6 Espacio afín

1. Rectas en el espacio

Piensa y calcula

Calcula las coordenadas de un vector que tenga la dirección de la recta que pasa por los puntos A(2, 1, 5) y B(3, –1, 4)

Solución:
$\overrightarrow{AB}(1, -2, -1)$

Aplica la teoría

1. Halla las ecuaciones paramétricas de una recta determinada por el punto A(3, 2, –1) y el vector $\vec{v}(1, -4, 2)$

Solución:

$$\begin{cases} x = 3 + t \\ y = 2 - 4t; t \in \mathbb{R} \\ z = -1 + 2t \end{cases}$$

2. Halla la ecuación continua de una recta determinada por los puntos A(1, 3, –1) y B(2, 1, 3)

Solución:
$A(1, 3, -1)$ y $\overrightarrow{AB}(1, -2, 4)$

$$x - 1 = \frac{x-3}{-2} = \frac{z+1}{4}$$

3. Dada la recta siguiente:

$$r \equiv \begin{cases} x + y = 3 \\ y + z = 2 \end{cases}$$

encuentra un punto y un vector director de la recta.

Solución:
Se resuelve el sistema:

$$\left.\begin{matrix} x + y = 3 \\ y + z = 2 \end{matrix}\right\} \Rightarrow \left.\begin{matrix} x = 3 - y \\ z = 2 - y \end{matrix}\right\}$$

Soluciones particulares:
$A(3, 0, 2), B(2, 1, 1) \Rightarrow \overrightarrow{AB}(-1, 1, -1) \parallel (1, -1, 1)$

$$x - 3 = \frac{y}{-1} = z - 2$$

4. Dada la recta siguiente:

$$r \equiv \frac{x-1}{2} = \frac{y+3}{4} = z + 2$$

escribe sus ecuaciones paramétricas.

Solución:
$A(1, -3, -2)$ $\vec{v}(2, 4, 1)$

$$\begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = -3 + 4t; t \in \mathbb{R} \\ z = -2 + t \end{cases}$$

5. Dada la recta siguiente:

$$r \equiv (x, y, z) = (1, 0, -2) + t(2, 1, 3); t \in \mathbb{R}$$

escribe las ecuaciones implícitas de dicha recta.

Solución:

$$r \equiv \frac{x-1}{2} = y = \frac{z+2}{3}$$

$$\frac{x-1}{2} = y \Rightarrow x - 2y = 1$$

$$y = \frac{z+2}{3} \Rightarrow 3y - z = 2$$

$$r \equiv \begin{cases} x - 2y = 1 \\ 3y - z = 2 \end{cases}$$

6. Determina si los puntos A(1, –3, 4) y B(2, 0, –3) están en la recta siguiente:

$$r \equiv \frac{x-3}{-1} = y + 1 = \frac{z}{-3}$$

Solución:
$A(1, -3, 4)$

$$\frac{1-3}{-1} = -3 + 1 = \frac{4}{-3} \Rightarrow 2 \neq -2 \neq -\frac{4}{3}$$

El punto A no pertenece a la recta.
$B(2, 0, -3)$

$$\frac{2-3}{-1} = 0 + 1 = \frac{-3}{-3} \Rightarrow 1 = 1 = 1$$

El punto B pertenece a la recta.

2. Planos en el espacio

Piensa y calcula

Calcula un vector perpendicular al plano XY

Solución:

El vector de coordenadas **k**(0, 0, 1)

Aplica la teoría

7. Halla las ecuaciones paramétricas del plano determinado por el punto A(2, –3, 1) y los vectores $\vec{u}(2, -1, 4)$ y $\vec{v}(1, 3, -2)$

Solución:

$$\begin{cases} x = 2 + 2\lambda + \mu \\ y = -3 - \lambda + 3\mu; \ \lambda, \mu \in \mathbb{R} \\ z = 1 + 4\lambda - 2\mu \end{cases}$$

8. Halla la ecuación del plano que pasa por el punto A(1, –3, 2) y tiene como vector normal $\vec{n}(1, -4, 5)$

Solución:

$(x - 1) - 4(y + 3) + 5(z - 2) = 0$

$x - 4y + 5z - 23 = 0$

9. Dados los puntos A(3, – 1, 2) y B(4, –2, – 1), halla la ecuación del plano que pasa por A y es perpendicular al vector $\overrightarrow{AB}$

Solución:

A(3, – 1, 2)

$\overrightarrow{AB}(1, -1, -3)$ es perpendicular al plano.

$(x - 3) - (y + 1) - 3(z - 2) = 0$

$x - y - 3z + 2 = 0$

10. Halla la ecuación del plano que pasa por los puntos A(2, – 1, 3) y B(3, 1, 2) y es paralelo al vector $\vec{v}(3, -1, -4)$

Solución:

A(2, – 1, 3)

$\vec{v}(3, -1, -4)$

$\overrightarrow{AB}(1, 2, -1)$

$$\begin{vmatrix} x - 2 & y + 1 & z - 3 \\ 3 & -1 & -4 \\ 1 & 2 & -1 \end{vmatrix} = 0$$

$9x - y + 7z = 40$

11. Halla la ecuación del plano que pasa por los puntos A(4, – 1, – 1), B(2, 0, 2) y C(3, – 1, 2)

Solución:

A(4, – 1, – 1)

$\overrightarrow{AB}(-2, 1, 3)$

$\overrightarrow{AC}(-1, 0, 3)$

$$\begin{vmatrix} x - 4 & y + 1 & z + 1 \\ -2 & 1 & 3 \\ -1 & 0 & 3 \end{vmatrix} = 0$$

$3x + 3y + z - 8 = 0$

12. Halla la ecuación del plano que pasa por el origen de coordenadas y es paralelo al plano

$$\pi \equiv 5x - 3y + 2z = 3$$

Solución:

Si el plano es paralelo a π, un vector normal será:

$\vec{n}(5, -3, 2)$

O(0, 0, 0)

$5(x - 0) - 3(y - 0) + 2(z - 0) = 0$

$5x - 3y + 2z = 0$

13. Halla la ecuación del plano que pasa por A(2, – 1, 1) y es perpendicular a la recta siguiente:

$$r \equiv \begin{cases} 2x - z + 1 = 0 \\ y = 0 \end{cases}$$

Solución:

A(2, – 1, 1)

Si el plano es perpendicular a la recta **r**, el vector $\vec{v}$ de **r** es el vector normal $\vec{n}$ al plano.

$$\vec{n} = \vec{v} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 2 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} = i + 2k \Rightarrow \vec{v}(1, 0, 2)$$

$(x - 2) + 2(z - 1) = 0$

$x + 2z = 4$

3. Posiciones relativas de rectas y de rectas y planos

Piensa y calcula

Indica la posición relativa de la recta $r \equiv \begin{cases} y = 1 \\ x = 1 \end{cases}$ y el plano $\pi \equiv x = 0$

Solución:

El vector director de la recta $\vec{v}(0, 0, 1)$ es paralelo al plano. Luego la recta es paralela al plano.

Aplica la teoría

14. Estudia la posición relativa de las siguientes rectas:

$$r \equiv \frac{x-1}{2} = \frac{y}{3} = z + 3; s \equiv \frac{x-2}{-1} = \frac{y-5}{2} = \frac{z-3}{5}$$

Solución:

$A(1, 0, -3) \in r, B(2, 5, 3) \in s$

$\vec{AB}(1, 5, 6), \vec{u}(2, 3, 1)$ y $\vec{v}(-1, 2, 5)$

Se calcula el determinante de las coordenadas de los vectores:

$$\begin{vmatrix} 1 & 5 & 6 \\ 2 & 3 & 1 \\ -1 & 2 & 5 \end{vmatrix} = 0$$

Como los vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$ no son paralelos, las rectas se cortan.

15. Estudia la posición relativa de las siguientes rectas:

$$r \equiv \frac{x-3}{2} = y - 1 = \frac{z+1}{-2}\ ;\ s \equiv x - 4 = \frac{y}{2} = \frac{z-4}{2}$$

Solución:

$A(3, 1, -1) \in r, B(4, 0, 4) \in s$

$\vec{AB}(1, -1, 5), \vec{u}(2, 1, -2)$ y $\vec{v}(1, 2, 2)$

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 & 5 \\ 2 & 1 & -2 \\ 1 & 2 & 2 \end{vmatrix} = 27$$

El rango es 3 y las rectas se cruzan.

16. Halla los valores de **m** y **n** para que las siguientes rectas sean paralelas:

$$r \equiv \frac{x-5}{4} = y - 3 = -z\ ;\ s \equiv \frac{x}{m} = \frac{y-1}{3} = \frac{z+3}{n}$$

Solución:

Para que dos rectas sean paralelas, las coordenadas de los vectores directores de las rectas tienen que ser proporcionales:

$$\frac{4}{m} = \frac{1}{3} = \frac{-1}{n}$$

$m = 12$

$n = -3$

17. Se consideran la recta y el plano siguientes:

$$r \equiv \begin{cases} 5x - y + z = 0 \\ x - y - z = -4 \end{cases};\quad \pi \equiv kx - 6y + 4z = 5$$

Calcula el valor de **k** para que la recta **r** sea paralela a π.

Solución:

Para que la recta **r** sea paralela al plano π, el vector director de **r** y el vector normal al plano han de ser perpendiculares, es decir,

$$\vec{v} \cdot \vec{n} = 0$$

El vector director de **r** es:

$$\vec{v} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 5 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \end{vmatrix} = (2, 6, -4) \,||\, (1, 3, -2)$$

El vector normal al plano π es:

$\vec{n}(k, -6, 4)$

$(1, 3, -2) \cdot (k, -6, 4) = 0$

$k - 18 - 8 = 0$

$k = 26$

18. Se consideran la recta y el plano siguientes:

$$r \equiv \frac{x-1}{2} = \frac{y+3}{2} = \frac{z+2}{3};\quad \pi \equiv x - y + z = 5$$

Estudia su posición relativa, y, si se cortan, halla el punto de corte.

Solución:

Vector director de **r:** $\vec{v}(2, 2, 3)$

Vector normal al plano: $\vec{n}(1, -1, 1)$

$$\vec{v} \cdot \vec{n} = 2 - 2 + 3 = 3 \neq 0$$

La recta corta al plano.

Punto de corte:

$$\begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = -3 + 2t\ ;\ t \in \mathbb{R} \\ z = -2 + 3t \end{cases}$$

$1 + 2t - (-3 + 2t) - 2 + 3t = 5$

$3t + 2 = 5$

$t = 1$

El punto es: $P(3, -1, 1)$

4. Posiciones relativas de planos

Piensa y calcula

Indica la posición relativa de los planos $\pi \equiv z = 2$; $\pi' \equiv z = 3$

Solución:
Son planos paralelos.

Aplica la teoría

19. Estudia la posición relativa de los siguientes planos:

a) $\pi \equiv 2x + y - 3z = 1$ y $\pi' \equiv 4x - 4y + 3z = 0$

b) $\pi \equiv x + 3y - z = 5$ y $\pi' \equiv 2x + 6y - 2z = 1$

c) $\pi \equiv x + y - 3z = 2$ y $\pi' \equiv 5x + 5y - 15z = 10$

Solución:

a) $\frac{2}{4} \neq \frac{1}{-4} \Rightarrow$ Los dos planos son secantes.

b) $\frac{1}{2} = \frac{3}{6} = \frac{-1}{-2} \neq \frac{5}{1} \Rightarrow$ Los dos planos son paralelos.

c) $\frac{1}{5} = \frac{1}{5} = \frac{-3}{-15} = \frac{2}{10} \Rightarrow$ Los dos planos son coincidentes.

20. Estudia la posición relativa de los siguientes planos:

$3x - 5y + 2z = 4;\ 2x - 5y + 3z = 1;\ x + 3y - 4z = 0$

Solución:

Se estudia el rango de la matriz de los coeficientes y la matriz ampliada del sistema formado por las ecuaciones de los tres planos:

$$|C| = \begin{vmatrix} 3 & -5 & 2 \\ 2 & -5 & 3 \\ 1 & 3 & -4 \end{vmatrix} = 0$$

Como las filas no son proporcionales, el $R(C) = 2$

$$R\begin{pmatrix} 3 & -5 & 2 & 4 \\ 2 & -5 & 3 & 1 \\ 1 & 3 & -4 & 0 \end{pmatrix} = R\begin{pmatrix} 1 & 3 & -4 & 0 \\ 3 & -5 & 2 & 4 \\ 2 & -5 & 3 & 1 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ 3 \cdot 1^a - 2^a \\ 2 \cdot 1^a - 2^a \end{matrix} =$$

$$= R\begin{pmatrix} 1 & 3 & -4 & 0 \\ 0 & 14 & -14 & -4 \\ 0 & 11 & -11 & -1 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ 2^a : 2 \\ \\ \end{matrix} =$$

$$= R\begin{pmatrix} 1 & 3 & -4 & 0 \\ 0 & 7 & -7 & -2 \\ 0 & 11 & -11 & -1 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ \\ 7 \cdot 3^a - 11 \cdot 2^a \end{matrix} =$$

$$= R\begin{pmatrix} 1 & 3 & -4 & 0 \\ 0 & 7 & -7 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 15 \end{pmatrix}$$

El $R(C) = 2$ y $R(A) = 3 \Rightarrow$ El sistema es incompatible.

Como los planos no tienen los coeficientes de las variables proporcionales, se cortan dos a dos formando una superficie prismática.

21. Estudia, según los valores del parámetro **k,** las posiciones relativas de los siguientes planos:

$\pi \equiv x + ky + z = k + 2$

$\pi' \equiv x + y + kz = -2(k + 1)$

$\pi'' \equiv kx + y + z = k$

Solución:

Se estudia el rango de la matriz de los coeficientes y la matriz ampliada del sistema formado por las ecuaciones de los tres planos:

$$|C| = \begin{vmatrix} 1 & k & 1 \\ 1 & 1 & k \\ k & 1 & 1 \end{vmatrix} = k^3 - 3k + 2$$

$$k^3 - 3k + 2 = 0$$

$$k = 1,\ k = -2$$

Para todo valor de $k \neq -2$ y $k \neq 1$ se verifica que:

$R(C) = R(A) = 3 =$ número de incógnitas y, por lo tanto, el sistema es compatible determinado.

Los tres planos se cortan en un punto.

Se estudian los valores que son raíces de $|C|$:

- Para $k = 1$ se tiene

$$R\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 1 & -4 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$R(C) = 1,\ R(A) = 2$

Los tres planos son paralelos.

- Para $k = -2$ se tiene

$$R\begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -2 & 2 \\ -2 & 1 & 1 & -2 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ 2^a - 1^a \\ 3^a + 2 \cdot 1^a \end{matrix} =$$

$$= R\begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & -3 & 2 \\ 0 & -3 & 3 & -2 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ \\ = -2^a \end{matrix} =$$

$$= R\begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & -3 & 2 \end{pmatrix}$$

Se tiene que $R(C) = R(A) = 2$ y, por lo tanto, el sistema es compatible indeterminado.

Como los coeficientes de los tres planos no son proporcionales, se cortan en una recta.

Preguntas tipo test

Contesta en tu cuaderno:

1 Dada la siguiente recta

$$r \equiv x = y = -z$$

el vector director es:

- [ ] $\vec{v}(0, 1, -1)$
- [x] $\vec{v}(1, 1, -1)$
- [ ] $\vec{v}(0, 0, 0)$
- [ ] $\vec{v}(1, 1, 1)$

2 Dada la siguiente recta

$$r \equiv x = y = -z$$

pasa por el punto:

- [ ] A(0, 1, –1)
- [x] O(0, 0, 0)
- [ ] A(1, 1, 0)
- [ ] A(1, 1, 1)

3 Un vector normal al plano

$$\pi \equiv x + y + z = 0$$

es:

- [ ] $\vec{n}(0, 1, -1)$
- [ ] $\vec{n}(0, 0, 1)$
- [ ] $\vec{n}(-1, 1, -1)$
- [x] $\vec{n}(1, 1, 1)$

4 Halla la posición relativa de los siguientes planos:

$$\pi_1 \equiv 2x + 3y - z = 5$$
$$\pi_2 \equiv x - 5y - z = 1$$

- [ ] Son paralelos.
- [ ] Son coincidentes.
- [x] Son secantes.
- [ ] Ninguno de los anteriores.

5 Halla la posición relativa de los siguientes planos:

$$\pi_1 \equiv x + 2y - z = 1$$
$$\pi_2 \equiv -2x - 4y + 2z = 2$$
$$\pi_2 \equiv 3x + 6y - 3z = -5$$

- [x] Son paralelos.
- [ ] Son coincidentes.
- [ ] Dos paralelos y el otro secante.
- [ ] Dos coincidentes y el otro paralelo.

6 Un plano π determina sobre la parte positiva de los ejes X, Y, Z tres segmentos de longitudes 2, 3 y 4 m, respectivamente. Halla la ecuación del plano π

- [ ] $2x + 3y + 4z = 1$
- [ ] $2x + 3y + 4z = 24$
- [ ] $2x - 3y + 4z = 1$
- [x] $6x + 4y + 3z = 12$

7 Un plano π determina sobre la parte positiva de los ejes X, Y, Z tres segmentos de longitudes 2, 3 y 4 m, respectivamente. Halla la ecuación de la recta que contiene a los puntos A(2, 0, 3) y B(0, 6, a) y estudia la posición relativa de π y **r** según los valores de **a**

- [ ] Son siempre secantes.
- [x] Si a = –1, paralelos. En los demás casos, secantes.
- [ ] Si a = 1, paralelos. En los demás casos, secantes.
- [ ] Son siempre paralelos.

8 Un plano π determina sobre la parte positiva de los ejes X, Y, Z tres segmentos de longitudes 2, 3 y 4 m, respectivamente. Si la recta **r** es la del ejercicio anterior, para el caso a = 2, halla el punto donde se cortan π y **r**

- [x] A(4, –6, 4)
- [ ] B(1, 2, 3)
- [ ] C(2, –3, 2)
- [ ] D(0, 0, –5)

9 Considera la recta:

$$r \equiv \frac{x-1}{2} = \frac{y+5}{-5} = \frac{z+3}{4}$$

y el plano $\pi \equiv 2x + 4y + 4z = 5$

Estudia la posición relativa de **r** y π

- [ ] Son coincidentes.
- [ ] Son secantes.
- [x] Son paralelos.
- [ ] Ninguno de los anteriores.

10 Considera la recta:

$$r \equiv \frac{x-1}{2} = \frac{y+5}{-5} = \frac{z+3}{4}$$

y el plano $\pi \equiv 2x + 4y + 4z = 5$

Calcula la ecuación implícita de un plano π_1 que es perpendicular a π y contiene a **r**

- [ ] $x + y + z = 0$
- [x] $2x - z = 5$
- [ ] $2x + y - z = 2$
- [ ] $3x + 2y - 5z = 9$

1. Rectas en el espacio

22. Halla las ecuaciones paramétricas de una recta determinada por el punto A(2, –3, 5) y el vector $\vec{v}(4, -1, 0)$

Solución:

$$\begin{cases} x = 2 + 4t \\ y = -3 - t \ ; t \in \mathbb{R} \\ z = 5 \end{cases}$$

23. Halla la ecuación continua de un recta determinada por los puntos A(3, 1, –4) y B(4, –2, 1)

Solución:

$\vec{AB}(1, -3, 5)$

$$x - 3 = \frac{y-1}{-3} = \frac{z+4}{5}$$

24. Dada la recta siguiente:

$$r \equiv \begin{cases} x - y + 3z = 4 \\ x - y + z = 2 \end{cases}$$

encuentra un punto y un vector director de la recta.

Solución:

Se resuelve el sistema:

$x = 1 + y$

$z = 1$

y se hallan dos soluciones particulares y el vector director:

$A(1, 0, 1), B(2, 1, 1), \vec{AB}(1, 1, 0)$

25. Dada la recta siguiente:

$$r \equiv \frac{x}{3} = y + 2 = \frac{z-1}{-1}$$

a) escribe sus ecuaciones paramétricas.

b) escribe sus ecuaciones implícitas.

Solución:

a) $A(0, -2, 1); \vec{v}(3, 1, -1)$

$$\begin{cases} x = 3t \\ y = -2 + t \ ; \ t \in \mathbb{R} \\ z = 1 - t \end{cases}$$

b) $\frac{x}{3} = y + 2 \Rightarrow x - 3y = 6$

$$y + 2 = \frac{z-1}{-1} \Rightarrow y + z = -1$$

Las ecuaciones implícitas son:

$$\begin{cases} x - 3y = 6 \\ y + z = -1 \end{cases}$$

26. Dada la recta siguiente:

$$r \equiv (x, y, z) = (3, -2, -1) + (-2, 1, 4)t; t \in \mathbb{R}$$

escribe las ecuaciones implícitas de dicha recta.

Solución:

Se escribe la ecuación continua:

$$\frac{x-3}{-2} = y + 2 = \frac{z+1}{4}$$

$$\frac{x-3}{-2} = y + 2 \Rightarrow x + 2y = -1$$

$$y + 2 = \frac{z+1}{4} \Rightarrow 4y - z = -7$$

Las ecuaciones implícitas son:

$$\begin{cases} x + 2y = -1 \\ 4y - z = -7 \end{cases}$$

27. Determina si los puntos A(2, 1, 0) y B(3, –3, 1) están en la recta siguiente:

$$r \equiv \begin{cases} 2x + y + z = 4 \\ x + y + 2z = 2 \end{cases}$$

Solución:

Se sustituyen las coordenadas en las ecuaciones:

$$\begin{cases} 2 \cdot 2 + 1 + 0 = 5 \neq 4 \\ 2 + 1 + 0 = 3 \neq 2 \end{cases} \Rightarrow A \notin r$$

$$\begin{cases} 2 \cdot 3 - 3 + 1 = 4 \\ 3 - 3 + 2 \cdot 1 = 2 \end{cases} \Rightarrow B \in r$$

2. Planos en el espacio

28. Halla las ecuaciones paramétricas y general del plano determinado por el punto A(1, 0 –2) y los vectores $\vec{u}(3, -2, 2)$ y $\vec{v}(1, 2, -4)$

Solución:

Ecuaciones paramétricas:

$$\begin{cases} x = 1 + 3\lambda + \mu \\ y = -2\lambda + 2\mu \ ; \ \lambda, \mu \in \mathbb{R} \\ z = -2 + 2\lambda - 4\mu \end{cases}$$

Ecuación general:

$$\begin{vmatrix} x-1 & y & z+2 \\ 3 & -2 & 2 \\ 1 & 2 & -4 \end{vmatrix} = 0$$

$2x + 7y + 4z = -6$

29. El punto A(2, –1, –1) es el pie de la perpendicular trazada desde el origen de coordenadas a un plano. Halla la ecuación de dicho plano.

Solución:

O(0, 0, 0)

A(2, – 1, – 1)

$\vec{n} = \overrightarrow{OA}(2, -1, -1)$

El plano es:

$2(x - 2) - (y + 1) - (z + 1) = 0$

$2x - y - z = 6$

30. Halla las ecuaciones paramétricas de un plano que pasa por los puntos A(1, – 1, –2) y B(3, 1, 1), y es perpendicular al plano siguiente:

$$\pi \equiv x - 2y + 3z = 5$$

Solución:

Si es perpendicular al plano π, un vector normal de este plano es paralelo al plano buscado:

$\vec{n}(1, -2, 3)$

$\overrightarrow{AB}(2, 2, 3)$

Las ecuaciones paramétricas del plano buscado son:

$$\begin{cases} x = 1 + \lambda + 2\mu \\ y = -1 - 2\lambda + 2\mu;\ \lambda, \mu \in \mathbb{R} \\ z = -2 + 3\lambda + 3\mu \end{cases}$$

31. Halla la ecuación del plano que pasa por los puntos A(1, 1, 1), B(0, – 1, 2) y C(2, 3, – 1)

Solución:

$\overrightarrow{AB}(-1, -2, 1)$

$\overrightarrow{AC}(1, 2, -2)$

$$\begin{vmatrix} x-1 & y-1 & z-1 \\ -1 & -2 & 1 \\ 1 & 2 & -2 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow 2x - y = 1$$

32. Halla la ecuación de un plano que pasa por el punto A(3, –2, –7) y es paralelo al plano siguiente:

$$\pi \equiv 2x - 3z + 5 = 0$$

Solución:

Si el plano buscado es paralelo al plano π, sus vectores normales son iguales.

$\vec{n}(2, 0, -3)$

$2(x - 3) - 3(z + 7) = 0$

$2x - 3z = 27$

33. Halla la ecuación del plano que pasa por el origen de coordenadas y es perpendicular a la recta siguiente:

$$r \equiv \begin{cases} 2x - y + 3z = 1 \\ x + 2y + z = 0 \end{cases}$$

Solución:

El vector de dirección $\vec{v}$ de la recta es perpendicular a los vectores normales de los planos de las ecuaciones implícitas, es decir:

$$\vec{v} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 2 & -1 & 3 \\ 1 & 2 & 1 \end{vmatrix} = (-7, 1, 5) \parallel (7, -1, -5)$$

El vector director $\vec{v}$ es normal al plano buscado, es decir, $\vec{n} = \vec{v}$

Luego

$7x - y - 5z = 0$

3. Posiciones relativas de rectas y de rectas y planos

34. Dadas las rectas:

$$r \equiv \begin{cases} x = 1 + \lambda \\ y = \lambda;\ \lambda \in \mathbb{R}; \\ z = -\lambda \end{cases} \quad s \equiv \begin{cases} x = \mu \\ y = 2 + 2\mu;\ \mu \in \mathbb{R} \\ z = 0 \end{cases}$$

estudia su posición relativa.

Solución:

Recta **r:** A(1, 0, 0), $\vec{u}(1, 1, -1)$

Recta **s:** B(0, 2, 0), $\vec{v}(1, 2, 0)$

$\overrightarrow{AB}(-1, 2, 0)$

$$\begin{vmatrix} -1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 0 \end{vmatrix} = -4 \neq 0$$

Los vectores son linealmente independientes.

Las rectas se cruzan.

35. Dadas las rectas:

$$r \equiv \begin{cases} x = 1 + t \\ y = t;\ t \in \mathbb{R}; \\ z = -1 - t \end{cases} \quad s \equiv \begin{cases} x + y + 2 = 0 \\ x - z + 1 = 0 \end{cases}$$

estudia su posición relativa.

Solución:

Recta **r:** A(1, 0, – 1), $\vec{u}(1, 1, -1)$

Recta **s:**

$$\begin{cases} y = -x - 2 \\ z = x + 1 \end{cases} \Rightarrow B(0, -2, 1), C(1, -3, 2) \Rightarrow \overrightarrow{BC}(1, -1, 1)$$

$\overrightarrow{AB}(-1, -2, 2)$

$$\begin{vmatrix} -1 & -2 & 2 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

Como $\vec{u}$ y $\vec{v}$ no son paralelos, las rectas se cortan.

36. Estudia la posición relativa de las siguientes rectas:

$$r \equiv \begin{cases} x + y \quad = 2 \\ \quad y - z = 1 \end{cases}; \quad s \equiv \begin{cases} x = \ \ 1 - t \\ y = -1 + t; \ t \in \mathbb{R} \\ z = \quad\ \ t \end{cases}$$

Solución:

Recta **r:**

$\begin{cases} x = 2 - y \\ z = y - 1 \end{cases} \Rightarrow A(2, 0, -1), B(1, 1, 0) \Rightarrow \overrightarrow{AB}(-1, 1, 1)$

Recta **s:** $C(1, -1, 0), \vec{u}(-1, 1, 1)$

Los dos vectores de dirección son el mismo; luego las rectas pueden ser paralelas o coincidentes.

Como $\overrightarrow{AC}(-1, -1, 1)$ no es paralelo a los vectores de dirección, las rectas son paralelas.

37. Halla la posición relativa de la recta y del plano siguientes:

$$r \equiv \begin{cases} x = -1 - t \\ y = \quad\ -t\,; \ t \in \mathbb{R}; \\ z = \quad\ \ 2t \end{cases} \quad \pi \equiv 2x - 3y + z + 1 = 0$$

Solución:

$\vec{v}(-1, -1, 2)$

$\vec{n}(2, -3, 1)$

$\vec{v} \cdot \vec{n} = -2 + 3 + 2 = 3 \neq 0$

La recta y el plano se cortan.

38. Estudia la posición relativa del plano y de la recta siguientes:

$$\pi \equiv 2x - 3z + 7 = 0; r \equiv \frac{x + 1}{3} = \frac{y - 2}{4} = \frac{z + 3}{2}$$

Solución:

$\vec{n}(2, 0, -3)$

$\vec{v}(3, 4, 2)$

$\vec{v} \cdot \vec{n} = 6 + 0 - 6 = 0$

La recta es paralela al plano o está contenida en él.

$$A(-1, 2, -3) \in r$$

Se comprueba si pertenece al plano:

$$2 \cdot (-1) - 3 \cdot (-3) + 7 = 14 \neq 0$$

$$A \notin \pi$$

Luego la recta es paralela al plano.

39. Dadas las rectas siguientes:

$$r \equiv \frac{x - 1}{3} = \frac{y}{2} = \frac{z - m}{-1}; \quad s \equiv \frac{x}{2} = \frac{y}{m} = \frac{z + 1}{2}$$

¿para qué valor de **m** están las rectas **r** y **s** contenidas en un mismo plano?

Solución:

Recta **r:** $A(1, 0, m), \vec{u}(3, 2, -1)$

Recta **s:** $B(0, 0, -1), \vec{v}(2, m, 2)$

$\overrightarrow{AB}(-1, 0, -1 - m)$

$$\begin{vmatrix} -1 & 0 & -1 - m \\ 3 & 2 & -1 \\ 2 & m & 2 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow 3m^2 = 0 \Rightarrow m = 0$$

Para m = 0, las rectas son paralelas o coincidentes.

Como los vectores de dirección no son paralelos, las rectas se cortan y están en un mismo plano.

4. Posiciones relativas de planos

40. Determina la posición relativa de los planos:

$$\pi_1 \equiv 2x + 5 = 0$$
$$\pi_2 \equiv 3x + 3y - 4 = 0$$

Solución:

$\frac{2}{3} \neq \frac{0}{3} \Rightarrow$ Los planos son secantes.

41. Determina la posición relativa de los planos siguientes según el valor del parámetro **k:**

$$\pi_1 \equiv x + y + z = 0$$
$$\pi_2 \equiv kx + y + kz = 0$$

Solución:

$\frac{1}{k} = \frac{1}{1} = \frac{1}{k} \Rightarrow k = 1$

Si k = 1, los dos planos son coincidentes.

Si $k \neq 1$, los dos planos son secantes.

42. Determina la posición relativa de los planos siguientes:

$$\pi_1 \equiv x + y + 3z = 5$$
$$\pi_2 \equiv 3x + 3y + 2z = 8$$
$$\pi_3 \equiv z = 1$$

Solución:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 3 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

Como las filas no son proporcionales, R(C) = 2

$$R\begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 & 5 \\ 3 & 3 & 2 & 8 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ 3 \cdot 1^a - 2^a \\ \\ \end{matrix} =$$

$$= R\begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 & 5 \\ 0 & 0 & 7 & 7 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ = 7 \cdot 3^a \\ \\ \end{matrix} =$$

$$= R\begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

R(C) = R(A) = 2. Como los planos no tienen sus coeficientes proporcionales, se cortan en una recta.

43. Se consideran los planos siguientes:

$$\pi_1 \equiv x + my + z = 0$$
$$\pi_2 \equiv 2x - 3y + z - 5 = 0$$
$$\pi_3 \equiv x + y - 2z - 15 = 0$$

Determina el valor de **m,** de forma que los tres planos se corten en una recta.

Solución:

Para que se corten en una recta, R(C) = R(A) = 2

$$\begin{vmatrix} 1 & m & 1 \\ 2 & -3 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow 5m + 10 = 0 \Rightarrow m = -2$$

Para m = −2, R(C) = 2, porque las tres filas no son proporcionales.

$$R\begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & 0 \\ 2 & -3 & 1 & 5 \\ 1 & 1 & -2 & 15 \end{pmatrix} \begin{array}{l} \\ 2^a - 2 \cdot 1^a \\ 3^a - 1^a \end{array} =$$

$$= R\begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 5 \\ 0 & 3 & -3 & 15 \end{pmatrix} \begin{array}{l} \\ \\ = 3 \cdot 2^a \end{array} =$$

$$= R\begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 5 \end{pmatrix}$$

R(C) = R(A) = 2. Como los coeficientes de los planos no son proporcionales, se cortan en una recta.

44. Determina la posición relativa de los planos siguientes:

$$\pi_1 \equiv x - 2y + 3z = 4$$
$$\pi_2 \equiv 2x + y + z + 1 = 0$$
$$\pi_3 \equiv x - 2y + 3z = 0$$

Solución:

$$\begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 3 \end{vmatrix} \begin{array}{l} \\ \\ = 1^a \end{array} = 0$$

$$R\begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & -2 & 3 & 0 \end{pmatrix} = R\begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & 4 \\ 0 & 5 & -5 & -9 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

R(C) = 2, R(A) = 3

Los coeficientes de las variables del primer y tercer planos son iguales; por tanto, éstos son paralelos y el segundo es secante a ambos.

Para ampliar

45. Dada la recta siguiente:

$$r \equiv \begin{cases} x - y + z = 1 \\ x + y - 2z = 0 \end{cases}$$

halla las ecuaciones parámetricas de dicha recta.

Solución:

Se resuelve el sistema: $x = \dfrac{z+1}{2}, y = \dfrac{3z-1}{2}$

Dos soluciones particulares:

$$A(1, 1, 1),\ B(2, 4, 3),\ \overrightarrow{AB}(1, 3, 2)$$

$$\begin{cases} x = 1 + t \\ y = 1 + 3t;\ t \in \mathbb{R} \\ z = 1 + 2t \end{cases}$$

46. Halla la ecuación continua de una recta que pasa por el origen de coordenadas y es paralela a la recta siguiente:

$$r \equiv \begin{cases} x - y + 2z + 1 = 0 \\ x + 3y - z + 2 = 0 \end{cases}$$

Solución:

Un vector director de la recta paralela a **r** es:

$$(1, -1, 2) \times (1, 3, -1) = (-5, 3, 4)$$

La ecuación es: $\dfrac{x}{-5} = \dfrac{y}{3} = \dfrac{z}{4}$

47. Halla la ecuación del plano determinado por los vectores $\vec{u}(-1, 2, 0), \vec{v}(1, 3, 5)$ y el punto P(−1, 0, 1)

Solución:

$$\begin{vmatrix} x+1 & y & z-1 \\ -1 & 2 & 0 \\ 1 & 3 & 5 \end{vmatrix} = 0$$

$2x + y - z + 3 = 0$

48. Halla las ecuaciones paramétricas de un plano que es paralelo al vector $\vec{u}(1, 2, 3)$ y que contiene a la recta que pasa por el punto P(1, 1, 1) y es paralela al vector $\vec{v}(1, 1, 1)$

Solución:

$$\begin{cases} x = 1 + \lambda + \mu \\ y = 1 + 2\lambda + \mu;\ \lambda, \mu \in \mathbb{R} \\ z = 1 + 3\lambda + \mu \end{cases}$$

49. Determina la ecuación del plano que es perpendicular al vector $\vec{v}(1, 2, 3)$ y que pasa por el punto P(1, 1, 1)

Solución:

$x - 1 + 2(y - 1) + 3(z - 1) = 0$

$x + 2y + 3z = 6$

50. Dado el segmento AB, cuyos puntos extremos son A(1, 0, 0) y B(3, –4, 4), halla la ecuación del plano que es perpendicular a él y pasa por su punto medio.

Solución:

Vector normal al plano: $\vec{AB}(2, -4, 4) \parallel (1, -2, 2)$

Punto medio del segmento: M(2, –2, 2)

Ecuación:

$x - 2 - 2(y + 2) + 2(z - 2) = 0$

$x - 2y + 2z = 10$

51. Obtén la ecuación del plano que contiene a los puntos A(2, 1, 0), B(0, 1, 1) y C(1, 0, 1)

Solución:

$\vec{AB}(-2, 0, 1) \parallel (2, 0, -1)$

$\vec{AC}(-1, -1, 1) \parallel (1, 1, -1)$

$$\begin{vmatrix} x-2 & y-1 & z \\ 2 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \end{vmatrix} = 0$$

$x + y + 2z = 3$

52. Halla la ecuación del plano que pasa por el punto P(1, 0, –1) y que contiene a la recta siguiente:

$$r \equiv \begin{cases} x + y = 0 \\ z - 1 = 0 \end{cases}$$

Solución:

Se resuelve el sistema:

$$r \equiv \begin{cases} x + y = 0 \\ z - 1 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = -y \\ z = 1 \end{cases}$$

A(0, 0, 1), B(1, –1, 1)

$\vec{AB}(1, -1, 0)$

$\vec{AP}(1, 0, -2)$

$$\begin{vmatrix} x & y & z-1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -2 \end{vmatrix} = 0$$

$2x + 2y + z = 1$

53. Halla la ecuación del plano que pasa por el punto P(1, 0, –1) y es perpendicular al plano:

$$x - y + 2z + 1 = 0$$

y paralelo a la recta:

$$r \equiv \begin{cases} x - 2y = 0 \\ z = 0 \end{cases}$$

Solución:

Un punto del plano: P(1, 0, –1)

El vector normal al plano dado es paralelo al plano buscado: $\vec{u} = \vec{n}(1, -1, 2)$

El vector director $\vec{v}$ de la recta **r** es un vector director del plano buscado.

La ecuación de la recta:

$$r \equiv \begin{cases} x = 2t \\ y = t \\ z = 0 \end{cases} ; \; t \in \mathbb{R}$$

$\vec{v}(2, 1, 0)$

La ecuación del plano buscado:

$$\begin{vmatrix} x-1 & y & z+1 \\ 1 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 0$$

$$2x - 4y - 3z = 5$$

54. Halla la ecuación del plano π que pasa por el punto P(1, –2, 0) y es perpendicular a la recta:

$$r \equiv \begin{cases} x + y = 0 \\ y - 3z + 2 = 0 \end{cases}$$

Solución:

El vector director de la recta es perpendicular al plano:

$$(1, 1, 0) \times (0, 1, -3) = (-3, 3, 1) \parallel (3, -3, -1)$$

Punto: P(1, –2, 0)

La ecuación del plano es:

$3(x - 1) - 3(y + 2) - z = 0$

$3x - 3y - z = 9$

55. Sean las dos rectas siguientes:

$$r \equiv \frac{x+2}{3} = \frac{y-1}{2} = \frac{z+1}{-1}$$

$$s \equiv \frac{x-1}{-2} = \frac{y-3}{-2} = \frac{z}{3}$$

Halla la ecuación de un plano que pase por la recta **r** y sea paralelo a la recta **s**

Solución:

El vector normal al plano es perpendicular a los vectores de dirección de las rectas:

$$\vec{n} = (3, 2, -1) \times (-2, -2, 3) = (4, -7, -2)$$

Punto: P(–2, 1, –1)

La ecuación del plano es:

$4(x + 2) - 7(y - 1) - 2(z + 1) = 0$

$4x - 7y - 2z + 13 = 0$

56. Dadas las rectas:

$$r \equiv x = y = z; \; s \equiv x - 1 = \frac{y-2}{2} = \frac{z}{2}$$

estudia su posición relativa.

Solución:

Recta **r:** $A(0, 0, 0), \vec{u}(1, 1, 1)$

Recta **s:** $B(1, 2, 0), \vec{v}(1, 2, 2)$

$\vec{AB}(1, 2, 0)$

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \end{vmatrix} = -2 \neq 0$$

Las rectas se cruzan.

57. Estudia la posición relativa de las siguientes rectas según los valores del parámetro **a:**

$$r \equiv \begin{cases} x = 1 + t \\ y = 2 - t \\ z = t \end{cases}; \ t \in \mathbb{R}; \quad s \equiv \begin{cases} x = a + 2t \\ y = 3 + t \\ z = 2a + t \end{cases}; \ t \in \mathbb{R}$$

Solución:

Recta **r:** $A(1, 2, 0), \vec{u}(1, -1, 1)$

Recta **s:** $B(a, 3, 2a), \vec{v}(2, 1, 1)$

$\vec{AB}(a - 1, 1, 2a)$

Como los vectores de dirección de **r** y **s** no son paralelos, las rectas se cortan o se cruzan.

Se estudia el rango de la matriz:

$$M = \begin{pmatrix} a-1 & 1 & 2a \\ 1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow |M| = 4a + 3$$

$$4a + 3 = 0 \Rightarrow a = -\frac{3}{4}$$

Si $a = -\frac{3}{4}$

R(M) = 2, porque las dos últimas filas no son proporcionales.

El vector $\vec{AB}$ es linealmente dependiente de $\vec{u}$ y $\vec{v}$. Las rectas se cortan.

Si $a \neq -\frac{3}{4}$, las rectas se cruzan.

58. Dados el plano y la recta siguientes:

$$\pi \equiv x + 2 = 0; \ r \equiv \begin{cases} x - z = 3 \\ y = 0 \end{cases}$$

a) determina su posición relativa.

b) calcula, si existe, el punto P intersección de π y **r**

Solución:

a) Vector normal al plano π:

$$\vec{n}(1, 0, 0)$$

Vector director de **r:**

$$\vec{v} = (1, 0, -1) \times (0, 1, 0) = (1, 0, 1)$$

$$\vec{n} \cdot \vec{v} = (1, 0, 0) \cdot (1, 0, 1) = 1 \neq 0$$

El plano y la recta no son paralelos.

La recta y el plano se cortan en un punto.

b) Con la recta **r** dada por sus ecuaciones implícitas, la forma más rápida de hallar el punto de intersección es resolver el sistema formado por los planos de las rectas y el otro plano:

$$\left.\begin{aligned} 2x \quad\quad + 4 &= 0 \\ x \quad - z &= 3 \\ y \quad\quad &= 0 \end{aligned}\right\} \Rightarrow x = -2, \ y = 0, \ z = -5$$

$P(-2, 0, -5)$

59. Estudia la posición relativa del plano y de la recta siguientes:

$$\pi \equiv x - 3y - z + 6 = 0; \ r \equiv \begin{cases} 2x - 5y - 1 = 0 \\ x + 5z + 7 = 0 \end{cases}$$

Solución:

Vector normal al plano π: $\vec{n}(1, -3, -1)$

Vector director de la recta **r:**

$\vec{v} = (2, -5, 0) \times (1, 0, 5) = (-25, -10, 5) \parallel (5, 2, -1)$

$\vec{v} \cdot \vec{n} = (5, 2, -1) \cdot (1, -3, -1) = 0$

Los vectores son perpendiculares.

La recta puede ser paralela al plano o estar en el plano.

Resolviendo el sistema de ecuaciones que definen **r:**

$x = -5z - 7$

$y = -2z - 3$

$A(-7, -3, 0)$

$\pi \equiv x - 3y - z + 6 = 0$

$-7 - 3(-3) + 6 = 8 \neq 0 \Rightarrow A \notin \pi$

La recta es paralela al plano.

60. Determina la posición relativa de los planos siguientes:

$$\pi_1 \equiv x + y + z = 4$$
$$\pi_2 \equiv x - z = 0$$
$$\pi_3 \equiv x + y = 3$$

Solución:

Se estudia el R(C):

$$|C| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 1 \neq 0$$

$$R(C) = R(A) = 3$$

Los planos se cortan en un punto.

61. Para cada valor del parámetro real **a,** se consideran los tres planos siguientes:

$$\pi_1 \equiv x + y + az = -2$$
$$\pi_2 \equiv x + ay + z = -1$$
$$\pi_3 \equiv ax + y + z = 3$$

a) Calcula los valores de **a** para los cuales los tres planos anteriores tienen una recta en común.

b) Para los valores de **a** calculados, halla unas ecuaciones cartesianas de dicha recta común.

Solución:

a) Se calcula:

$$|C| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & a \\ 1 & a & 1 \\ a & 1 & 1 \end{vmatrix} = -a^3 + 3a - 2$$

$$a^3 - 3a + 2 = 0 \Rightarrow a = 1, a = -2$$

Se estudian los valores que son raíces de $|C| = 0$.

- Para $a = 1$, se tiene:

$$R\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & -2 \\ 1 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

$R(C) = 1, R(A) = 2$

Los tres planos son paralelos.

- Para $a = -2$, se tiene:

$$R\begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 & -2 \\ 1 & -2 & 1 & -1 \\ -2 & 1 & 1 & 3 \end{pmatrix} \begin{array}{l} \\ 1^a - 2^a \\ 2 \cdot 1^a + 2^a \end{array} =$$

$$= R\begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 & -2 \\ 0 & 3 & -3 & -1 \\ 0 & 3 & -3 & -1 \end{pmatrix} \begin{array}{l} \\ \\ = 3^a \end{array} =$$

$$= R\begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 & -2 \\ 0 & 3 & -3 & -1 \end{pmatrix}$$

Se tiene que $R(C) = R(A) = 2$ y, por tanto, el sistema es compatible indeterminado.

Como los coeficientes de las variables de los tres planos no son proporcionales, se cortan en una recta.

62. Se consideran los tres planos siguientes:

$$\pi_1 \equiv x + y + z = 1$$
$$\pi_2 \equiv x - y + z = 2$$
$$\pi_3 \equiv 3x + y + 3z = 5$$

a) ¿Se cortan π_1 y π_2?

b) ¿Hay algún punto que pertenezca a los tres planos?

Solución:

a) $\dfrac{1}{1} \neq \dfrac{1}{-1}$

Los planos son secantes.

b) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 3 & 1 & 3 \end{vmatrix} = 0$

Como hay dos filas que no son proporcionales, $R(C) = 2$

$$R\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 2 \\ 3 & 1 & 3 & 5 \end{pmatrix} \begin{array}{l} \\ 1^a - 2^a \\ 3 \cdot 1^a - 3^a \end{array} =$$

$$= R\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 0 & -2 \end{pmatrix} \begin{array}{l} \\ \\ 3 - 2^a \end{array} = R\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$R(C) = 2$ y $R(A) = 3$

Como las coordenadas de las variables de los puntos no son proporcionales, se cortan dos a dos formando una superficie prismática.

Luego no hay ningún punto en común a los tres planos.

Problemas

63. Se consideran la recta y el plano siguientes en función del parámetro real **m:**

$$r \equiv \begin{cases} x + (1 + m)y + z = 0 \\ (2 + m)x - y - 2z = 0 \end{cases}$$

$$\pi \equiv 3x - z = m$$

a) Estudia la posición relativa de la recta y el plano según los valores del parámetro **m**

b) Para $m = 1$, determina el punto de intersección de la recta y el plano.

Solución:

a) Vector director de la recta **r:**

$$\vec{v} = (1, 1 + m, 1) \times (2 + m, -1, -2) =$$
$$= (-2m - 1, m + 4, -m^2 - 3m - 3)$$

Vector normal al plano π:

$$\vec{n}(3, 0, -1)$$

Se estudia el producto escalar:

$$\vec{v} \cdot \vec{n} = (-2m - 1, m + 4, -m^2 - 3m - 3) \cdot (3, 0, -1) =$$
$$= m^2 - 3m$$

- Si $m \neq 0$ y $m \neq 3$, la recta y el plano se cortan.
- Si $m = 0$, los vectores son perpendiculares y la recta es paralela al plano o está en el plano.

Se toma un punto de la recta y se comprueba si está en el plano:

$$r \equiv \begin{cases} x + y + z = 0 \\ 2x - y - 2z = 0 \end{cases}$$

$$x = \frac{z}{3},\ y = -\frac{4z}{3}$$

$A(1, -4, 3)$

$\pi \equiv 3x - z = 0$

$3 \cdot 1 - 3 = 0 \Rightarrow$ El punto está en el plano; luego la recta también está en el plano.

- Si m = 3, los vectores son perpendiculares y la recta es paralela al plano o está en el plano.

Se toma un punto de la recta y se comprueba si está en el plano:

$$r \equiv \begin{cases} x + 4y + z = 0 \\ 5x - y - 2z = 0 \end{cases}$$

$$x = \frac{z}{3},\ y = -\frac{z}{3}$$

B(1, –1, 3)

$\pi \equiv 3x - z = 3$

$3 \cdot 1 - 3 = 0 \neq 3 \Rightarrow$ El punto $B \notin \pi$

La recta es paralela al plano.

b) Se resuelve el sistema formado por los tres planos:

$$\left.\begin{array}{l} x + 2y + z = 0 \\ 3x - y - 2z = 0 \\ 3x - z = 1 \end{array}\right\} \Rightarrow x = \frac{3}{2}, y = -\frac{5}{2}, z = \frac{7}{2}$$

$$P\left(\frac{3}{2}, -\frac{5}{2}, \frac{7}{2}\right)$$

64. Sean la recta y el plano siguientes:

$$r \equiv \begin{cases} x + y - 1 = 0 \\ x + z + 1 = 0 \end{cases}$$

$$\pi \equiv x + my - z - 3 = 0$$

a) Halla el valor del parámetro **m** para el que la recta sea paralela al plano.

b) Razona si hay algún valor de **m** para el que la recta esté contenida en el plano.

Solución:

a) Vector director de la recta **r:**

$$\vec{v} = (1, 1, 0) \times (1, 0, 1) = (1, -1, -1)$$

Vector normal al plano π:

$$\vec{n}(1, m, -1)$$

Se estudia el producto escalar:

$$\vec{v} \cdot \vec{n} = (1, -1, -1) \cdot (1, m, -1) = 2 - m$$

$$2 - m = 0 \Rightarrow m = 2$$

- Para $m \neq 2$ la recta y el plano se cortan.
- Para m = 2 los vectores son perpendiculares y la recta es paralela al plano o está en el plano.

b) Para ver si la recta está en el plano, se toma un punto de la recta y se sustituye en el plano:

$$r \equiv \begin{cases} x + y - 1 = 0 \\ x + z + 1 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = 1 - x \\ z = -1 - x \end{cases}$$

A(0, 1, –1)

$\pi \equiv x + 2y - z - 3 = 0$

$0 + 2 \cdot 1 - 1(-1) - 3 = 0$

El punto está en el plano.

La recta está contenida en el plano.

65. Determina, en función de los distintos valores de **m,** la posición relativa de los planos siguientes:

$$\pi_1 \equiv mx + y - z = 1$$
$$\pi_2 \equiv x - y + z = 4$$
$$\pi_3 \equiv x + y + mz = m$$

Solución:

$$|C| = \begin{vmatrix} m & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & m \end{vmatrix} = -m^2 - 2m - 1$$

$m^2 + 2m + 1 = 0 \Rightarrow m = -1$

- Para $m \neq -1$, R(C) = R(A) = 3

  Los planos se cortan en un punto.

- Para m = –1

$$R\begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 4 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \end{pmatrix} \begin{array}{l} \\ 1^a + 2^a \\ 1^a + 3^a \end{array} = R\begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 5 \\ 0 & 2 & -2 & 0 \end{pmatrix}$$

R(C) = 2 y R(A) = 3 $\Rightarrow$ Sistema incompatible.

Como las coordenadas de los coeficientes de **x, y, z** del primer y segundo plano son proporcionales, los dos planos son paralelos.

El tercer plano corta a los dos paralelos.

66. Dados el plano y la recta siguientes:

$$\pi \equiv x + y + z = 0$$

$$r \equiv \begin{cases} x = 1 + t \\ y = 2 - t\ ;\ t \in \mathbb{R} \\ z = -4 + t \end{cases}$$

que se cortan en un punto A, halla la ecuación de la recta que pasa por A y B(2, 2, 3)

Solución:

Se obtiene el punto A sustituyendo las coordenadas genéricas de un punto de la recta en el plano:

$1 + t + 2 - t - 4 + t = 0$

$t - 1 = 0$

$t = 1$

El punto A es: A(2, 1, –3)

Vector director de la recta: $\overrightarrow{AB}(0, 1, 6)$

Las ecuaciones de la recta pedida son:

$$\begin{cases} x = 2 \\ y = 1 + t;\ t \in \mathbb{R} \\ z = -3 + 6t \end{cases}$$

67. Dados el punto P(2, 1, 0) y la recta siguiente:

$$r \equiv x = \frac{y - 2}{-2} = z + 2$$

calcula la ecuación del plano que pasa por P y es perpendicular a **r**

Solución:

El vector normal al plano es: $\vec{n}(1, -2, 1)$

La ecuación del plano es:

$x - 2 - 2(y - 1) + z = 0$

$x - 2y + z = 0$

68. Dados los puntos A(1, 1, – 1), B(2, 2, 3) y la recta siguiente:

$$r \equiv \frac{x-1}{2} = \frac{y-2}{2} = \frac{z}{-1}$$

a) halla la ecuación del plano π paralelo a **r** y que pasa por A y B

b) razona la existencia o no de un plano perpendicular a **r** que pasa por A y B. En caso afirmativo, da su ecuación.

Solución:

a) El plano π buscado cumple:

- $\overrightarrow{AB}(1, 1, 4)$ es un vector director plano.
- El vector director de la recta $\vec{v}(2, 2, -1)$ es otro vector director del plano.
- El punto A(1, 1, – 1) es un punto del plano.

Un vector normal al plano será:

$\overrightarrow{AB} \times \vec{v} = (1, 1, 4) \times (2, 2, -1) = (-9, 9, 0) \parallel (1, -1, 0)$

La ecuación del plano será:

$x - 1 - y + 1 = 0$

$x - y = 0$

b) Si el plano es perpendicular a **r**, el vector director de **r** es normal al plano. Dicho vector debe ser perpendicular al vector $\overrightarrow{AB}$

- $\overrightarrow{AB}(1, 1, 4)$
- $\vec{v}(2, 2, -1)$ director de **r** que es normal al plano.

$$\overrightarrow{AB} \cdot \vec{v} = (1, 1, 4) \cdot (2, 2, -1) = 2 + 2 - 4 = 0$$

Luego $\overrightarrow{AB} \perp \vec{v}$

Sea el punto A(1, 1, – 1) del plano.

La ecuación del plano será:

$2(x - 1) + 2(y - 1) - (z + 1) = 0$

$2x + 2y - z - 5 = 0$

69. Si existe, calcula el punto de intersección entre la recta **r** definida por el vector $\vec{v}(-4, 2, 1)$ y el punto A(1, –3, 2) y el plano siguiente:

$$\pi \equiv x + 2y - z = -3$$

Solución:

Las ecuaciones paramétricas de la recta son:

$$\begin{cases} x = 1 - 4t \\ y = -3 + 2t\,;\ t \in \mathbb{R} \\ z = 2 + t \end{cases}$$

Se sustituye un punto genérico de la recta en el plano:

$1 - 4t + 2(-3 + 2t) - (2 + t) = -3$

$t = -4$

El punto buscado es: P(17, – 11, –2)

70. Se considera el plano $\pi \equiv 3x + ay + z = 6$

a) Determina el valor del parámetro **a** para que la recta **r**, que pasa por el punto A(1, 1, 2) y es perpendicular a dicho plano, sea paralela al plano $\pi' \equiv x - y = 3$

b) Escribe las ecuaciones paramétricas de dicha recta.

Solución:

a) Se halla el vector director $\vec{v}$ de la recta **r** en función del parámetro **a:**

r es perpendicular a $\pi \Rightarrow \vec{v}(3, a, 1)$

Por otra parte, **r** es paralela a $\pi' \Rightarrow \vec{v}$ es perpendicular al vector normal de π', es decir,

$(3, a, 1) \cdot (1, -1, 0) = 0$

$3 - a = 0$

$a = 3$

Para a = 3, se cumplen las condiciones del problema.

b) $\vec{v}(3, 3, 1)$

Las ecuaciones paramétricas son:

$$\begin{cases} x = 1 + 3t \\ y = 1 + 3t\,;\ t \in \mathbb{R} \\ z = 2 + t \end{cases}$$

71. Estudia la posición relativa de las rectas siguientes:

$$r \equiv \begin{cases} 2x + z = 9 \\ y = 1 \end{cases};\quad s \equiv \begin{cases} x + y = 0 \\ -x + 2y + 2z = 5 \end{cases}$$

Halla el plano que contiene a **r** y es paralelo a **s**

Solución:

Se halla un punto y un vector director de cada recta.

Recta **r:**

$$r \equiv \begin{cases} 2x + z = 9 \\ y = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} z = 9 - 2x \\ y = 1 \end{cases}$$

A(0, 1, 9)

B(1, 1, 7)

$\vec{u} = \overrightarrow{AB}(1, 0, -2)$

Recta **s:**

$$s \equiv \begin{cases} x + y = 0 \\ -x + 2y + 2z = 5 \end{cases} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} x = -y \\ z = \dfrac{5 - 3y}{2} \end{array}\right\}$$

C(– 1, 1, 1)

D(1, – 1, 4)

$\vec{v} = \overrightarrow{CD}(2, -2, 3)$

Como $\vec{u}$ no es paralelo a $\vec{v}$, las rectas se cortan o se cruzan.

Se estudia el rango de la matriz formada por los vectores $\overrightarrow{AC}(-1, 0, -8), \vec{u}$ y $\vec{v}$:

$$\begin{vmatrix} -1 & 0 & -8 \\ 1 & 0 & -2 \\ 2 & -2 & 3 \end{vmatrix} = 20 \neq 0$$

Las rectas se cruzan.

Plano que contiene a **r** y es paralelo a **s**

El vector normal es:

$\vec{u} \times \vec{v} = (1, 0, -2) \times (2, -2, 3) = (-4, -7, -2) \parallel (4, 7, 2)$

La ecuación del plano es:

$A(0, 1, 9)$

$4x + 7(y - 1) + 2(z - 9) = 0$

$4x + 7y + 2z = 25$

72. Dados el plano

$$\beta \equiv x + y + z - 3 = 0$$

y la recta

$$r \equiv -x = y - 1 = -z$$

a) determina la intersección P del plano β y la recta **r**

b) calcula el plano π que pasa por P y es paralelo al plano

$$\alpha \equiv x - 2y + 3z + 1 = 0$$

c) Sea **s** la recta en que se cortan los planos π y β. Da la ecuación general del plano υ, determinado por las rectas **r** y **s**

Solución:

a) Las ecuaciones paramétricas de **r** son:

$$\begin{cases} x = -t \\ y = 1 + t\,; \quad t \in \mathbb{R} \\ z = -t \end{cases}$$

Para hallar la intersección de **r** y β, se sustituye un punto genérico de **r** en β:

$$-t + 1 + t - t - 3 = 0 \Rightarrow t = -2$$

El punto es: $P(2, -1, 2)$

b) $P(2, -1, 2)$

Vector normal: $\vec{n}(1, -2, 3)$

$x - 2 - 2(y + 1) + 3(z - 2) = 0$

$\pi \equiv x - 2y + 3z = 10$

c) Primero se halla la recta **s**, que es intersección de π y β

La recta **s** pasa por $P(2, -1, 2)$.

El vector de dirección es:

$$\vec{v} = (1, 1, 1) \times (1, -2, 3) = (5, -2, -3)$$

En segundo lugar, se halla el plano υ

El plano pasa por $P(2, -1, 2)$

El vector normal se obtiene del producto vectorial de los vectores directores de **r** y **s:**

$\vec{n} = (-1, 1, -1) \times (5, -2, -3) = (-5, -8, -3) \parallel (5, 8, 3)$

La ecuación del plano es:

$5(x - 2) + 8(y + 1) + 3(z - 2) = 0$

$5x + 8y + 3z = 8$

73. Encuentra el punto de intersección de la recta:

$$r \equiv \begin{cases} x = 1 + t \\ y = 2 - t\,; \quad t \in \mathbb{R} \\ z = t \end{cases}$$

con el plano π perpendicular a **r** que pasa por el origen de coordenadas.

Solución:

Vector de dirección de **r:**

$$\vec{v}(1, -1, 1)$$

Vector normal del plano π que es perpendicular a **r:**

$$\vec{n}(1, -1, 1)$$

Como π pasa por el origen, su ecuación es:

$$\pi \equiv x - y + z = 0$$

La intersección de **r** y π es:

$$1 + t - (2 - t) + t = 0$$

$$3t - 1 = 0$$

$$t = \frac{1}{3}$$

El punto de corte es: $A\left(\frac{4}{3}, \frac{5}{3}, \frac{1}{3}\right)$

74. Calcula el valor de **a** sabiendo que los planos

$$\pi_1 \equiv ax + y - 7z = -5$$
$$\pi_2 \equiv x + 2y + a^2z = 8$$

se cortan en una recta que pasa por el punto $A(0, 2, 1)$ pero no pasa por el punto $B(6, -3, 2)$

Solución:

El punto $A(0, 2, 1)$ debe pertenecer a los dos planos:

$\pi_1 \equiv ax + y - 7z = -5 \Rightarrow 2 - 7 = -5$

$\pi_2 \equiv x + 2y + a^2z = 8 \Rightarrow 4 + a^2 = 8 \Rightarrow a = \pm 2$

Para $a = 2$, la recta intersección de los planos tiene por ecuaciones:

$$r \equiv \begin{cases} 2x + y - 7z = -5 \\ x + 2y + 4z = 8 \end{cases}$$

Se estudia si B pertenece a esta recta:

$$\begin{cases} 2 \cdot 6 - 3 - 7 \cdot 2 = -5 \\ 6 + 2(-3) + 4 \cdot 2 = 8 \end{cases} \Rightarrow B \in r$$

Para $a = -2$, la recta intersección de los planos tiene por ecuaciones:

$$r \equiv \begin{cases} -2x + y - 7z = -5 \\ x + 2y + 4z = 8 \end{cases}$$

Se estudia si B pertenece a esta recta:

$$\begin{cases} -2 \cdot 6 - 3 - 7 \cdot 2 \neq -5 \\ 6 - 3 \cdot 2 + 4 \cdot 2 = 8 \end{cases} \Rightarrow B \notin r$$

Luego el valor pedido es a = −2

75. Dados los planos:

$$\pi \equiv 2x - y + 3z + 1 = 0$$

$$\pi' \equiv 3x + 2y - z + 2 = 0$$

y el punto P(–1, 3, 2), halla la ecuación de una recta **r** que, pasando por P, sea paralela a los planos π y π'

Solución:

El vector de dirección de la recta **r** es perpendicular a los vectores normales de los planos dados:

$$\vec{v} = \vec{n} \times \vec{n}' = (2, -1, 3) \times (3, 2, -1) = (-5, 11, 7)$$

La ecuación de la recta es:

$$\begin{cases} x = -1 - 5t \\ y = 3 + 11t \,;\ t \in \mathbb{R} \\ z = 2 + 7t \end{cases}$$

76. Sean los puntos A(2, 0, 0), B(0, 1, 0) y C(0, 0, 3)

a) Determina la ecuación del plano π que contiene a los tres puntos.

b) Calcula la ecuación de la recta **r** perpendicular al plano π y que pasa por el origen.

Solución:

a) A(2, 0, 0), $\overrightarrow{AB}(-2, 1, 0)$, $\overrightarrow{AC}(-2, 0, 3)$

$$\begin{vmatrix} x-2 & y & z \\ -2 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 3 \end{vmatrix} = 0$$

$$3x + 6y + 2z = 6$$

b) Como **r** es perpendicular a π

$$\vec{v} = \vec{n}(3, 6, 2)$$

la ecuación es: $\begin{cases} x = 3t \\ y = 6t \,;\ t \in \mathbb{R} \\ z = 2t \end{cases}$

Para profundizar

77. Calcula alguna recta que sea paralela al plano de ecuación

$$x - 2y + z = 1$$

y que también sea paralela al plano que pasa por los puntos de coordenadas A(2, 0, 1), B(0, 2, 1) y C(1, –1, 0)

Solución:

Se halla la ecuación del segundo plano y se estudia la posición relativa de ambos.

$$\vec{u} = \overrightarrow{AB}(-2, 2, 0) \,||\, (1, -1, 0)$$

$$\vec{v} = \overrightarrow{AC}(-1, -1, -1) \,||\, (1, 1, 1)$$

La ecuación del segundo plano es:

$$\begin{vmatrix} x-2 & y & z-1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

$$x + y - 2z = 0$$

Luego se tiene: $s \equiv \begin{cases} x + y - 2z = 0 \\ x - 2y + z - 1 = 0 \end{cases}$

Como los coeficientes no son proporcionales, los planos se cortan en una recta.

Si hallamos una recta paralela a **s** y que pase por un punto que no pertenezca a ninguno de los dos planos, la recta será paralela a los planos.

El vector director de la recta **s** es:

$$\vec{w} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & 1 & -2 \\ 1 & -2 & 1 \end{vmatrix} = (-3, -3, -3) \,||\, (1, 1, 1)$$

Se toma un punto que no esté en ninguno de los dos planos, por ejemplo (2, 0, 0). La ecuación de la recta pedida es:

$$x - 2 = y = z$$

78. Dadas las rectas siguientes:

$$r \equiv (x, y, z) = (3, -4, 0) + a(2, -3, -2);\ a \in \mathbb{R}$$

$$s \equiv (x, y, z) = (-7, 1, 2) + b(4, -1, 0);\ b \in \mathbb{R}$$

a) comprueba que las rectas se cortan en un punto.

b) halla la ecuación general del plano que determinan.

Solución:

a) $\overrightarrow{AB}(-10, 5, 2)$

$\vec{u}(2, -3, -2)$

$\vec{v}(4, -1, 0)$

$$\begin{vmatrix} -10 & 5 & 2 \\ 2 & -3 & -2 \\ 4 & -1 & 0 \end{vmatrix} = 0$$

Como los vectores directores no son proporcionales, el rango es 2

Las rectas se cortan en un punto.

b) El plano que determinan es:

$$\begin{vmatrix} x-3 & y+4 & z \\ 2 & -3 & -2 \\ 4 & -1 & 0 \end{vmatrix} = 0$$

$$x + 4y - 5z + 13 = 0$$

79. Sean las rectas:

$$r \equiv x - 2 = \frac{y-1}{k} = \frac{z+1}{-2}; \quad s \equiv \begin{cases} x = 1 + \lambda \\ y = 2 - \lambda;\ \lambda \in \mathbb{R} \\ z = \quad 2\lambda \end{cases}$$

a) Halla el valor de **k** para que **r** y **s** sean coplanarias.

b) Para el valor anterior de **k,** halla la ecuación del plano que contiene a ambas rectas.

Solución:

a) $A(2, 1, -1) \in r,\ B(1, 2, 0) \in s$

$\vec{AB}(-1, 1, 1)$

$\vec{u}(1, k, -2)$

$\vec{v}(1, -1, 2)$

Para que las rectas sean coplanarias, los vectores $\vec{AB}, \vec{u}$ y $\vec{v}$ deben ser dependientes.

$$\begin{vmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & k & -2 \\ 1 & -1 & 2 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow -3k - 3 = 0 \Rightarrow k = -1$$

b) $\vec{u}(1, -1, -2), \vec{v}(1, -1, 2), A(2, 1, -1)$

$$\begin{vmatrix} x-2 & y-1 & z+1 \\ 1 & -1 & -2 \\ 1 & -1 & 2 \end{vmatrix} = 0$$

$x + y = 3$

80. Sea la recta:

$$r \equiv \frac{x-1}{3} = \frac{y}{2} = \frac{z+1}{-1}$$

a) Determina la ecuación del plano π_1 que es perpendicular a la recta **r** y que pasa por $P(1, 2, 3)$

b) Determina la ecuación del plano π_2 que es paralelo a la recta **r** y que pasa por los puntos $P(1, 2, 3)$ y $Q(-1, 0, 2)$

c) Sea la recta **s,** en la que se cortan los planos π_1 y π_2. Determina de forma razonada la posición relativa de las rectas **r** y **s**

Solución:

a) El plano π_1 tiene como vector normal al vector de dirección de la recta **r**

$\vec{n} = \vec{u}(3, 2, -1)$

$3(x - 1) + 2(y - 2) - (z - 3) = 0$

$\pi_1 \equiv 3x + 2y - z = 4$

b) El vector de dirección de **r** y el vector $\vec{PQ}$ son vectores directores del plano.

$\vec{u}(3, 2, -1)$

$\vec{PQ}(-2, -2, -1) \,||\, (2, 2, 1)$

$$\begin{vmatrix} x-1 & y-2 & z-3 \\ 3 & 2 & -1 \\ 2 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

$\pi_2 \equiv 4x - 5y + 2z = 0$

c) Recta **r:**

$A(1, 0, -1)$

$\vec{u}(3, 2, -1)$

Recta **s:**

$$s \equiv \begin{cases} 3x + 2y - \ \ z = 4 \\ 4x - 5y + 2z = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \dfrac{z+20}{23} \\ y = \dfrac{2(5z+8)}{23} \end{cases}$$

$B(1, 2, 3)$

$C(2, 12, 26)$

$\vec{v} = \vec{BC}(1, 10, 23)$

Hay que estudiar el rango de la matriz formada por las coordenadas de los vectores:

$\vec{AB}(0, 2, 4) \,||\, (0, 1, 2)$

$\vec{u}(3, 2, -1)$

$\vec{v}(1, 10, 23)$

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 3 & 2 & -1 \\ 1 & 10 & 23 \end{vmatrix} = -14 \neq 0$$

Los vectores son linealmente independientes.

Las rectas se cruzan.

81. Demuestra que las rectas:

$$r \equiv \begin{cases} y = 0 \\ z = 0 \end{cases}; \quad s \equiv \begin{cases} x - ay \quad = 0 \\ \qquad\quad z = 5 \end{cases}$$

se cruzan, cualquiera que sea el valor del parámetro **a**

Solución:

• Recta **r:**

$$r \equiv \begin{cases} x = \lambda \\ y = 0\ ;\ \lambda \in \mathbb{R} \\ z = 0 \end{cases}$$

$A(0, 0, 0)$

$\vec{u}(1, 0, 0)$

• Recta **s:**

$$s \equiv \begin{cases} x = a\mu \\ y = \mu \quad ;\ \mu \in \mathbb{R} \\ z = 5 \end{cases}$$

$B(0, 0, 5)$

$\vec{v}(a\ 1, 0)$

$\vec{AB}(0, 0, 5)$

Se estudia el rango de la matriz formada por los vectores $\vec{AB}, \vec{u}$ y $\vec{v}$:

$$\begin{vmatrix} 0 & 0 & 5 \\ 1 & 0 & 0 \\ a & 1 & 0 \end{vmatrix} = 5 \neq 0 \text{ para cualquier valor de } \mathbf{a}$$

Luego las rectas se cruzan independientemente del valor del parámetro **a**

82. Determina para qué valores de **a** y **b** los planos:

$$\pi_1 \equiv 2x - y + 3z - 1 = 0$$
$$\pi_2 \equiv x + 2y - z + b = 0$$
$$\pi_3 \equiv x + ay - 6z + 10 = 0$$

a) tienen un solo punto en común.

b) pasan por una recta.

c) se cortan dos a dos en tres rectas paralelas distintas.

Solución:

Se estudia el sistema según los valores de **a** y **b** y se contesta a las preguntas:

$$\begin{vmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 1 & 2 & -1 \\ 1 & a & -6 \end{vmatrix} = 5a - 35$$

$5a - 35 = 0 \Rightarrow a = 7$

Para $a \neq 7$, el $R(C) = R(A) = 3$

El sistema es compatible determinado para cualquier valor de **b**

• Si $a = 7$:

$$R\begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 & -1 \\ 1 & 2 & -1 & b \\ 1 & 7 & -6 & 10 \end{pmatrix} =$$

$$= R\begin{pmatrix} 1 & 7 & -6 & 10 \\ 2 & -1 & 3 & -1 \\ 1 & 2 & -1 & b \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ 2 \cdot 1^a - 2^a \\ 1^a - 3^a \end{matrix} =$$

$$= R\begin{pmatrix} 1 & 7 & -6 & 10 \\ 0 & 15 & -15 & 21 \\ 0 & 5 & -5 & 10 - b \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ 2^a : 3 \\ 2^a : 3 - 3^a \end{matrix} =$$

$$= R\begin{pmatrix} 1 & 7 & -6 & 10 \\ 0 & 5 & -5 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & b - 3 \end{pmatrix}$$

Si $b - 3 = 0 \Rightarrow b = 3$

$R(C) = R(A) = 2$

El sistema es compatible indeterminado.

• Si $b \neq 3$:

$R(C) = 2$ y el $R(A) = 3$

El sistema es incompatible.

a) Se cortan en un punto para $a \neq 7$ y cualquier valor de **b**

b) Si $a = 7$ y $b = 3$, los tres planos tienen una recta en común.

c) Si $a = 7$ y $b \neq 3$, los planos se cortan dos a dos y forman una superficie prismática.

83. Sean las rectas siguientes:

$$r \equiv \begin{cases} x + y + z = 2 \\ x + 2y - 3z = 8 \end{cases}; \quad s \equiv \begin{cases} kx - y - z = 1 \\ x - y + z = -2 \end{cases}$$

a) Determina el valor del parámetro **k** para que las rectas **r** y **s** se corten.

b) Halla el punto de corte de las rectas **r** y **s** para el valor de **k** hallado anteriormente.

Solución:

a) Las dos rectas están definidas mediante dos planos cada una. Si las rectas se cortan, los cuatro planos deben tener un punto en común, es decir, el rango de la matriz ampliada del sistema formado por los cuatro planos debe ser 3. Por tanto, el determinante de orden 4 de la matriz ampliada debe ser cero:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & -3 & 8 \\ k & -1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -2 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow 16 - 8k = 0 \Rightarrow k = 2$$

b) Para $k = 2$ se resuelve el sistema:

$$\left.\begin{aligned} x + y + z &= 2 \\ x + 2y - 3z &= 8 \\ 2x - y - z &= 1 \\ x - y + z &= -2 \end{aligned}\right\} \begin{matrix} \\ 2^a - 1^a \\ 2 \cdot 1^a - 3^a \\ 1^a - 4^a \end{matrix}$$

$$\left.\begin{aligned} x + y + z &= 2 \\ y - 4z &= 6 \\ 3y + 3z &= 3 \\ 2y \quad &= 4 \end{aligned}\right\} \begin{matrix} \\ \\ 3^a : 3 \\ y = 2 \end{matrix}$$

$$\left.\begin{aligned} x + 2 + z &= 2 \\ 2 - 4z &= 6 \\ 2 + z &= 1 \\ y &= 2 \end{aligned}\right\} z = -1$$

$$\left.\begin{aligned} x + 2 - 1 &= 2 \\ z &= -1 \\ y &= 2 \end{aligned}\right\} x = 1$$

La solución es: $x = 1, y = 2, z = -1$

Paso a paso

84. Representa el punto A(5, –2, 4) y el vector director $\vec{v}(-3, 4, 1)$. Halla y representa la recta que determinan.

Solución:
Resuelto en el libro del alumnado.

85. Representa el punto A(3, –4, 2) y los vectores $\vec{u}(1, 2, -1)$ y $\vec{v}(4, 3, 5)$. Halla el plano que determinan y represéntalo.

Solución:
Resuelto en el libro del alumnado.

86. Halla la posición relativa de la recta y el plano siguientes, y si se cortan, halla el punto de corte. Representa la recta y el plano.

$$r \equiv \frac{x-1}{3} = y + 2 = \frac{z-1}{-4}$$

$$\pi \equiv x + 2y - 3z = 11$$

Solución:
Resuelto en el libro del alumnado.

87. Estudia la posición relativa de los siguientes planos y represéntalos.

$$\pi \equiv x - y + z = 2$$
$$\pi' \equiv x + y - 3z = 4$$
$$\pi'' \equiv 3x - y - z = -3$$

Solución:
Resuelto en el libro del alumnado.

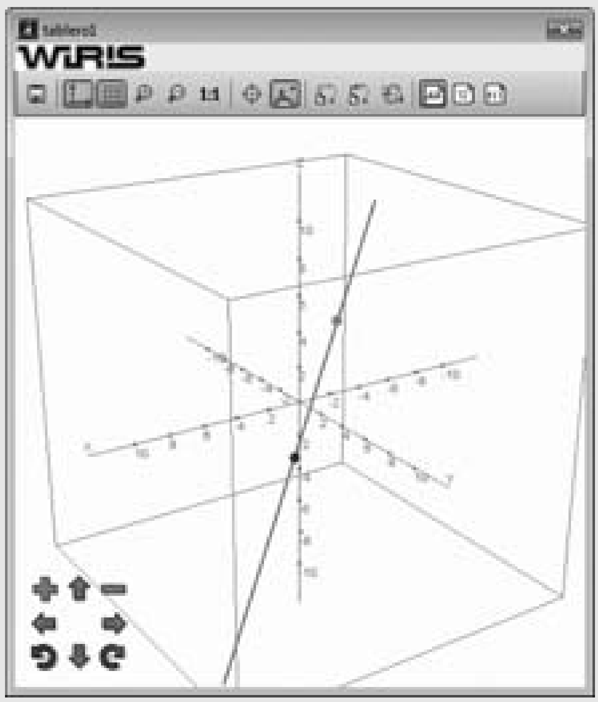
88. **Internet.** Abre: **www.editorial-bruno.es** y elige **Matemáticas, curso** y **tema.**

Practica

89. Representa los puntos A(3, 4, –1), B(–1, 2, 5). Halla y representa la recta que determinan.

Solución:

```
Ejercicio 89
A := punto(3, 4, -1) → punto(3,4,-1)
dibujar3d(A, {color = azul, tamaño_punto = 8})
B := punto(-1, 2, 5) → punto(-1,2,5)
dibujar3d(B, {color = verde, tamaño_punto = 8})
r = recta(A, B) → x-2·y+5=0∩11·x-7·y+5·z=0
dibujar3d(r, {color = rojo, anchura_linea = 2})
```



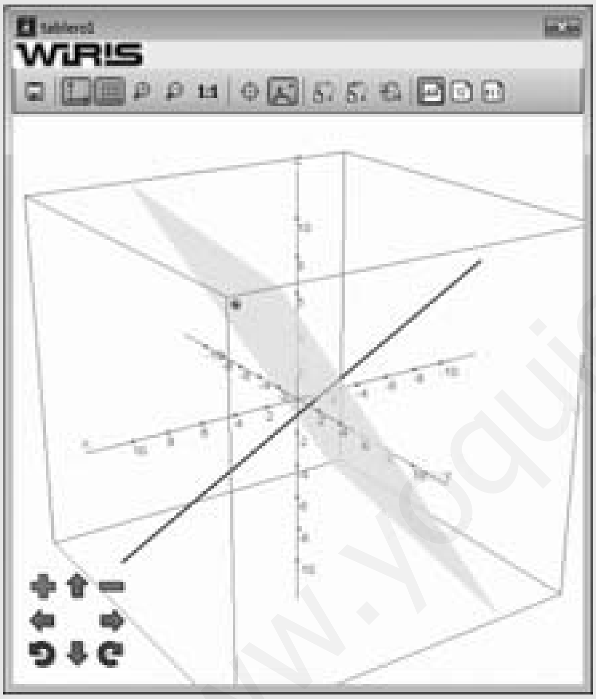
90. Halla la ecuación del plano que pasa por A(2, –3, 5) y es perpendicular a la recta:

$$\left.\begin{aligned} x + 2y + z &= 1 \\ 3x + 2y + 4z &= 0 \end{aligned}\right\}$$

Representa la recta y el plano.

Solución:

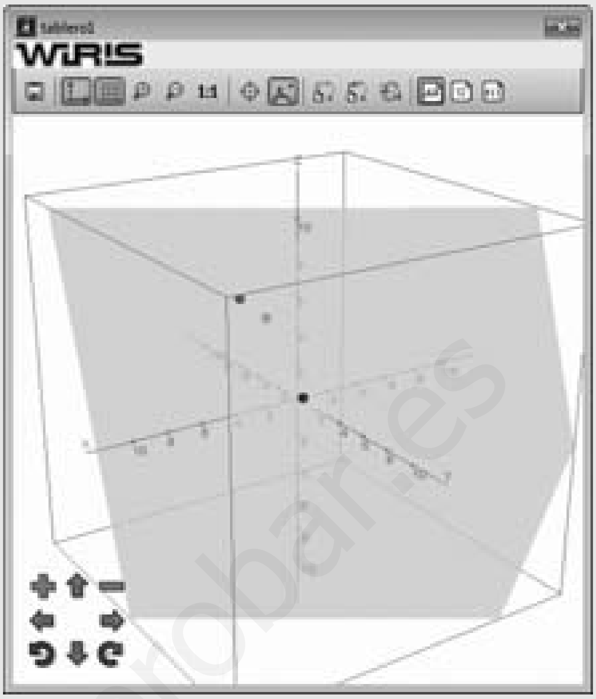
```
Ejercicio 90
A := punto(2, −3, 5) → punto(2,−3,5)
p = plano(x + 2y + z = 1) → x+2·y+z−1=0
q = plano(3x + 2y + 4z = 0) → 3·x+2·y+4·z=0
r = p ∩ q → {−x−6·y+4=0∩3·x+2·y+4·z=0}
dibujar3d(A, {color = rojo, tamaño_punto = 8})
dibujar3d(r, {color = azul, anchura_linea = 2})
n = [1, 2, 1] × [3, 2, 4] → [6, −1, −4]
o = plano(A, n) → 6·x−y−4·z+5=0
dibujar3d(o, {color = rosa})
```



91. Halla la ecuación del plano que pasa por los puntos A(1, 2, 1), B(2, 0, 5) y C(3, –1, 6). Represéntalo.

Solución:

```
Ejercicio 91
A := punto(1, 2, 1) → punto(1,2,1)
B := punto(2, 0, 5) → punto(2,0,5)
C := punto(3, −1, 6) → punto(3,−1,6)
dibujar3d(A, {color = azul, tamaño_punto = 8})
dibujar3d(B, {color = cian, tamaño_punto = 8})
dibujar3d(C, {color = magenta, tamaño_punto = 8})
p = plano(A, B, C) → 2·x+3·y+z−9=0
dibujar3d(p, {color = rosa}) → tablero1
```



92. Estudia la posición relativa de las siguientes rectas y represéntalas:

$$x - 2 = \frac{y-3}{-3} = \frac{z-2}{2}; \quad \frac{x-5}{2} = \frac{y+5}{-5} = \frac{z-1}{-3}$$

Solución:

```
Ejercicio 92
A = punto(2, 3, 2) → (2,3,2)
u = [1, −3, 2] → [1,−3,2]
r = recta(A, u) → −3·x−y+9=0∩−12·x+2·y+9·z=0
dibujar3d(r, {color = azul, anchura_linea = 2})
B = punto (5, −5, 1) → (5,−5,1)
v = [2, −5, −3] → [2,−5,−3]
s = recta(B, v) → −5·x−2·y+15=0∩−20·x−17·y+15·z=0
dibujar3d(s, {color = verde, anchura_linea = 2})
AB = vector(A, B) → [3,−8,−1]
```

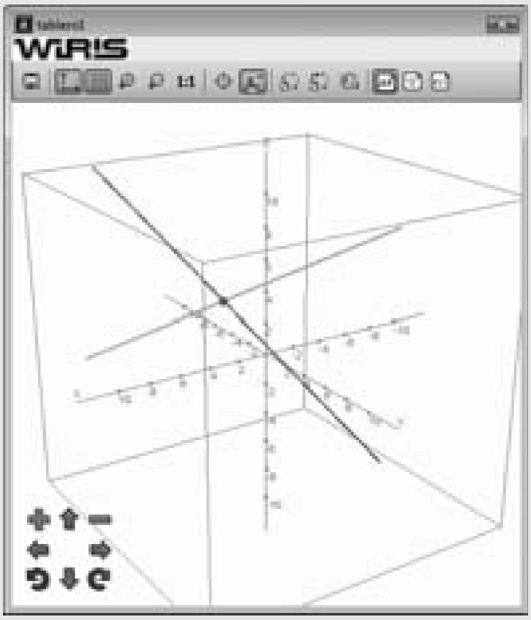
$$\begin{vmatrix} 3 & -8 & -1 \\ 1 & -3 & 2 \\ 2 & -5 & -3 \end{vmatrix} \rightarrow 0$$

Los vectores u y v no son paralelos porque no son proporcionales, las rectas son secantes.

```
P = r∩s → {(3,0,4)}
```

El punto de intersección es P(3, 0, 4)

```
dibujar3d(P, {color = rojo, tamaño_punto = 8})
```

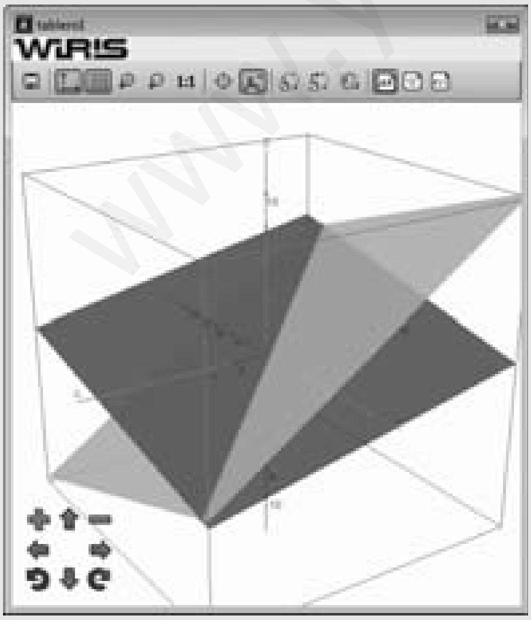


93. Estudia la posición relativa de los siguientes planos y represéntalos:

$$\pi \equiv x + y + 5z = 3; \;\; \pi' \equiv 2x - y + 3z = 1$$

Solución:

```
Ejercicio 93
p = plano(x + y + 5z = 3)  ⟶  x+y+5·z−3=0
q = plano(2x − y + 3z = 1)  ⟶  2·x−y+3·z−1=0
Los coeficientes de x, y, z no son proprocionales,
los dos planos se cortan en una recta.
dibujar3d(p, {color = azul})
dibujar3d(q, {color = verde})
r = p ∩ q  ⟶  {7·x−8·y+4=0∩5·x−4·y+4·z=0}
dibujar3d(r, {color = rojo, anchura_linea = 4})
```

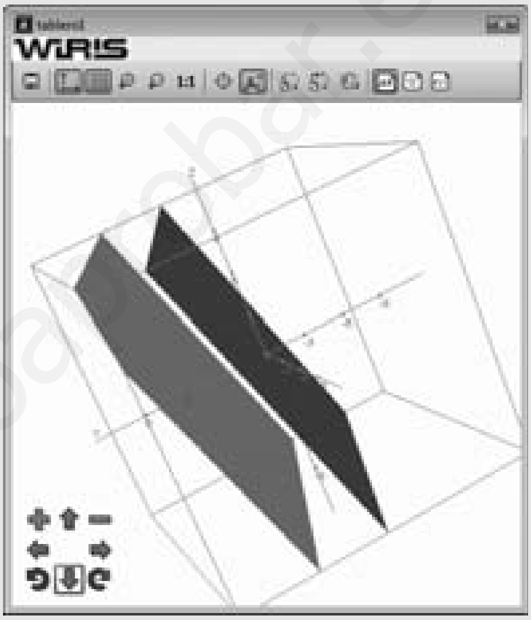


94. Estudia la posición relativa de los siguientes planos y represéntalos:

$$\pi \equiv x + 3y - z = 15; \;\; \pi' \equiv 2x + 6y - 2z = 1$$

Solución:

```
Ejercicio 94
p = plano(x + 3y − z = 15)  ⟶  x+3·y−z−15=0
q = plano(2x + 6y − 2z = 1)  ⟶  2·x+6·y−2·z−1=0
Los coeficientes de x, y, z son proprocionales y
no lo son los términos independientes,
los dos planos son paralelos.
dibujar3d(p, {color = rojo})
dibujar3d(q, {color = azul})
```



95. Estudia la posición relativa de los siguientes planos y represéntalos:

$$\pi \equiv x + 2y - z = -3$$
$$\pi' \equiv x + 7y - 6z = -10$$
$$\pi'' \equiv 2x - y + 3z = 1$$

Solución:

Ejercicio 95

o = plano(x + 2y − z = −3) ⟶ x+2·y−z+3=0

p = plano(x + 7y − 6z = −10) ⟶ x+7·y−6·z+10=0

q = plano(2x − y + 3z = 1) ⟶ 2·x−y+3·z−1=0

$$\text{rango}\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 1 & 7 & -6 \\ 2 & -1 & 3 \end{pmatrix} \longrightarrow 2$$

$$\text{rango}\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & -3 \\ 1 & 7 & -6 & -10 \\ 2 & -1 & 3 & 1 \end{pmatrix} \longrightarrow 2$$

R(C) = R(A) = 2 y como no hay hay dos planos coincidentes, los tres planos se cortan en una recta.

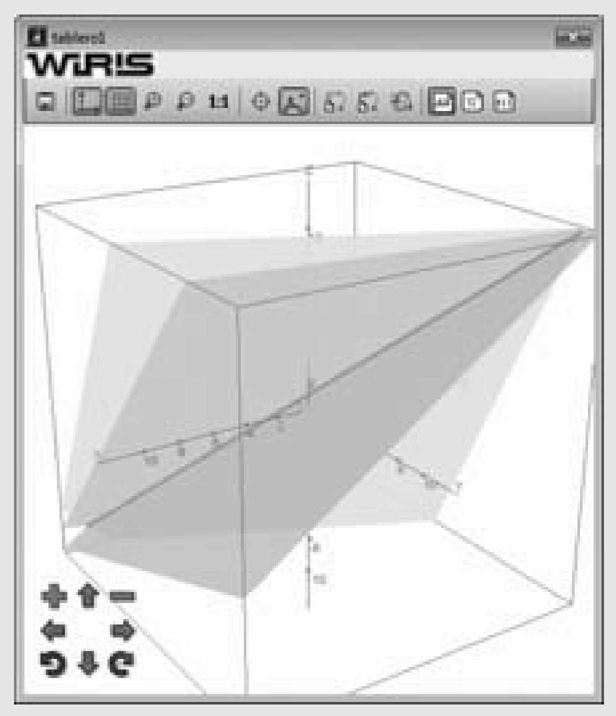
dibujar3d(o, {color = amarillo})

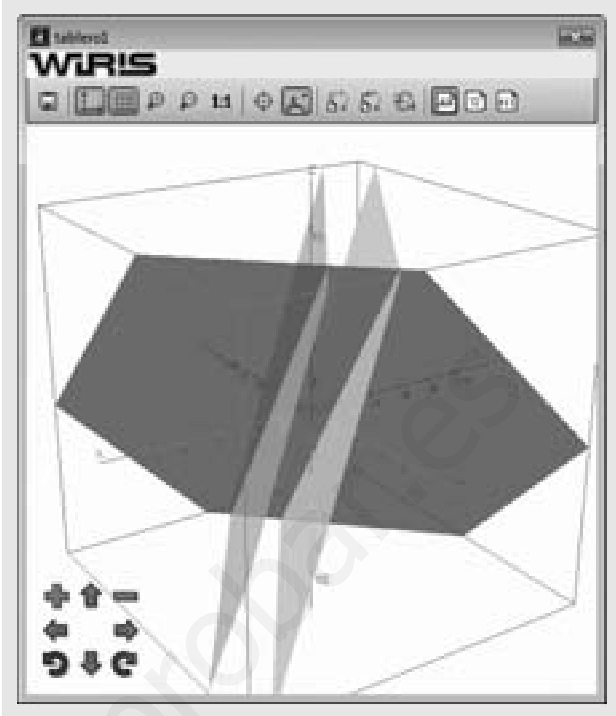
dibujar3d(p, {color = rosa})

dibujar3d(q, {color = cian})

r = o ∩ p ⟶ {5·x+5·y+8=0∩7·x−y+8·z=0}

dibujar3d(r, {color = rojo, anchura_linea = 4})





96. Estudia la posición relativa de los siguientes planos y represéntalos:

$$\pi \equiv 3x - 2y + z = 8$$
$$\pi' \equiv x + y - z = 1$$
$$\pi'' \equiv -6x + 4y - 2z = 7$$

Solución:

Ejercicio 96

o = plano(3x − 2y + z = 8) → $3 \cdot x - 2 \cdot y + z - 8 = 0$

p = plano(x + y − z = 1) → $x + y - z - 1 = 0$

q = plano(−6x + 4y − 2z = 7) → $-6 \cdot x + 4 \cdot y - 2 \cdot z - 7 = 0$

$\text{rango}\begin{pmatrix} 3 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ -6 & 4 & -2 \end{pmatrix} \rightarrow 2$

$\text{rango}\begin{pmatrix} 3 & -2 & 1 & 8 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \\ -6 & 4 & -2 & 7 \end{pmatrix} \rightarrow 3$

R(C) = 2, R(A) = 3, los planos 1º y 3º son paralelos, el 2º es secante a los otros dos.

dibujar3d(o, {color = rojo})

dibujar3d(p, {color = azul})

dibujar3d(q, {color = verde})

97. Estudia la posición relativa de los siguientes planos y represéntalos:

$$\pi \equiv 3x + y - z = 8$$
$$\pi' \equiv x + 2y + z = 9$$
$$\pi'' \equiv 2x - y + 3z = 4$$

Solución:

Ejercicio 97

o = plano(3x + y − z = 8) → $3 \cdot x + y - z - 8 = 0$

p = plano(x + 2y + z = 9) → $x + 2 \cdot y + z - 9 = 0$

q = plano(2x − y + 3z = 4) → $2 \cdot x - y + 3 \cdot z - 4 = 0$

$\text{rango}\begin{pmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & -1 & 3 \end{pmatrix} \rightarrow 3$

$\text{rango}\begin{pmatrix} 3 & 1 & -1 & 8 \\ 1 & 2 & 1 & 9 \\ 2 & -1 & 3 & 4 \end{pmatrix} \rightarrow 3$

R(C) = R(A) = 3, los tres planos se cortan en un punto

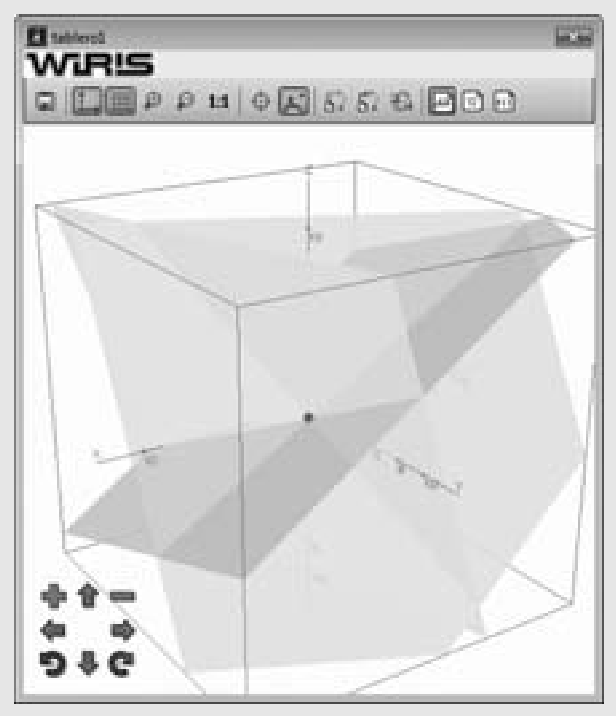
dibujar3d(o, {color = rosa})

dibujar3d(p, {color = amarillo})

dibujar3d(q, {color = cian})

P = o ∩ p ∩ q → {(2,3,1)}

dibujar3d(P, {color = rojo, tamaño_punto = 8})



98. Determina el valor de **k** para que los siguientes planos se corten en una recta:

$$\pi \equiv x + 2y - z = -3$$
$$\pi' \equiv x + ky - 6z = -10$$
$$\pi'' \equiv 2x - y + 3z = 1$$

Representa los tres planos para el valor de **k** hallado.

Solución:

Ejercicio 98

Para que se corten en una recta, R(C) = R(A) = 2

Para ello, hacemos que |C| = 0 y comprobamos los dos rangos.

$$\text{resolver}\left(\begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 1 & k & -6 \\ 2 & -1 & 3 \end{vmatrix} = 0\right) \rightarrow \{\{k=7\}\}$$

$$\text{rango}\left(\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 1 & 7 & -6 \\ 2 & -1 & 3 \end{pmatrix}\right) \rightarrow 2$$

$$\text{rango}\left(\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & -3 \\ 1 & 7 & -6 & -10 \\ 2 & -1 & 3 & 1 \end{pmatrix}\right) \rightarrow 2$$

o = plano(x + 2y − z = −3) → x+2·y−z+3=0

p = plano(x + 7y − 6z = −10) → x+7·y−6·z+10=0

q = plano(2x − y + 3z = 1) → 2·x−y+3·z−1=0

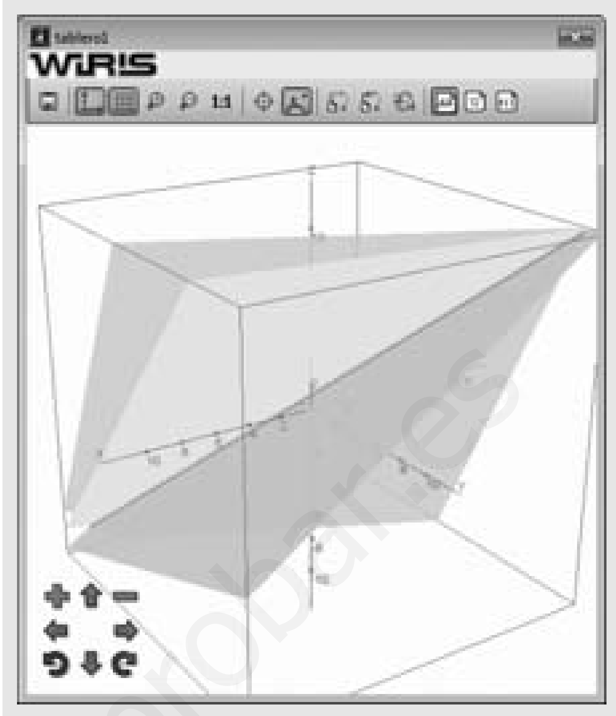
dibujar3d(o, {color = rosa})

dibujar3d(p, {color = amarillo})

dibujar3d(q, {color = cian})

r = o ∩ p → {5·x+5·y+8=0∩7·x−y+8·z=0}

dibujar3d(r, {color = rojo, anchura_linea = 4})



99. Considera la recta: $r \equiv \dfrac{x-1}{2} = \dfrac{y+5}{-5} = \dfrac{z+3}{4}$

y el plano $\pi \equiv 2x + 4y + 4z = 5$

a) Estudia la posición relativa de **r** y π

b) Calcula la ecuación implícita de un plano π_1 que es perpendicular a π y contiene a **r**

Solución:

Ejercicio 99

a)

v = [2, −5, 4] → [2, −5,4]

n = [2, 4, 4] → [2,4,4]

v · n → 0

A := punto(1, −5, −3) → punto(1, −5, −3)

p = plano(2x + 4y + 4z = 5) → 2·x+4·y+4·z−5=0

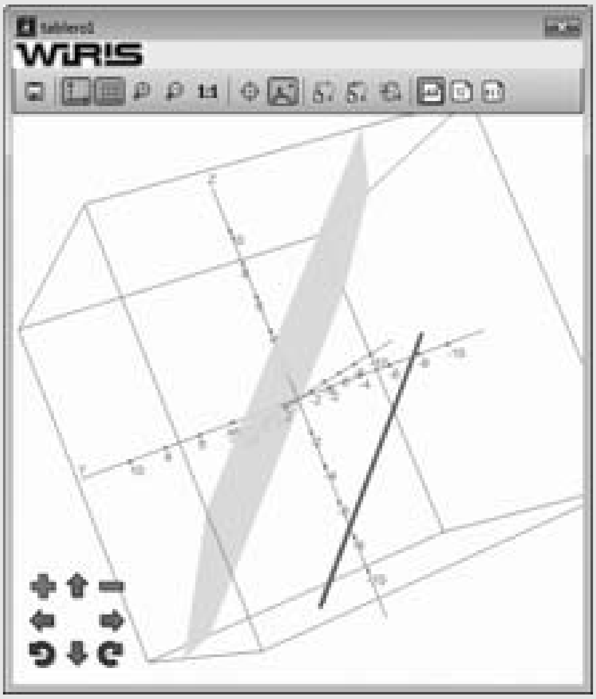
2 · 1 + 4(−5) + 4(−3) → −30

La recta y el plano son paralelos.

r = recta(A, v) → 5·x+2·y+5=0∩−7·x−2·y+z=0

dibujar3d(r, {color = rojo, anchura_linea = 4})

dibujar3d(p, {color = amarillo})



99

b)

A = punto(1, −5, −3) ➞ (1, −5, −3)

v = [2, −5, 4] ➞ [2, −5, 4]

r = recta(A, v) ➞ $5 \cdot x + 2 \cdot y + 5 = 0 \cap -7 \cdot x - 2 \cdot y + z = 0$

dibujar3d(r, {color = cian, anchura_linea = 4})

p = plano(2x + 4y + 4z = 5) ➞ $2 \cdot x + 4 \cdot y + 4 \cdot z - 5 = 0$

dibujar3d(p, {color = azul})

$$\begin{vmatrix} x-1 & y+5 & z+3 \\ 2 & -5 & 4 \\ 2 & 4 & 4 \end{vmatrix} \rightarrow -36 \cdot x + 18 \cdot z + 90$$

q = plano($-36 \cdot x + 18 \cdot z = -90$) ➞ $-2 \cdot x + z + 5 = 0$

dibujar3d(q, {color = amarillo})