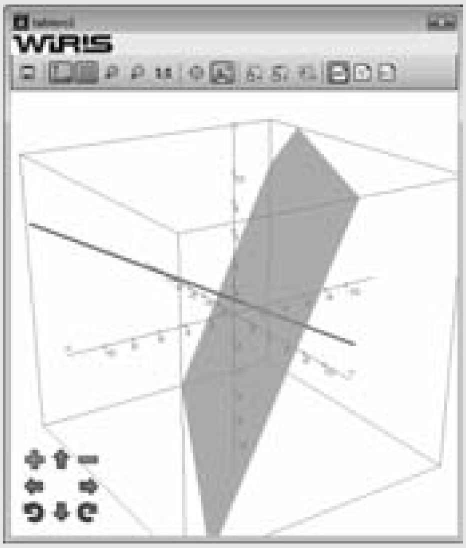
$$r \equiv \frac{x+1}{2} = \frac{y+4}{-1} = z$$

$$\pi \equiv 4x - 2y + 2z + 7 = 0$$

Representa la recta y el plano.

Solución:

```
Ejercicio 99
A := punto(−1, −4, 0) → punto(−1,−4,0)
v = [2, −1, 1] → [2,−1,1]
r = recta(A, v) → x+2·y+9=0∩−4·x+y+9·z=0
p = plano(4x − 2y + 2z + 7 = 0) → 4·x−2·y+2·z+7=0
n = [4, −2, 2] → [4,−2,2]
La recta y el plano son perpendiculares porque
los vectores v y n son proporcionales.
dibujar3d(r, {color = rojo, anchura_linea = 4})
dibujar3d(p, {color = azul}) → tablero1
```



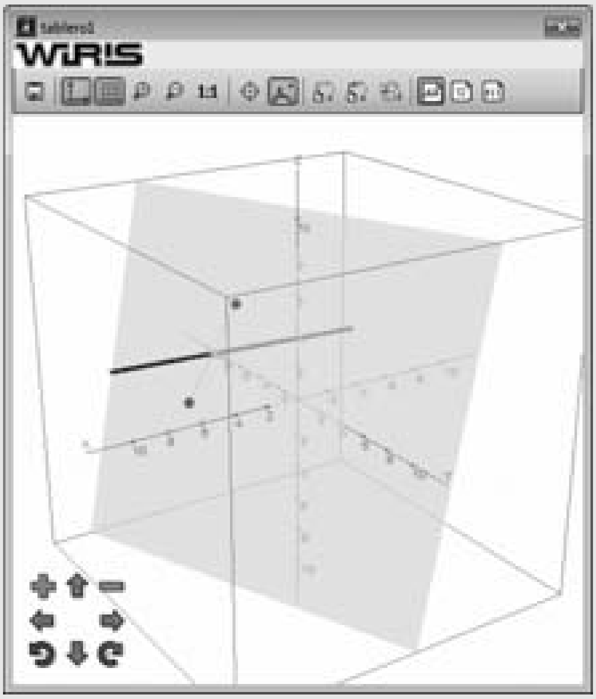
100. Halla el punto Q simétrico del punto P(2, –3, 5) respecto de la recta:

$$r \equiv \frac{x-8}{5} = \frac{y+2}{2} = z - 3$$

Representa los puntos P y Q y la recta **r**

Solución:

```
Ejercicio 100
P := punto(2, −3, 5) → punto(2,−3,5)
A := punto(8, −2, 3) → punto(8,−2,3)
v = [5, 2, 1] → [5,2,1]
r = recta(A, v) → −2·x+5·y+26=0∩−8·x+7·y+26·z=0
p = plano(P, v) → 5·x+2·y+z−9=0
M = r ∩ p → {(3,−4,2)}
M = punto({(3,−4,2)}) → (3,−4,2)
Q = 2 · M − P → (4,−5,−1)
dibujar3d(P, {color = magenta, tamaño_punto = 8})
dibujar3d(Q, {color = rojo, tamaño_punto = 8})
dibujar3d(M, {color = verde, tamaño_punto = 8})
PQ = segmento(P, Q) → (2,−3,5)−(4,−5,−1)
dibujar3d(PQ, {color = cian, anchura_linea = 2})
dibujar3d(r, {color = azul, anchura_linea = 4})
dibujar3d(p, {color = rosa})
```



101. Halla el punto P' simétrico del punto P(3, –4, 4) respecto del plano:

$$\pi \equiv 2x - 3y + 2z - 9 = 0$$

Representa los puntos P y P' y el plano π

Solución:

```
Ejercicio 101
P := punto(3, −4, 4)  →  punto(3, −4,4)
p = plano(2x − 3y + 2z − 9 = 0)  →  2·x−3·y+2·z−9=0
n = [2, −3, 2]  →  [2,−3,2]
r = recta(P, n)  →  −3·x−2·y+1=0∩−4·x−2·y+z=0
M = p ∩ r  →  {(1,−1,2)}
M=punto({(1,−1,2)})  →  (1,−1,2)
Q = 2 · M − P  →  (−1,2,0)
dibujar3d(P, {color = magenta, tamaño_punto = 8})
dibujar3d(Q, {color = rojo, tamaño_punto = 8})
dibujar3d(M, {color = verde, tamaño_punto = 8})
PQ = segmento(P, Q)  →  (3,−4,4)−(−1,2,0)
dibujar3d(PQ, {color = cian, anchura_linea = 2})
dibujar3d(r, {color = azul, anchura_linea = 4})
dibujar3d(p, {color = naranja})
```