2 Determinantes

ACTIVIDADES INICIALES

I. Enumera las inversiones que aparecen en las siguientes permutaciones y calcula su paridad, comparándolas con la permutación principal 1234.

a) 1342 b) 3412 c) 4321 d) 2314 e)4123 f) 2341

a) $3 \leftrightarrow 2, 4 \leftrightarrow 2$, par

b) $3 \leftrightarrow 1, 3 \leftrightarrow 2, 4 \leftrightarrow 1, 4 \leftrightarrow 2$, par

c) $4 \leftrightarrow 1, 4 \leftrightarrow 2, 4 \leftrightarrow 3, 3 \leftrightarrow 1, 3 \leftrightarrow 2, 2 \leftrightarrow 1$, par

d) $2 \leftrightarrow 1, 3 \leftrightarrow 1$, par

e) $4 \leftrightarrow 1, 4 \leftrightarrow 2, 4 \leftrightarrow 3$, impar

f) $2 \leftrightarrow 1, 3 \leftrightarrow 1, 4 \leftrightarrow 1$, impar

II. Para las siguientes matrices, forma todos los posibles productos en los que aparezca un único elemento de cada fila y columna.

a) $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$ **b)** $B = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 1 & 5 \end{pmatrix}$ **c)** $C = \begin{pmatrix} 3 & 0 & -3 \\ -1 & 2 & 1 \\ 4 & 2 & 5 \end{pmatrix}$

a) $a_{11}a_{22},\ a_{21}a_{12}$

b) $2\cdot 5,\ 1(-3)$

c) $3\cdot 2\cdot 5,\ (-1)2(-3),\ 4\cdot 0\cdot 1,\ 3\cdot 2\cdot 1,\ (-1)\cdot 0\cdot 5,\ 4\cdot 2(-3)$

EJERCICIOS PROPUESTOS

2.1. (TIC) Halla los siguientes determinantes.

a) $\begin{vmatrix} 2 & -3 \\ -2 & 7 \end{vmatrix}$ **b)** $\begin{vmatrix} 3 & 4 & -6 \\ 2 & 1 & 5 \\ 3 & -1 & 1 \end{vmatrix}$

a) $\begin{vmatrix} 2 & -3 \\ -2 & 7 \end{vmatrix} = 2 \cdot 7 - (-2)(-3) = 14 - 6 = 8$

b) $\begin{vmatrix} 3 & 4 & -6 \\ 2 & 1 & 5 \\ 3 & -1 & 1 \end{vmatrix} = 3 + 60 + 12 + 18 - 8 + 15 = 100$

2.2. Verifica que para las matrices de órdenes 2 y 3:

a) El determinante de la matriz unidad es 1.

b) El determinante de una matriz triangular es igual al producto de los elementos de la diagonal principal.

c) Para el orden 3, la definición en términos de productos de elementos lleva a la regla de Sarrus.

a) $\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 \cdot 1 - 0 \cdot 0 = 1$ $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 + 0 + 0 - 0 - 0 - 0 = 1$

b) $\begin{vmatrix} a_{11} & 0 \\ 0 & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}$ $\begin{vmatrix} a_{11} & 0 & 0 \\ 0 & a_{22} & 0 \\ 0 & 0 & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33}$

c) $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{13}a_{22}a_{3}$

2.3. (TIC) Desarrolla el siguiente determinante de orden 4 por la segunda fila y halla su valor.

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 5 & 4 & 2 \\ 3 & 4 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} 2 & 0 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 5 & 4 & 2 \\ 3 & 4 & 1 & -1 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 0 & 2 & -1 \\ 5 & 4 & 2 \\ 4 & 1 & -1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 2 & 2 & -1 \\ -1 & 4 & 2 \\ 3 & 1 & -1 \end{vmatrix} = -(0-5+16+16+10+0)+(-8+1+12+12-4-2) = -26$$

2.4. (TIC) Calcula el determinante de la siguiente matriz de orden 5 explicando, razonadamente, cada uno de los pasos dados.

$$B = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 0 \\ -1 & 2 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Desarrollamos por la última columna:

$$|B| = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 0 \\ -1 & 2 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ -1 & 2 & 0 & 0 \end{vmatrix} = -(-1)\begin{vmatrix} 0 & 2 & -1 \\ 1 & 2 & 3 \\ -1 & 2 & 0 \end{vmatrix} - 4\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & -1 \\ -1 & 2 & 0 \end{vmatrix} = -10 - 4\cdot 5 = -30$$

2.5. (PAU) De una matriz cuadrada *A* se sabe que su determinante vale –1, y que el determinante de la matriz 2*A* vale –8. ¿Cuál es el orden de la matriz?

Si A es una matriz de dimensión n, se sabe que $|kA| = k^n\,|A|$. Como $|2A| = 8\,|A| = 2^3\,|A|$, resulta que $n = 3$.

2.6. Escribe una matriz genérica de orden 3 y comprueba que su determinante coincide con el de su matriz traspuesta.

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{13}a_{22}a_{31}$$

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & a_{31} \\ a_{12} & a_{22} & a_{32} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{13}a_{22}a_{31}$$

Los determinantes coinciden.

2.7. (PAU) Obtén el valor del siguiente determinante explicando razonadamente las propiedades que aplicas en cada paso.

$$\begin{vmatrix} abc & -ab & a^2 \\ -b^2c & 2b^2 & -ab \\ b^2c^2 & -b^2c & 3abc \end{vmatrix}$$

Sacando el factor $b\,c$ de la primera columna, el factor b de la segunda columna y el factor a de la tercera columna, se tiene:

$$\begin{vmatrix} abc & -ab & a^2 \\ -b^2c & 2b^2 & -ab \\ b^2c^2 & -b^2c & 3abc \end{vmatrix} = bc \cdot b \cdot a \begin{vmatrix} a & -a & a \\ -b & 2b & -b \\ bc & -bc & 3bc \end{vmatrix}$$

Ahora sacamos el factor a de la primera fila, el factor b de la segunda y el factor bc de la tercera, y se obtiene:

$$ab^2c \begin{vmatrix} a & -a & a \\ -b & 2b & -b \\ bc & -bc & 3bc \end{vmatrix} = ab^2c \cdot a \cdot b \cdot bc \begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 3 \end{vmatrix} = 2a^2\,b^4\,c^2$$

2.8. (TIC) Utiliza solo diferencia de filas (sin multiplicar por números), para comprobar que el siguiente determinante vale cero. $\begin{vmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{2} & \mathbf{3} & \mathbf{4} \\ \mathbf{5} & \mathbf{6} & \mathbf{7} & \mathbf{8} \\ \mathbf{9} & \mathbf{10} & \mathbf{11} & \mathbf{12} \\ \mathbf{13} & \mathbf{14} & \mathbf{15} & \mathbf{16} \end{vmatrix}$

$F_1 = F_2 + F_3 - F_4$. Por tanto, $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \\ 9 & 10 & 11 & 12 \\ 13 & 14 & 15 & 16 \end{vmatrix} = 0$.

2.9. (TIC) Transforma el siguiente determinante en otro que tenga nulos todos los elementos de la primera fila salvo el primero y calcula después su valor. $\begin{vmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{0} & \mathbf{1} & \mathbf{2} \\ \mathbf{-1} & \mathbf{1} & \mathbf{2} & \mathbf{-1} \\ \mathbf{1} & \mathbf{3} & \mathbf{2} & \mathbf{2} \\ \mathbf{2} & \mathbf{-1} & \mathbf{0} & \mathbf{1} \end{vmatrix}$

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 & 2 \\ -1 & 1 & 2 & -1 \\ 1 & 3 & 2 & 2 \\ 2 & -1 & 0 & 1 \end{vmatrix} \xrightarrow[\substack{C_3 \leftrightarrow C_3 - C_1 \\ C_4 \leftrightarrow C_4 - 2C_1}]{} \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 3 & 1 \\ 1 & 3 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & -2 & -3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 3 & 1 & 0 \\ -1 & -2 & -3 \end{vmatrix} = -3 - 6 + 0 + 1 + 0 + 27 = 19$$

2.10. (TIC) Calcula el siguiente determinante por el método de Gauss. $\begin{vmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{3} & \mathbf{2} & \mathbf{1} \\ \mathbf{3} & \mathbf{5} & \mathbf{3} & \mathbf{2} \\ \mathbf{3} & \mathbf{6} & \mathbf{3} & \mathbf{2} \\ \mathbf{6} & \mathbf{4} & \mathbf{5} & \mathbf{3} \end{vmatrix}$

$$\begin{vmatrix} 1 & 3 & 2 & 1 \\ 3 & 5 & 3 & 2 \\ 3 & 6 & 3 & 2 \\ 6 & 4 & 5 & 3 \end{vmatrix} \xrightarrow[\substack{F_2 - 3F_1 \\ F_3 - 3F_1 \\ F_4 - 6F_1}]{} \begin{vmatrix} 1 & 3 & 2 & 1 \\ 0 & -4 & -3 & -1 \\ 0 & -3 & -3 & -1 \\ 0 & -14 & -7 & -3 \end{vmatrix} \xrightarrow[\substack{C_2 \leftrightarrow C_4 \\ F_2 \leftrightarrow -F_2}]{} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 3 & 4 \\ 0 & -1 & -3 & -3 \\ 0 & -3 & -7 & -14 \end{vmatrix} \xrightarrow[\substack{F_3 + F_2 \\ F_4 + 3F_2}]{} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 2 \end{vmatrix}$$

$$\xrightarrow[F_3 \leftrightarrow F_4]{} - \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = -2$$

2.11. (TIC) Transforma la siguiente matriz en una triangular y calcula su determinante. Explica razonadamente cada uno de los pasos dados. $\begin{vmatrix} \mathbf{3} & \mathbf{1} & \mathbf{1} & \mathbf{1} \\ \mathbf{1} & \mathbf{3} & \mathbf{1} & \mathbf{1} \\ \mathbf{1} & \mathbf{1} & \mathbf{3} & \mathbf{1} \\ \mathbf{1} & \mathbf{1} & \mathbf{1} & \mathbf{3} \end{vmatrix}$

$$\begin{vmatrix} 3 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 3 \end{vmatrix} \xrightarrow[\substack{F_2 - F_1 \\ F_3 - F_1 \\ F_4 - 3F_1}]{} \begin{vmatrix} 3 & 1 & 1 & 1 \\ -2 & 2 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 2 & 0 \\ -8 & -2 & -2 & 0 \end{vmatrix} \xrightarrow[\substack{F_4 \leftrightarrow F_2 + F_3 + F_4 \\ F_2 \leftrightarrow F_3}]{} - \begin{vmatrix} 3 & 1 & 1 & 1 \\ -2 & 0 & 2 & 0 \\ -2 & 2 & 0 & 0 \\ -12 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 48$$

2.12. Calcula las inversas de las siguientes matrices y comprueba los resultados obtenidos:

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} \mathbf{2} & \mathbf{5} \\ \mathbf{1} & \mathbf{-7} \end{pmatrix} \qquad \boldsymbol{B} = \begin{pmatrix} \mathbf{3} & \mathbf{2} \\ \mathbf{1} & \mathbf{4} \end{pmatrix}$$

$|A| = -19 \neq 0$. $\text{Adj}(A) = \begin{pmatrix} -7 & -1 \\ -5 & 2 \end{pmatrix}$; $A^{-1} = \dfrac{1}{-19}\begin{pmatrix} -7 & -5 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{7}{19} & \frac{5}{19} \\ \frac{1}{19} & \frac{-2}{19} \end{pmatrix}$; $AA^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 1 & -7 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \frac{7}{19} & \frac{5}{19} \\ \frac{1}{19} & \frac{-2}{19} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

$|B| = 10 \neq 0$. $\text{Adj}(B) = \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}$; $B^{-1} = \dfrac{1}{10}\begin{pmatrix} 4 & -2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{2}{5} & \frac{-1}{5} \\ \frac{-1}{10} & \frac{3}{10} \end{pmatrix}$; $BB^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \frac{2}{5} & \frac{-1}{5} \\ \frac{-1}{10} & \frac{3}{10} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

2.13. (PAU) (TIC) Calcula la matriz inversa de $I - A$ siendo I la matriz unidad de orden 3 y $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

$B = I - A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$; det($B$) = 1;

$\mathrm{Adj}(B) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$; $B^{-1} = (\mathrm{Adj}(B))^t = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$; $BB^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = I$

2.14. (TIC) Calcula, si es posible, la matriz inversa de las siguientes matrices: $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 2 & 0 & -1 \\ -2 & 4 & 2 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

$|B| = 26 \neq 0$; $\mathrm{Adj}(B) = \begin{pmatrix} 4 & -2 & 8 \\ 10 & 8 & -6 \\ -1 & 7 & -2 \end{pmatrix}$; $B^{-1} = \dfrac{1}{26}\begin{pmatrix} 4 & 10 & -1 \\ -2 & 8 & 7 \\ 8 & -6 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{2}{13} & \frac{5}{13} & \frac{-1}{26} \\ \frac{-1}{13} & \frac{4}{13} & \frac{7}{26} \\ \frac{4}{13} & \frac{-3}{13} & \frac{-1}{13} \end{pmatrix}$

$|C| = -3 \neq 0$; $\mathrm{Adj}(C) = \begin{pmatrix} -1 & -2 & 1 \\ -1 & 1 & -2 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$; $C^{-1} = \dfrac{1}{-3}\begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 \\ -2 & 1 & -1 \\ 1 & -2 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \\ \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$

2.15. (PAU) (TIC) Sean las matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

Estudia, si existe, la matriz inversa de la matriz (AB) y, en caso afirmativo, calcúlala.

$AB = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 4 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & 7 & 5 \\ 3 & 5 & 3 \\ 2 & 8 & 4 \end{pmatrix}$

Como det (AB) = 0, la matriz AB es singular y, en consecuencia, no tiene inversa.

2.16. (PAU) Calcula, utilizando el concepto de determinante, el rango de la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & -3 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$.

Como la matriz tiene dimensiones 4 x 3, el mayor rango posible es 3.

El determinante $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ -2 & 0 & -3 \end{vmatrix} = -4 \neq 0$, por tanto, el rango de la matriz es 3.

2.17. (PAU) Se consideran los vectores de R^4: $\vec{u}_1 = (1, 0, -1, 2)$; $\vec{u}_2 = (2, 1, -1, 0)$; $\vec{u}_3 = (0, 1, 1, -1)$. ¿Son linealmente independientes? ¿Por qué?

Los vectores $\vec{u}_1$, $\vec{u}_2$ y $\vec{u}_3$ serán linealmente independientes si el rango de la matriz formada por sus coordenadas es tres. Sea la matriz $M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$. Como $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{vmatrix} = 3 \neq 0 \Rightarrow \mathrm{rg}(M) = 3$, los vectores dados son linealmente independientes.

2.18. (PAU) Las matrices A y B tienen 3 filas y 12 columnas, pero en el proceso de edición algunas de estas se han borrado:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & \dots & \dots & \dots \\ 3 & -1 & 0 & \dots & \dots & \dots \\ -7 & 5 & -2 & \dots & \dots & \dots \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 & \dots & \dots & \dots \\ 3 & 0 & 1 & \dots & \dots & \dots \\ 5 & 4 & 0 & \dots & \dots & \dots \end{pmatrix}$$

a) ¿Se puede averiguar algo sobre los posibles valores de su rango?

b) Si llamamos C a la matriz cuyas columnas son las 24 que forman las dos matrices A y B, ¿cuál será el rango de C?

a) Como $\begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 3 & -1 & 0 \\ -7 & 5 & -2 \end{vmatrix} = 0$ y $\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} = -4$, el rango de A es, como mínimo, 2, podría ser 3, dependiendo de las otras columnas.

Como $\begin{vmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 3 & 0 & 1 \\ 5 & 4 & 0 \end{vmatrix} = 23 \neq 0$, el rango de B es 3. No puede ser mayor pues solo tiene tres filas.

b) Esta matriz tiene 3 filas y 24 columnas y su rango, como máximo, será 3. Además podemos afirmar que el rango es 3, ya que podemos formar el determinante $\begin{vmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 3 & 0 & 1 \\ 5 & 4 & 0 \end{vmatrix} \neq 0$.

2.19. (PAU) Calcula el rango de la matriz A según los valores de k: $A = \begin{pmatrix} 1 & k & -1 & 1 \\ 2 & 1 & -k & 2 \\ 1 & -1 & -1 & k-1 \end{pmatrix}$

De la matriz dada extraemos los siguientes determinantes:

$$\begin{vmatrix} 1 & k & -1 \\ 2 & 1 & -k \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix} = -(k-2)(k+1) = 0 \Rightarrow \begin{cases} k = 2 \\ k = -1 \end{cases} \qquad \begin{vmatrix} 1 & k & 1 \\ 2 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & k-1 \end{vmatrix} = -(k-2)(2k-1) = 0 \Rightarrow \begin{cases} k = 2 \\ k = \dfrac{1}{2} \end{cases}$$

• Si $k = -1 \Rightarrow A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & -1 & -2 \end{pmatrix}$. Como $\begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & -2 \end{vmatrix} = 3 \neq 0 \Rightarrow \text{rg}(A) = 3$

• Si $k = 2 \Rightarrow A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & -2 & 2 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix} = 0$, ya que $C_3 = -C_1$ y $C_4 = C_1$; $\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} \neq 0$, por tanto, $\text{rg}(A) = 2$

• Si $k = \dfrac{1}{2} \Rightarrow A = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & -1 & 1 \\ 2 & 1 & -\frac{1}{2} & 2 \\ 1 & -1 & -1 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$; como $\begin{vmatrix} 1 & \frac{1}{2} & -1 \\ 2 & 1 & -\frac{1}{2} \\ 1 & -1 & -1 \end{vmatrix} \neq 0 \Rightarrow \text{rg}(A) = 3$

En resumen, si $k = 2$, $\text{rg}(A) = 2$, y si $k \neq 2$, $\text{rg}(A) = 3$

2.20. (PAU) Halla el rango de la siguiente matriz según los valores de α. $A = \begin{pmatrix} \alpha & 1 & 1 & 2 \\ 2 & \alpha & \alpha^2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$

Calculamos $\det(C_1\ C_2\ C_3) = \begin{vmatrix} \alpha & 1 & 1 \\ 2 & \alpha & \alpha^2 \\ 2 & 1 & 1 \end{vmatrix} = -\alpha^3 + 3\alpha^2 - 2\alpha$, cuyas raíces son $\alpha_1 = 0$, $\alpha_2 = 1$, $\alpha_3 = 2$.

• Si $\alpha = 0$, obtenemos $M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ y como $\begin{vmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 2 \neq 0 \Rightarrow \text{rg}(M) = 3$

• Si $\alpha = 1$, obtenemos $M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ y como $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \end{vmatrix} = -1 \neq 0 \Rightarrow \text{rg}(M) = 3$

• Si $\alpha = 2$, obtenemos $M = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 4 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ y como $F_1 = F_3$, se deduce que $\text{rg}(M) = 2$

En resumen: Si $\alpha = 2$, $\text{rg}(M) = 2$, y si $\alpha \neq 2$, $\text{rg}(M) = 3$

2.21. (PAU) Dada la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & a & 3 \\ 4 & 1 & -a \end{pmatrix}$.

a) Halla los valores de *a* para los cuales la matriz *A* tiene inversa.

b) Para *a* = 2, calcula la inversa de *A*.

a) La matriz no tiene inversa cuando su determinante es 0:

$|A| = -a^2 + 4a - 3 = -(a-1)(a-3)$. Esto ocurre cuando $a = 1$ ó $a = 3$.

b) Para $a = 2$, $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 3 \\ 4 & 1 & -2 \end{pmatrix}$; $|A| = 1$; $\text{Adj}(A) = \begin{pmatrix} -7 & 12 & -8 \\ -1 & 2 & -1 \\ 2 & -3 & 2 \end{pmatrix}$; $(\text{Adj}(A))^t = \begin{pmatrix} -7 & -1 & 2 \\ 12 & 2 & -3 \\ -8 & -1 & 2 \end{pmatrix}$

Por tanto, $A^{-1} = \begin{pmatrix} -7 & -1 & 2 \\ 12 & 2 & -3 \\ -8 & -1 & 2 \end{pmatrix}$

2.22. (PAU) Halla para qué valores de *m* admite inversa la matriz siguiente y calcula dicha inversa para el menor valor entero positivo de *m* que hace que exista.

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 5 & m & 5 \end{pmatrix}$$

$\det(A) = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 5 & m & 5 \end{vmatrix} = 2m,\ \ 2m \neq 0 \Rightarrow m \neq 0.$

El menor valor entero positivo de m para que exista inversa es $m = 1$. Calculemos la inversa de A para $m = 1$.

$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 5 & 1 & 5 \end{pmatrix}$; $|A| = 2$; $\text{Adj}(A) = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ -3 & -10 & 5 \\ 1 & 2 & -1 \end{pmatrix}$; $(\text{Adj}(A))^t = \begin{pmatrix} -1 & -3 & 1 \\ 0 & -10 & 2 \\ 1 & 5 & -1 \end{pmatrix}$; $A^{-1} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} -1 & -3 & 1 \\ 0 & -10 & 2 \\ 1 & 5 & -1 \end{pmatrix}$

2.23. (TIC) Resuelve las siguientes ecuaciones matriciales siendo *A, B* y *C* las siguientes matrices de orden 2:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \qquad C = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$$

a) $XA = B$

b) $AX + B = C$

c) $XA + B = 2C$

d) $AX + BX = C$

e) $XAB - XC = 2C$

f) $AX - B - C = 0$

a) $X = BA^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 4 & -1 \\ -3 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

b) $X = A^{-1}(C-B) = \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 & 2 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$

c) $X = (2C-B)A^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 1 & 5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 4 & -1 \\ -3 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -9 & 3 \\ -11 & 4 \end{pmatrix}$

d) $X = (A+B)^{-1}C = \begin{pmatrix} \frac{5}{7} & \frac{-2}{7} \\ \frac{-4}{7} & \frac{3}{7} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{3}{7} & \frac{4}{7} \\ \frac{-1}{7} & \frac{1}{7} \end{pmatrix}$

e) $X = 2C(AB-C)^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{-7}{2} & 1 \\ \frac{-23}{4} & \frac{3}{2} \end{pmatrix}$ f) $X = A^{-1}(B+C) = \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & 3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 & 8 \\ -7 & -5 \end{pmatrix}$

2.24. (PAU) Halla la matriz $X^2 + Y^2$, siendo X e Y las soluciones del siguiente sistema matricial:

$$\begin{cases} 2X + Y = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} \\ X - Y = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2X + Y = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} \\ X - Y = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \end{cases} \Rightarrow 3X = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow X = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow Y = X - \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{3} & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$X^2 + Y^2 = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \frac{2}{3} & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -\frac{1}{3} & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -\frac{1}{3} & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{13}{9} & \frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{1}{9} & -\frac{2}{3} \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{14}{9} & 0 \\ \frac{2}{3} & 1 \end{pmatrix}$$

EJERCICIOS

Cálculo y propiedades de los determinantes

2.25. Calcula los siguientes determinantes de orden 2.

a) $\begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 3 & 4 \end{vmatrix}$ **c)** $\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ -2 & -3 \end{vmatrix}$ **e)** $\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 0 & -1 \end{vmatrix}$ **g)** $\begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 1 & -25 \end{vmatrix}$ **i)** $\begin{vmatrix} 10 & 60 \\ 1 & 6 \end{vmatrix}$

b) $\begin{vmatrix} 3 & 7 \\ 0 & 0 \end{vmatrix}$ **d)** $\begin{vmatrix} -3 & 1 \\ 4 & 0 \end{vmatrix}$ **f)** $\begin{vmatrix} -1 & 5 \\ 0 & 3 \end{vmatrix}$ **h)** $\begin{vmatrix} 8 & 7 \\ 6 & 5 \end{vmatrix}$

a) $\begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = -7$ c) $\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ -2 & -3 \end{vmatrix} = -3$ e) $\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} = -2$ g) $\begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 1 & -25 \end{vmatrix} = 0$ i) $\begin{vmatrix} 10 & 60 \\ 1 & 6 \end{vmatrix} = 0$

b) $\begin{vmatrix} 3 & 7 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} = 0$ d) $\begin{vmatrix} -3 & 1 \\ 4 & 0 \end{vmatrix} = -4$ f) $\begin{vmatrix} -1 & 5 \\ 0 & 3 \end{vmatrix} = -3$ h) $\begin{vmatrix} 8 & 7 \\ 6 & 5 \end{vmatrix} = -2$

2.26. (TIC) Calcula los siguientes determinantes de orden 3.

a) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & -1 \\ 2 & 0 & 5 \end{vmatrix}$ **b)** $\begin{vmatrix} 1 & 8 & 1 \\ 1 & 7 & 0 \\ 1 & 6 & -1 \end{vmatrix}$ **c)** $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 7 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & -1 \end{vmatrix}$

d) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & -7 & 5 \end{vmatrix}$ **e)** $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 8 \\ 0 & -5 & 5 \\ 1 & -6 & 2 \end{vmatrix}$ **f)** $\begin{vmatrix} 3 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \\ 5 & -3 & 2 \end{vmatrix}$

a) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & -1 \\ 2 & 0 & 5 \end{vmatrix} = -15$ c) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 7 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & -1 \end{vmatrix} = -28$ e) $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 8 \\ 0 & -5 & 5 \\ 1 & -6 & 2 \end{vmatrix} = 60$

b) $\begin{vmatrix} 1 & 8 & 1 \\ 1 & 7 & 0 \\ 1 & 6 & -1 \end{vmatrix} = 0$ d) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & -7 & 5 \end{vmatrix} = 4$ f) $\begin{vmatrix} 3 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \\ 5 & -3 & 2 \end{vmatrix} = 24$

2.27. (TIC) Calcula los siguientes determinantes de orden 4.

a) $\begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 & 2 \\ 2 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 3 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 9 & 1 \end{vmatrix}$ **b)** $\begin{vmatrix} 6 & 9 & -2 & -3 \\ 1 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & 7 & -1 & 0 \\ 2 & -1 & 0 & -1 \end{vmatrix}$

a) $\begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 & 2 \\ 2 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 3 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 9 & 1 \end{vmatrix} = 39$ b) $\begin{vmatrix} 6 & 9 & -2 & -3 \\ 1 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & 7 & -1 & 0 \\ 2 & -1 & 0 & -1 \end{vmatrix} = -14$

2.28. Calcula el valor del siguiente determinante: $\begin{vmatrix} a & b-1 & c & d+1 \\ a+1 & b & c-1 & d \\ a & b+1 & c & d-1 \\ a-1 & b & c+1 & d \end{vmatrix}$

Como $F_1 + F_3 = F_2 + F_4$, el determinante vale 0.

2.29. Sean A y B las matrices siguientes: $A = \begin{pmatrix} 2x & 2 & 3+x \\ 2 & x & 5 \\ 10 & 6 & x+5 \end{pmatrix}$ **y** $B = \begin{pmatrix} x & 2 & 3 \\ 1 & x & 4 \\ 5 & 6 & x \end{pmatrix}$.

Sabiendo que el determinante de B vale 7, utiliza las propiedades de los determinantes para calcular el valor del determinante de A.

$$|A| = \begin{vmatrix} 2x & 2 & 3+x \\ 2 & x & 5 \\ 10 & 6 & x+5 \end{vmatrix} = 2\begin{vmatrix} x & 2 & 3+x \\ 1 & x & 4+1 \\ 5 & 6 & x+5 \end{vmatrix} = 2\left(\begin{vmatrix} x & 2 & 3 \\ 1 & x & 4 \\ 5 & 6 & x \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} x & 2 & x \\ 1 & x & 1 \\ 5 & 6 & 5 \end{vmatrix}\right) = 2(7+0) = 14$$

2.30. (PAU) Sea A una matriz cuadrada de orden 2 verificando que $2A^2 = A$. Calcula razonadamente los posibles valores del determinante de A.

Si $2A^2 = A \Rightarrow |2A^2| = |A|$

Al ser A una matriz de orden 2, $|2A^2| = 2^2\, |A^2| = |A| \Rightarrow 4|A|^2 = |A| \Rightarrow |A|\,(4\,|A| - 1) = 0 \Rightarrow |A| = 0$ ó $|A| = \dfrac{1}{4}$

Así pues, los valores posibles del determinante de A son 0 y $\dfrac{1}{4}$.

2.31. (PAU) Si la matriz $A = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix}$ tiene determinante n, averigua el valor del determinante de las siguientes matrices: $B = \begin{pmatrix} 6d & 4e & 2f \\ 3g & 2h & i \\ 9a & 6b & 3c \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} d+f & e & f+e \\ a+c & b & c+b \\ g+i & h & i+h \end{pmatrix}$.

• Sacando factores comunes de filas y columnas e intercambiando dos veces las filas del determinante, se obtiene:

$$|B| = \begin{vmatrix} 6d & 4e & 2f \\ 3g & 2h & i \\ 9a & 6b & 3c \end{vmatrix} = 3 \cdot 2 \begin{vmatrix} 2d & 2e & 2f \\ g & h & i \\ 3a & 3b & 3c \end{vmatrix} = 3 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 \begin{vmatrix} d & e & f \\ g & h & i \\ a & b & c \end{vmatrix} = -(-36) \begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} = 36n$$

• A la columna primera se le suma la segunda y se le resta la tercera.

$$|C| = \begin{vmatrix} d+f & e & f+e \\ a+c & b & c+b \\ g+i & h & i+h \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} d & e & f+e \\ a & b & c+b \\ g & h & i+h \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} d & e & f \\ a & b & c \\ g & h & i \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} d & e & e \\ a & b & b \\ g & h & h \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} + 0 = -n$$

2.32. (PAU) Supongamos que C_1, C_2, C_3 y C_4 son las cuatro columnas de una matriz cuadrada A, cuyo determinante vale 3. Calcula razonadamente:

a) El determinante de la inversa de A

b) El determinante de la matriz $2A$

c) El determinante de una matriz cuyas columnas son: $2C_1 - C_3$, C_4, $5C_3$ y C_2.

a) $|A^{-1}| = \dfrac{1}{|A|} = \dfrac{1}{3}$

b) $|2A| = |2c_1, 2c_2, 2c_3, 2c_4| = 2^4\, |c_1, c_2, c_3, c_4| = 2^4\, |A| = 16 \cdot 3 = 48$

c) $|2c_1 - c_3, c_4, 5c_3, c_2| = 5\,|2c_1 - c_3, c_4, c_3, c_2| = -5\,|2c_1 - c_3, c_2, c_3, c_4|$ = (sumando la tercera columna a la primera) $= -5\,|2c_1, c_2, c_3, c_4| = -10\,|c_1, c_2, c_3, c_4| = -30$.

2.33. (PAU) Utiliza las propiedades de los determinantes para desarrollar el siguiente: $\begin{vmatrix} x & 2x+1 & 3x+2 \\ x & 2x+3 & 3x+4 \\ x & 2x+5 & 3x+6 \end{vmatrix}$.

Enuncia las propiedades que has utilizado.

$$\begin{vmatrix} x & 2x+1 & 3x+2 \\ x & 2x+3 & 3x+4 \\ x & 2x+5 & 3x+6 \end{vmatrix} \overset{(1)}{=} \begin{vmatrix} x & 2x+1 & 3x+2 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 4 & 4 \end{vmatrix} \overset{(2)}{=} 0$$

(1) A las filas segunda y tercera se le resta la fila primera.

(2) Las filas segunda y tercera son proporcionales, en consecuencia, el valor del determinante es cero.

2.34. (PAU) Dado el determinante: $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 4 & 3 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & 1 \end{vmatrix}$.

a) Halla su valor mediante el desarrollo por la primera fila.

b) Calcula su valor mediante el desarrollo por la cuarta columna.

c) Comprueba que los resultados obtenidos coinciden.

a) $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 4 & 3 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 4 & 3 & 0 \\ 2 & 3 & 1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} -1 & 3 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 5-4=1$ b) $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 4 & 3 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & 1 \end{vmatrix} = 1\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 3 & 1 \\ 0 & 4 & 3 \end{vmatrix} = 1$

c) Los resultados coinciden.

2.35. (PAU) (TIC) Resuelve la ecuación $\begin{vmatrix} x+2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & x+2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & x+2 & 1 \\ x & x & x & 3 \end{vmatrix}$ **= 0.**

Aplicando las propiedades de los determinantes, resulta:

$$\begin{vmatrix} x+2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & x+2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & x+2 & 1 \\ x & x & x & 3 \end{vmatrix} \xrightarrow[\substack{F_2-F_1 \\ F_3-F_1 \\ F_4-3F_1}]{} \begin{vmatrix} x+2 & 1 & 1 & 1 \\ -(x+1) & x+1 & 0 & 0 \\ -(x+1) & 0 & x+1 & 0 \\ -2x-6 & x-3 & x-3 & 0 \end{vmatrix} = 0$$

Extraemos el factor (x + 1) de la segunda y tercera fila y desarrollando por la cuarta columna, se obtiene:

$-(x+1)^2 \begin{vmatrix} -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ -2x-6 & x-3 & x-3 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow 12\,(x+1)^2 = 0$, por tanto, la solución es $x = -1$.

Cálculo del rango por determinantes

2.36. (TIC) Calcula, por determinantes, el rango de las siguientes matrices.

a) $A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ **c)** $C = \begin{pmatrix} 1 & -2 & -3 & -4 & -5 \\ -1 & 3 & 2 & 6 & 3 \\ 0 & 5 & 5 & 2 & 1 \end{pmatrix}$

b) $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 3 & 5 \\ 0 & 1 & 4 \\ -1 & -2 & -1 \end{pmatrix}$ **d)** $D = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 & 2 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 8 & 9 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 4 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 8 & 9 \end{pmatrix}$

a) $A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$; $\det(A) \neq 0 \Rightarrow \text{rg}(A) = 3$ c) $\begin{vmatrix} 1 & -2 & -3 \\ -1 & 3 & 2 \\ 0 & 5 & 5 \end{vmatrix} \neq 0 \Rightarrow \text{rg}(C) = 3$

b) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 3 & 5 \\ 0 & 1 & 4 \end{vmatrix} \neq 0 \Rightarrow \text{rg}(B) = 3$ d) $\begin{vmatrix} 2 & -1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 2 \neq 0 \Rightarrow \text{rg}(D) = 4$

2.37. (PAU) Dadas las matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} -2 & 2 & 0 \\ 3 & -1 & 1 \end{pmatrix}$, ¿es cierto que rg(*AB*) = rg(*A*) rg(*B*)?

Justifica la respuesta.

rg(A) = 2, pues $\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -1 \neq 0$. rg($B$) = 2, pues $\begin{vmatrix} -2 & 2 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} = -4 \neq 0$.

rg(AB) ≤ 3 ya que la matriz es de dimensión 3×3.

Como rg(A) rg(B)= $2 \cdot 2 = 4$ y rg(AB) ≤ 3, se deduce que la igualdad rg (AB) = rg(A) rg(B) es falsa.

2.38. (PAU) Halla el rango de la siguiente matriz: $\begin{pmatrix} \cos\alpha & -\text{sen}\,\alpha & 0 \\ \text{sen}\,\alpha & \cos\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

$$|A| = \begin{vmatrix} \cos\alpha & -\text{sen}\,\alpha & 0 \\ \text{sen}\,\alpha & \cos\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1(\cos^2\alpha + \text{sen}^2\,\alpha) = 1 \Rightarrow \text{rg}(A) = 3$$

Cálculo de la matriz inversa por determinantes

2.39. (TIC) Calcula la inversa de las siguientes matrices.

$A = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 1 & -6 \end{pmatrix}$ $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \end{pmatrix}$ $C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}$ $D = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 4 & 1 \\ 4 & 1 & 1 & -2 \\ 1 & 3 & 3 & 1 \\ 0 & 4 & 1 & -1 \end{pmatrix}$

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)}(\text{Adj}(A))^t = \frac{-1}{10}\begin{pmatrix} 6 & -4 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{-3}{5} & \frac{2}{5} \\ \frac{1}{10} & \frac{-1}{10} \end{pmatrix}$$

$$C^{-1} = \frac{1}{\det(C)}(\text{Adj}(C))^t = \frac{1}{6}\begin{pmatrix} 6 & -6 & 1 \\ 0 & 6 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & \frac{1}{6} \\ 0 & 1 & \frac{-1}{6} \\ 0 & 0 & \frac{1}{6} \end{pmatrix}$$

$$B^{-1} = \frac{(\text{Adj}(B))^t}{\det(B)} = \frac{1}{1}\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \\ 3 & -3 & -2 \end{pmatrix}$$

$$D^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{-21}{149} & \frac{19}{149} & \frac{31}{149} & \frac{-28}{149} \\ \frac{-17}{149} & \frac{-13}{149} & \frac{18}{149} & \frac{27}{149} \\ \frac{35}{149} & \frac{18}{149} & \frac{-2}{149} & \frac{-3}{149} \\ \frac{-33}{149} & \frac{-34}{149} & \frac{70}{149} & \frac{-44}{149} \end{pmatrix}$$

2.40. (PAU) Siendo las matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 & -2 \\ 2 & 2 & 1 & -4 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -1 \\ 0 & 3 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$.

a) ¿Es cierto que det (*AB*) = det (*BA*)? **b) Calcula, si es posible, la inversa de *AB*.**

a) $AB = \begin{pmatrix} 9 & -5 \\ 10 & -3 \end{pmatrix}$, $BA = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 & -2 \\ 0 & 4 & -1 & 0 \\ 6 & 6 & 3 & -12 \\ 1 & -1 & 1 & -2 \end{pmatrix}$; $\det(AB) = 23$, $\det(BA) = 0$. Son distintos.

b) $(AB)^{-1} = \frac{1}{23}\begin{pmatrix} -3 & 5 \\ -10 & 9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{-3}{23} & \frac{5}{23} \\ \frac{-10}{23} & \frac{9}{23} \end{pmatrix}$

2.41. (PAU) Sea $A = \begin{pmatrix} \text{sen } x & -\cos x & 0 \\ \cos x & \text{sen } x & 0 \\ \text{sen } x + \cos x & \text{sen } x - \cos x & 1 \end{pmatrix}$ ¿Para qué valores de x existe la matriz inversa de A? Calcula dicha matriz inversa.

Como $|A| = \text{sen}^2 x + \cos^2 x = 1 \neq 0$, la matriz A tiene inversa cualquiera que sea el valor de x.

$\text{Adj}(A) = \begin{pmatrix} \text{sen } x & -\cos x & -1 \\ \cos x & \text{sen } x & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. La matriz inversa es: $A^{-1} = \begin{pmatrix} \text{sen } x & \cos x & 0 \\ -\cos x & \text{sen } x & 0 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$.

2.42. (PAU) Dadas las matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$, halla para qué valores de m la matriz $B + mA$ no tiene inversa.

Calculamos la matriz $B + mA$: $B + mA = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} + m\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3+m & 1+m \\ 2+2m & 2 \end{pmatrix}$.

Esta matriz no tiene inversa cuando su determinante es 0: $|B + mA| = \begin{vmatrix} 3+m & 1+m \\ 2+2m & 2 \end{vmatrix} = -2m^2 - 2m + 4 = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow m = -2$ ó $m = 1$. Por tanto, la matriz $B + mA$ no tiene inversa cuando $m = -2$ ó $m = 1$.

Matrices con parámetros

2.43. (PAU) Calcula los valores de los parámetros a, b, c, para los cuales $\text{rg}(B) = 1$, donde $B = \begin{pmatrix} 1 & a \\ 2 & b \\ -1 & 1 \\ -3 & c \end{pmatrix}$.

Para que $\text{rg}(B) = 1$, las dos columnas de la matriz han de ser proporcionales, es decir:

$\frac{1}{a} = \frac{2}{b} = -\frac{1}{1} = -\frac{3}{c} \Rightarrow a = -1, b = -2, c = 3$

2.44. (PAU) Encuentra, en función de los valores del parámetro a, el rango de la matriz: $A = \begin{pmatrix} a & a & 1 & 1 \\ 1 & a & a & 1 \\ 1 & 1 & a & a \end{pmatrix}$

Calculamos el determinante extraído de la matriz $\begin{vmatrix} a & a & 1 \\ 1 & a & a \\ 1 & 1 & a \end{vmatrix} = a^3 - a^2 - a + 1 = (a-1)^2(a+1)$

- Si $a \neq -1$ y $a \neq 1$, el rango de esta matriz es 3.
- Si $a = 1$, la matriz A queda: $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \text{rg}(A) = 1$
- Si $a = -1$, la matriz A queda: $A = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \end{pmatrix} \Rightarrow \text{rg}(A) = 2$, pues $F_3 = -F_1$.

2.45. (PAU) Estudia, según los valores de $x \in R$, el rango de la matriz: $A = \begin{pmatrix} x & -1 & -1 & 0 \\ -x & x & -1 & 1 \\ 1 & -1 & x & 1 \\ 1 & -1 & 0 & x \end{pmatrix}$

$$\text{rg}(A) = \text{rg}\begin{pmatrix} x & -1 & -1 & 0 \\ -x & x & -1 & 1 \\ 1 & -1 & x & 1 \\ 1 & -1 & 0 & x \end{pmatrix} \underset{C_1+C_2}{=} \text{rg}\begin{pmatrix} x-1 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & x & -1 & 1 \\ 0 & -1 & x & 1 \\ 0 & -1 & 0 & x \end{pmatrix} \underset{F_4-F_3}{=} \text{rg}\begin{pmatrix} x-1 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & x & -1 & 1 \\ 0 & -1 & x & 1 \\ 0 & 0 & -x & x-1 \end{pmatrix}$$

$\det A = (x-1)\begin{vmatrix} x & -1 & 1 \\ -1 & x & 1 \\ 0 & -x & x-1 \end{vmatrix} = (x-1)(x^3+1) \Rightarrow \det(A) = 0$ si $x = 1$ ó $x = -1$. Si $x \neq 1$ y $x \neq -1$, $\text{rg}(A) = 4$.

- Si $x = 1$, la matriz transformada es: $\begin{pmatrix} 0 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$, como $\begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{vmatrix} = 2 \Rightarrow \text{rg}(A) = 3$.
- Si $x = -1$, la matriz es: $\begin{pmatrix} -2 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \end{pmatrix}$, como $\begin{vmatrix} -2 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \end{vmatrix} = -2 \Rightarrow \text{rg}(A) = 3$.

2.46. (PAU) Calcula el rango de la matriz *A* según los diferentes valores del parámetro real *a*:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & a & 2 \\ -1 & 0 & -1 & 3 \\ 5 & a+4 & -4 & -3 \end{pmatrix}$$

El rango, al menos, es 2 ya que $\begin{vmatrix} -1 & 3 \\ -4 & -3 \end{vmatrix} = 15 \neq 0$. Veamos qué debe pasar para que sea 3. Para ello, calculamos los determinantes de orden 3 que contengan al que acabamos de calcular:

$\begin{vmatrix} 2 & a & 2 \\ -1 & -1 & 3 \\ 5 & -4 & -3 \end{vmatrix} = 48 + 12a = 0$ si $a = -4$. $\begin{vmatrix} 0 & a & 2 \\ 0 & -1 & 3 \\ a+4 & -4 & -3 \end{vmatrix} = (a+4)(3a+2) = 0$ si $a = -4$ o $a = -\dfrac{2}{3}$

En consecuencia: Si $a = -4$ todos los determinantes de orden tres son nulos, y rg(A) = 2. Si $a \neq -4$, rg(A) = 3.

2.47. (PAU) Considera la matriz $A = \begin{pmatrix} a & b & c \\ 2a & -b & 3c \\ 3a & 0 & 4c \end{pmatrix}$ donde *a*, *b* y *c* son no nulos.

a) Determina el número de columnas de *A* que son linealmente independientes.

b) Calcula el rango de *A* y razona si la matriz tiene inversa.

a) Es evidente que la tercera fila es suma de las otras dos: $F_3 = F_1 + F_2$. por tanto, solo hay dos filas linealmente independientes. Consecuentemente, el número de columnas linealmente independientes será también dos, ya que rg (A) = 2.

b) Como rg (A) = 2, la matriz A es singular y, por tanto, no tiene inversa.

2.48. (PAU) a) Obtén λ para que sean linealmente dependientes los vectores $\vec{u}_1 = (3, 2, 5)$; $\vec{u}_2 = (2, 4, 7)$; $\vec{u}_3 = (1, -3, \lambda)$.

b) Para $\lambda = -3$, expresa el vector $\vec{v} = (2, -5, -5)$ como combinación lineal de $\vec{u}_1$, $\vec{u}_2$ y $\vec{u}_3$.

a) $\begin{vmatrix} 3 & 2 & 5 \\ 2 & 4 & 7 \\ 1 & -3 & \lambda \end{vmatrix} = 8\lambda + 27 = 0 \Rightarrow \lambda = \dfrac{-27}{8}$

b) $\vec{v} = x\vec{u}_1 + y\vec{u}_2 + z\vec{u}_3 \Rightarrow \begin{cases} 2 = 3x + 2y + z \\ -5 = 2x + 4y - 3z \\ -5 = 5x + 7y - 3z \end{cases} \Rightarrow x = 1, y = -1, z = 1 \Rightarrow \vec{v} = \vec{u}_1 - \vec{u}_2 + \vec{u}_3$

2.49. (PAU) a) Demuestra que la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & a & b-1 \\ 1 & a & -1 \end{pmatrix}$ tiene inversa si, y solo si, los parámetros *a* y *b* son no nulos.

b) Calcula A^{-1} cuando $a = b = 1$.

a) Para que una matriz cuadrada tenga inversa su determinante tiene que ser no nulo. Calculamos:

$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & a & b-1 \\ 1 & a & -1 \end{vmatrix} = -a \cdot b$. Por tanto, A tiene inversa si $a \neq 0$ y $b \neq 0$

b) Si $a = b = 1 \Rightarrow A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$; $|A| = -1$

$\text{Adj}(A) = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$; $(\text{Adj}(A))^t = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$; $A^{-1} = -\begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$.

2.50. (PAU) a) Halla razonadamente los valores del parámetro *p* para los que la matriz *A* tiene inversa.

$$A = \begin{pmatrix} p & 0 & 0 \\ 1 & p+1 & 1 \\ 1 & 0 & p-1 \end{pmatrix}$$

b) Halla la inversa para *p* = 2.

a) Calculamos det $A = p\,(p-1)\,(p+1)$. Por tanto, A no tiene inversa para $p = 0$, $p = 1$ y $p = -1$. Para los demás valores sí tiene inversa.

b) Si $p = 2$, $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ y $A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} & \frac{-1}{3} \\ \frac{-1}{2} & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

2.51. (PAU) Se consideran las matrices: $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & m \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$; $B = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ m & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ donde *m* es un número real. Encuentra los valores de *m* para los que *AB* es inversible.

$AB = \begin{pmatrix} 1 & 2 & m \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ m & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+2m & 3+2m \\ 1-m & 1 \end{pmatrix}$. La matriz AB es inversible si su determinante es distinto de cero: $|AB| = \begin{vmatrix} 1+2m & 3+2m \\ 1-m & 1 \end{vmatrix} = 2m^2 + 3m - 2$. La matriz AB será inversible si $m \neq -2$ y $m \neq \frac{1}{2}$.

2.52. (PAU) ¿Tiene inversa siempre una matriz cuadrada diagonal de dimensión 4? Justifica la respuesta. ¿Tiene inversa la matriz *B*? En caso de que la tenga, calcúlala.

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & 0 & c \end{pmatrix}, \text{ con } a, b, c \in \mathbb{R}.$$

Para que una matriz tenga inversa, es condición necesaria y suficiente que su determinante sea no nulo. Por tanto, la matriz B tiene inversa cuando $a \neq 0$, $b \neq 0$ y $c \neq 0$.

La matriz inversa es: $B^{-1} = \frac{1}{a\,b\,c}\begin{pmatrix} abc & 0 & 0 & 0 \\ 0 & bc & 0 & 0 \\ 0 & 0 & ac & 0 \\ 0 & 0 & 0 & ab \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{a} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{b} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{c} \end{pmatrix}$

2.53. (PAU) Se consideran las matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & k \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} k & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$.

a) Discute, en función de los valores que pueda tomar el parámetro real *k*, si la matriz *AB* tiene inversa.

b) Discute, en función de los valores de *k*, si la matriz *BA* tiene inversa.

a) Calculamos la matriz AB: $AB = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & k \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} k & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} k & 0 & -1 \\ 3k & k & -2+2k \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$

Como $|AB| = 0$, independientemente del valor de k, la matriz AB nunca tiene inversa.

b) Calculamos la matriz BA: $BA = \begin{pmatrix} k & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & k \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} k & -1 \\ 3 & k+2 \end{pmatrix}$

Como $|BA| = k^2 + 2k + 3 \neq 0$ para cualquier valor real de k, la matriz BA siempre tiene inversa.

2.54. (PAU) Se consideran las matrices: $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & m \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ m & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$, donde m es un número real. Encuentra los valores de m para los que AB es inversible.

$$AB = \begin{pmatrix} 1 & 2 & m \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ m & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+2m & 3+2m \\ 1-m & 1 \end{pmatrix}.$$

La matriz AB es inversible si su determinante es distinto de cero: $|AB| = \begin{vmatrix} 1+2m & 3+2m \\ 1-m & 1 \end{vmatrix} = 2m^2 + 3m - 2$.

Como $2m^2 + 3m - 2 = 0$ si $m = 2$ ó $m = \frac{1}{2}$, la matriz AB será inversible para cualquier valor $m \neq -2$ y $m \neq \frac{1}{2}$.

2.55. (PAU) Sea la matriz $A = \begin{pmatrix} 2a & a & a & a \\ a & 2a & a & a \\ a & a & 2a & a \\ a & a & a & 2a \end{pmatrix}$

a) Calcula el valor de su determinante en función de a.

b) Encuentra su inversa, si existe, cuando $a = 1$.

a) Para calcular el determinante hacemos transformaciones elementales:

$$|A| = \begin{vmatrix} 2a & a & a & a \\ a & 2a & a & a \\ a & a & 2a & a \\ a & a & a & 2a \end{vmatrix} \overset{(1)}{=} \begin{vmatrix} 5a & a & a & a \\ 5a & 2a & a & a \\ 5a & a & 2a & a \\ 5a & a & a & 2a \end{vmatrix} \overset{(2)}{=} \begin{vmatrix} 5a & a & a & a \\ 0 & a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a \end{vmatrix} = 5a^4$$

(1) Sumamos a la primera columna las otras tres. (2) A cada fila se le resta la primera.

b) Para $a = 1 \Rightarrow A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$, y su determinante vale 5; por tanto, tiene inversa.

Calculamos la matriz inversa A^{-1}: $\text{Adj } A = \begin{pmatrix} 4 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & 4 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & 4 & -1 \\ -1 & -1 & -1 & 4 \end{pmatrix} \Rightarrow A^{-1} = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 4 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & 4 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & 4 & -1 \\ -1 & -1 & -1 & 4 \end{pmatrix}$

2.56. (PAU) a) Demuestra que $A^2 - A - 2I = 0$, siendo: $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$, $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

b) Calcula A^{-1} utilizando el apartado anterior o de cualquier otra forma.

a) Calculamos separadamente los términos de la expresión $A^2 - A - 2I$

$$A^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \quad A^2 - A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} = 2I \Rightarrow A^2 - A - 2I = 0.$$

b) Puesto que $A^2 - A = 2I \Rightarrow A\left[\frac{1}{2}(A - I)\right] = I \Rightarrow A^{-1} = \frac{1}{2}(A - I) = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$

Ecuaciones matriciales

2.57. (PAU) Resuelve la ecuación matricial $AXB = C$, siendo $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$ y $C = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Como $A = I$; la ecuación matricial es $I\,X\,B = C$; $XB = C$; $XBB^{-1} = CB^{-1}$; $X = CB^{-1}$, siempre que B admita inversa. Como $|B| = 1$, la matriz es regular.

$$B^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}. \qquad X = CB^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

2.58. (PAU) Calcula la matriz A sabiendo que se verifica la igualdad: $A\begin{pmatrix}1&2&3\\0&2&3\\0&0&3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2&0&0\\0&2&0\\0&0&2\end{pmatrix}$ y explica el método seguido.

La ecuación dada es: $AB = C$, multiplicando a la derecha por B^{-1} se obtiene $A = CB^{-1}$.

B^{-1}: $\det(B) = 6$; $\text{Adj}(B)=\begin{pmatrix}6&0&0\\-6&3&0\\0&-3&2\end{pmatrix}$; $B^{-1}=\begin{pmatrix}1&-1&0\\0&\frac{1}{2}&\frac{-1}{2}\\0&0&\frac{1}{3}\end{pmatrix}\Rightarrow A=\begin{pmatrix}2&0&0\\0&2&0\\0&0&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&-1&0\\0&\frac{1}{2}&\frac{-1}{2}\\0&0&\frac{1}{3}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2&-2&0\\0&1&-1\\0&0&\frac{2}{3}\end{pmatrix}$

2.59. (PAU) Encuentra una matriz X que verifique la ecuación $AX + B = C$, siendo:

$$A=\begin{pmatrix}1&0&0\\1&2&0\\1&2&4\end{pmatrix};\quad B=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix};\quad C=\begin{pmatrix}3&0&0\\2&5&2\\0&1&3\end{pmatrix}.$$

Como A tiene inversa, ya que $|A| \neq 0$, despejamos la matriz X: $X = A^{-1}(C - B)$.

La inversa de A es $A^{-1}=\begin{pmatrix}1&0&0\\\frac{-1}{2}&\frac{1}{2}&0\\0&\frac{-1}{4}&\frac{1}{4}\end{pmatrix}$; y $C-B=\begin{pmatrix}2&0&0\\2&4&2\\0&1&2\end{pmatrix}\Rightarrow X=\begin{pmatrix}1&0&0\\\frac{-1}{2}&\frac{1}{2}&0\\0&\frac{-1}{4}&\frac{1}{4}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2&0&0\\2&4&2\\0&1&2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2&0&0\\0&2&1\\\frac{-1}{2}&\frac{-3}{4}&0\end{pmatrix}$

2.60. (PAU) Dadas las matrices: $A=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&2&1\\0&5&3\end{pmatrix}$ y $B=\begin{pmatrix}0&0&1\\0&1&0\\1&0&0\end{pmatrix}$, halla la matriz X dada por $AXA^{-1} = B$.

$A^{-1}AXA^{-1}A = A^{-1}BA \Rightarrow X = A^{-1}BA$.

Como $|A| \neq 0$, existe A^{-1}, que es la siguiente: $A^{-1}=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&3&-1\\0&-5&2\end{pmatrix}$, entonces:

$$X=A^{-1}BA=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&3&-1\\0&-5&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&0&1\\0&1&0\\1&0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0&0\\0&2&1\\0&5&3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&0&1\\-1&3&0\\2&-5&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0&0\\0&2&1\\0&5&3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&5&3\\-1&6&3\\2&-10&-5\end{pmatrix}$$

2.61. (PAU) Dadas las matrices $A=\begin{pmatrix}1&-1&3\\-1&0&-3\\-1&2&1\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}1&0\\-1&2\\0&1\end{pmatrix}$ y $C=\begin{pmatrix}0&-1&2\\-2&1&-1\end{pmatrix}$.

a) Halla la inversa de $A - BC$.

b) Resuelve la ecuación matricial $AX - BCX = A$.

a) $BC=\begin{pmatrix}1&0\\-1&2\\0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&-1&2\\-2&1&-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&-1&2\\-4&3&-4\\-2&1&-1\end{pmatrix}$

$A-BC=\begin{pmatrix}1&-1&3\\-1&0&-3\\-1&2&1\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}0&-1&2\\-4&3&-4\\-2&1&-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0&1\\3&-3&1\\1&1&2\end{pmatrix}$

$\det(A-BC)=-1$; $\text{Adj}(A-BC)=\begin{pmatrix}-7&-5&6\\1&1&-1\\3&2&-3\end{pmatrix}$. Luego $(A-BC)^{-1}=\begin{pmatrix}7&-1&-3\\5&-1&-2\\-6&1&3\end{pmatrix}$.

b) $AX - BCX = A \Rightarrow (A - BC)X = A \Rightarrow X = (A - BC)^{-1}A$

Esto es, $X=\begin{pmatrix}7&-1&-3\\5&-1&-2\\-6&1&3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&-1&3\\-1&0&-3\\-1&2&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}11&-13&21\\8&-9&16\\-10&12&-18\end{pmatrix}$

2.62. **(PAU) Considera las matrices:** $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ **y** $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

a) Determina si A **y** B **son inversibles y, si lo son, calcula la matriz inversa.**

b) Resuelve la ecuación matricial $BA - A^2 = AB - X$.

a) $|A| = -3$ existe inversa. Calculamos $A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \\ \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$

$|B| = 0$ y, por tanto, no existe inversa.

b) De la ecuación $BA - A^2 = AB - X$, despejamos la matriz X:

$$X = AB - BA + A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \\ -2 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

2.63. **(PAU) Resuelve la ecuación matricial** $B(2A + I) = AXA + B$**, siendo:** $A = \begin{pmatrix} 3 & -2 & -1 \\ -4 & 1 & -1 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$; $B = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ -1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$.

De la ecuación $B(2A + I) = AXA + B$, despejamos la matriz X:

Como $B(2A + I) = 2BA + B$, entonces, sustituyendo en la ecuación:

$2BA + B = AXA + B \Rightarrow 2BA = AXA \Rightarrow 2B = AX \Rightarrow X = A^{-1}(2B)$

Calculamos la matriz A^{-1}: $A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 5 & 7 \\ -2 & -4 & -5 \end{pmatrix}$

$$X = A^{-1}(2B) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 5 & 7 \\ -2 & -4 & -5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & -2 & 4 \\ -2 & 0 & -2 \\ 0 & -2 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & -8 & 6 \\ -6 & -18 & 12 \\ 4 & 14 & -10 \end{pmatrix}$$

PROBLEMAS

2.64. **(TIC) Los números 20 604, 53 227, 25 755, 20 927 y 78 421 son divisibles por 17. Demuestra que también es divisible por 17 el determinante:**

$$\begin{vmatrix} 2 & 0 & 6 & 0 & 4 \\ 5 & 3 & 2 & 2 & 7 \\ 2 & 5 & 7 & 5 & 5 \\ 2 & 0 & 9 & 2 & 7 \\ 7 & 8 & 4 & 2 & 1 \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} 2 & 0 & 6 & 0 & 4 \\ 5 & 3 & 2 & 2 & 7 \\ 2 & 5 & 7 & 5 & 5 \\ 2 & 0 & 9 & 2 & 7 \\ 7 & 8 & 4 & 2 & 1 \end{vmatrix} \overset{(1)}{=} \begin{vmatrix} 2 & 0 & 6 & 0 & 2\cdot 10000 + 0\cdot 1000 + 6\cdot 1000 + 0\cdot 10 + 4 \\ 5 & 3 & 2 & 2 & 5\cdot 10000 + 3\cdot 1000 + 2\cdot 1000 + 2\cdot 10 + 7 \\ 2 & 5 & 7 & 5 & 2\cdot 10000 + 5\cdot 1000 + 7\cdot 1000 + 5\cdot 10 + 5 \\ 2 & 0 & 9 & 2 & 2\cdot 10000 + 0\cdot 1000 + 9\cdot 1000 + 2\cdot 10 + 7 \\ 7 & 8 & 4 & 2 & 7\cdot 10000 + 8\cdot 1000 + 4\cdot 1000 + 2\cdot 10 + 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 0 & 6 & 0 & 20604 \\ 5 & 3 & 2 & 2 & 53227 \\ 2 & 5 & 7 & 5 & 25755 \\ 2 & 0 & 9 & 2 & 20927 \\ 7 & 8 & 4 & 2 & 78421 \end{vmatrix}$$

(1) A la quinta columna le sumamos 10 000 C_1 + 1000 C_2 + 100 C_3 +10 C_4, y este determinante es múltiplo de 17, porque lo son todos los elementos de la última columna.

2.65. (PAU) Si la matriz $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ tiene rango 1 y la matriz $B = \begin{pmatrix} x & y \\ z & w \end{pmatrix}$ tiene rango 2, explica qué valores puede tener el rango de las matrices *C, D* y *E*. $C = \begin{pmatrix} a & b & 0 & 0 \\ c & d & 0 & 0 \\ 0 & 0 & x & y \\ 0 & 0 & z & w \end{pmatrix}$, $D = \begin{pmatrix} a & b & 0 & 0 \\ c & d & 0 & 0 \\ x & y & 0 & 0 \\ z & w & 0 & 0 \end{pmatrix}$ y $E = \begin{pmatrix} a & b & 0 & 0 \\ c & d & 0 & 0 \\ x & 0 & y & 0 \\ z & 0 & w & 0 \end{pmatrix}$.

Si la matriz $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ tiene rango 1, la segunda fila es proporcional a la primera, además, $a \neq 0$ ó $b \neq 0$.

Si la matriz $B = \begin{pmatrix} x & y \\ z & w \end{pmatrix}$ tiene rango 2, entonces $\begin{vmatrix} x & y \\ z & w \end{vmatrix} \neq 0$

La matriz *C* tiene rango 3, pues se cumple alguna de las dos opciones siguientes:

$\begin{vmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & x & y \\ 0 & z & w \end{vmatrix} = a \begin{vmatrix} x & y \\ z & w \end{vmatrix} \neq 0$, si $a \neq 0$; $\quad \begin{vmatrix} b & 0 & 0 \\ 0 & x & y \\ 0 & z & w \end{vmatrix} = b \begin{vmatrix} x & y \\ z & w \end{vmatrix} \neq 0$, si $b \neq 0$.

La matriz *C* no puede tener rango 4, ya que las filas primera y segunda son proporcionales.

$$\text{rg}(D) = \text{rg} \begin{pmatrix} a & b & 0 & 0 \\ c & d & 0 & 0 \\ x & y & 0 & 0 \\ z & w & 0 & 0 \end{pmatrix} = \text{rg} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \\ x & y \\ z & w \end{pmatrix} = 2$$

$$\text{rg}(E) = \text{rg} \begin{pmatrix} a & b & 0 & 0 \\ c & d & 0 & 0 \\ x & 0 & y & 0 \\ z & 0 & w & 0 \end{pmatrix} = \text{rg} \begin{pmatrix} a & b & 0 \\ c & d & 0 \\ x & 0 & y \\ z & 0 & w \end{pmatrix} = \text{rg} \begin{pmatrix} a & b & 0 \\ x & 0 & y \\ z & 0 & w \end{pmatrix}.$$ Si $b \neq 0 \Rightarrow \text{rg}(E) = 3$. Si $b = 0 \Rightarrow \text{rg}(E) = 2$.

2.66. (PAU) Halla los valores de *x* para los cuales la matriz $A = \begin{pmatrix} |x| & 1 \\ |x-2| & 2 \end{pmatrix}$ no tiene inversa.

La matriz *A* no tiene inversa para los valores de *x* que anulen su determinante.

$$\det A = 2\,|x| - |x-2| = 0 \Leftrightarrow 2\,|x| = |x-2| \Leftrightarrow \begin{cases} 2x = x - 2 \Rightarrow x = -2 \\ 2x = -x + 2 \Rightarrow x = \dfrac{2}{3} \end{cases}$$

Luego la matriz *A* tiene inversa para todo valor real de *x*, excepto para $x = -2$ y $x = \dfrac{2}{3}$.

2.67. (PAU) Sean *A*, *B* y *X* tres matrices cuadradas del mismo orden que verifican la relación $A\,X\,B = I$, siendo *I* la matriz unidad.

a) Si el determinante de *A* vale –1 y el de *B* vale 1, calcula razonadamente el determinante de *X*.

b) Calcula de forma razonada la matriz *X* si $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 2 & -3 \end{pmatrix}$.

a) Como $|AB| = |A|\,|B|$, tomando determinantes en la igualdad $A\,X\,B = I$ resulta:
$|A\,X\,B| = |I| \Rightarrow |A|\,|X|\,|B| = 1 \Rightarrow -1\,|X| \cdot 1 = 1 \Rightarrow |X| = -1$

b) $A \cdot X \cdot B = I \Rightarrow X = A^{-1}\,B^{-1}$. *A* y *B* son inversibles, ya que $|A| = -1$ y $|B| = 1$. $A^{-1} = \begin{pmatrix} -4 & 3 \\ 3 & -2 \end{pmatrix}$; $B^{-1} = \begin{pmatrix} -3 & 2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$

De este modo, $X = \begin{pmatrix} -4 & 3 \\ 3 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -3 & 2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & -5 \\ -5 & 4 \end{pmatrix}$

2.68. (PAU) Se consideran las matrices cuadradas reales de orden 2, $P = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$ y $Q = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$. Calcula:

a) La matriz P^{-1}.
b) La matriz real cuadrada *X* de orden 2, tal que $P^{-1}XP = Q$.
c) La matriz $(PQP^{-1})^2$

a) Como $|P| = -1$, entonces existe la matriz inversa de *P*: $P^{-1} = \begin{pmatrix} -3 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$

b) $P^{-1}\,X\,P = Q \Rightarrow X = PQP^{-1} \Rightarrow X = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -3 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 6 \\ 4 & 9 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -3 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & -2 \\ 6 & -1 \end{pmatrix}$

c) $(PQP^{-1})^2 = X^2 = \begin{pmatrix} 6 & -2 \\ 6 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 6 & -2 \\ 6 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 24 & -10 \\ 30 & -11 \end{pmatrix}$

2.69. (PAU) a) Sean *P* y *Q* dos matrices cuadradas de orden *n* que tienen inversa: P^{-1} y Q^{-1}. ¿Tiene inversa la matriz *PQ*? Razona la respuesta.

b) Calcula la matriz inversa de la matriz: $P = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 1 \\ -1 & 3 & -1 \end{pmatrix}$

a) La matriz inversa de *PQ* es $Q^{-1}P^{-1}$. En efecto, $(PQ)(Q^{-1}P^{-1}) = P(QQ^{-1})P^{-1} = PP^{-1} = I$

b) $|P| = 16 \Rightarrow P^{-1} = \frac{1}{16}\begin{pmatrix} -3 & 7 & 1 \\ 1 & 3 & 5 \\ 6 & 2 & -2 \end{pmatrix}$

2.70. (PAU) Sea *A* una matriz cuadrada de orden 3 diagonal:

a) ¿Qué condiciones deben cumplir los elementos de *A* para que admita inversa?

b) ¿Y cuáles para que dicha inversa coincida con *A*?

a) Sea la matriz $A = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix}$. Para que *A* tenga inversa tiene que ocurrir que det $A \neq 0; \Rightarrow abc \neq 0$, es decir, para que exista A^{-1} tiene que ocurrir que ningún elemento de la diagonal principal sea nulo.

b) Si $A = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix} \Rightarrow A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{a} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{b} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{c} \end{pmatrix}$. Para que $A = A^{-1} \Rightarrow \begin{cases} a = \frac{1}{a} \\ b = \frac{1}{b} \\ c = \frac{1}{c} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a^2 = 1 \\ b^2 = 1 \\ c^2 = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = \pm 1 \\ b = \pm 1 \\ c = \pm 1 \end{cases}$

Luego las matrices que cumplen estas condiciones son:

$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ $D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ $G = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$

$B = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ $E = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ $H = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$

$C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ $F = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$

2.71. (PAU) Sean *A*, *B* y *C* matrices cuadradas del mismo orden con coeficientes en R.

a) Prueba que de la igualdad *AB* = *AC* no puede, en general, deducirse que *B* = *C*, buscando dos matrices 2 x 2 distintas *B*, *C* tales que *AB* = *AC*, siendo $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$.

b) Demuestra que, sin embargo, si det (*A*) ≠ 0 y *AB* = *AC*, entonces *B* = *C*.

a) Consideremos, por ejemplo, las matrices $B = \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 0 & -3 \end{pmatrix}$ y $C = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$ que, no son iguales, pero *AB* = *AC*.

b) Si det (*A*) ≠ 0, existe A^{-1} y, multiplicando a la izquierda por A^{-1} la igualdad *AB* = *AC,* se obtiene:

$A^{-1}AB = A^{-1}AC$; $IB = IC$; $B = C$.

2.72. (PAU) Encuentra dos matrices, *X* e *Y*, de orden 2 x 2 con coeficientes en R, tales que $\begin{cases} AX + BY = C \\ AX = Y \end{cases}$, siendo: $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & -4 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}$ y $C = \begin{pmatrix} 6 & 7 \\ -2 & -5 \end{pmatrix}$.

$\left.\begin{array}{r} AX + BY = C \\ AX = Y \end{array}\right\} \Rightarrow Y + BY = C \Rightarrow (I + B)\,Y = C;\ \ Y = (I + B)^{-1}\,C.$

Calculamos la matriz $I + B$: $I + B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & -4 \\ -2 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -4 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}$; $(I + B)^{-1} = -\frac{1}{8}\begin{pmatrix} 0 & 4 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$

Sustituyendo en la expresión de Y: $Y = -\frac{1}{8}\begin{pmatrix} 0 & 4 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 6 & 7 \\ -2 & -5 \end{pmatrix} = -\frac{1}{8}\begin{pmatrix} -8 & -20 \\ 8 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2{,}5 \\ -1 & -0{,}5 \end{pmatrix}$

Calculamos X despejándola en la segunda ecuación: $AX = Y \to X = A^{-1}\,Y$

Hallamos la inversa de A: $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow A^{-1} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$

Calculamos finalmente X: $X = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2{,}5 \\ -1 & -0{,}5 \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0{,}5 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

Solución del sistema: $X = \begin{pmatrix} 1 & 0{,}5 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$; $Y = \begin{pmatrix} 1 & 2{,}5 \\ -1 & -0{,}5 \end{pmatrix}$

2.73. (PAU) Dadas las matrices reales $A = \begin{pmatrix} 5 & 8 \\ 9 & 4 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & -3 & 2 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -3 & 2 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$ y $D = \begin{pmatrix} 3 & 7 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$.

a) Calcula la matriz $M = A - 2BC$.

b) Justifica que existe la matriz D^{-1}, inversa de *D*, y calcula tal matriz.

c) Calcula las matrices *X*, *Y* que cumplan la siguiente relación: $DX = M = YD$.

a) $M = \begin{pmatrix} 5 & 8 \\ 9 & 4 \end{pmatrix} - 2\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & -3 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -3 & 2 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 8 \\ 9 & 4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 & 2 & -2 \\ 4 & -6 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -3 & 2 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 & 14 \\ -21 & 4 \end{pmatrix}$.

b) Como $|D| = -1$, la matriz D tiene inversa. $D^{-1} = -\begin{pmatrix} 2 & -7 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 7 \\ 1 & -3 \end{pmatrix}$.

c) $DX = M \Rightarrow X = D^{-1}\,M \Rightarrow X = \begin{pmatrix} -2 & 7 \\ 1 & -3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 9 & 14 \\ -21 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -165 & 0 \\ 72 & 2 \end{pmatrix}$

$M = YD \Rightarrow Y = MD^{-1} \Rightarrow Y = \begin{pmatrix} 9 & 14 \\ -21 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -2 & 7 \\ 1 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 & 21 \\ 46 & -159 \end{pmatrix}$

2.74. (PAU) Halla, si existe, una matriz *A* cuadrada 2 x 2 que cumpla las siguientes condiciones:

1. Coincide con su traspuesta.

2. Verifica la ecuación matricial: $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} A \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & -3 \\ 3 & 3 \end{pmatrix}$.

3. Su determinante vale 9.

De 1 se deduce que la matriz A debe ser simétrica: $A = \begin{pmatrix} a & b \\ b & d \end{pmatrix}$.

De 2 se deduce: $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \\ b & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & -3 \\ 3 & 3 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} a+b & -a+d \\ -a-b & a-d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & -3 \\ 3 & 3 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} a + b = -3 \\ -a + d = -3 \end{cases}$

De 3 se deduce que: $|A| = ad - b^2 = 9$

Resolviendo el sistema $\begin{cases} a + b = -3 \\ -a + d = -3 \\ ad - b^2 = 9 \end{cases}$, se obtiene $a = -2$; $b = -1$; $d = -5$. Por tanto, $A = \begin{pmatrix} -2 & -1 \\ -1 & -5 \end{pmatrix}$

2.75. (PAU) Se llama dimensión de un espacio vectorial generado por un grupo de vectores al rango de la matriz cuyas filas son las coordenadas de dichos vectores.

Calcula la dimensión del espacio vectorial generado por los vectores (1, 2, 3, 123), (4, 5, 6 456), (7, 8, 9, 789) y (2, 4, 6, 246).

$$\text{rg}\begin{pmatrix}1&2&3&123\\4&5&6&456\\7&8&9&789\\2&4&6&246\end{pmatrix}=\text{rg}\begin{pmatrix}1&2&3&123\\2&1&0&210\\4&2&0&420\\0&0&0&0\end{pmatrix}=\text{rg}\begin{pmatrix}1&2&3&123\\2&1&0&210\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{pmatrix}=2$$

Por tanto, la dimensión del espacio vectorial generado por esos vectores es 2.

PROFUNDIZACIÓN

2.76. Sean A y B dos matrices cuadradas regulares de igual orden. Demuestra:

a) $(A^{-1})^{-1} = A$ **b) $(A^t)^{-1} = (A^{-1})^t$** **c) $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$**

a) $(A^{-1})(A^{-1})^{-1} = I$; $(A^{-1})A = I$. Por ser A regular $\Rightarrow (A^{-1})^{-1} = A$

b) Multiplicamos por la derecha los dos miembros de la igualdad por A^t

$(A^t)^{-1}A^t = (A^{-1})^t A^t \Rightarrow I = (A^{-1})^t A^t \Rightarrow (A^{-1})^t = (A^t)^{-1}$

c) Multiplicamos por la derecha por la matriz AB.

$(AB)^{-1} AB = (B^{-1}A^{-1}) AB \Rightarrow (AB)^{-1} AB = B^{-1}(A^{-1}A) B = B^{-1} I B = B^{-1} B = I$, por tanto, la igualdad dada es cierta.

2.77. (PAU) Se considera la función: $f(x) = \begin{vmatrix}a&b&-2a&3b\\-1&x&0&0\\0&-1&x&0\\0&0&-1&x\end{vmatrix}$.

Sabiendo que $f(0) = -3$ y $f(1) = f(-1)$, determina a y b.

Desarrollando el determinante, se tiene: $f(x) = ax^3 + bx^2 - 2ax + 3b$

Como $f(0) = -3 \Rightarrow 3b = -3 \Rightarrow b = -1$

$f(1) = f(-1) \Rightarrow a + b - 2a + 3b = -a + b + 2a + 3b \Rightarrow a = 0$

2.78. Se llama determinante de Vandermonde, a determinantes de la forma: $\begin{vmatrix}1&1&1\\a&b&c\\a^2&b^2&c^2\end{vmatrix}$, $\begin{vmatrix}1&1&1&1\\a&b&c&d\\a^2&b^2&c^2&d^2\\a^3&b^3&c^3&d^3\end{vmatrix}$.

a) Comprueba que si a, b y c son distintos entre sí, el determinante es distinto de 0.

b) Desarrolla el primero y, a partir del resultado, halla el segundo.

$$\begin{vmatrix}1&1&1\\a&b&c\\a^2&b^2&c^2\end{vmatrix}\overset{(1)}{=}\begin{vmatrix}1&1&1\\0&b-a&c-a\\0&b^2-ba&c^2-ca\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1&1&1\\0&b-a&c-a\\0&b(b-a)&c(c-a)\end{vmatrix}\overset{(2)}{=}\begin{vmatrix}b-a&c-a\\b(b-a)&c(c-a)\end{vmatrix}\overset{(3)}{=}$$

$$=(b-a)(c-a)\begin{vmatrix}1&1\\b&c\end{vmatrix}=(b-a)(c-a)(c-b).$$

1) A cada fila le restamos la anterior multiplicada por a.

2) Desarrollamos por la primera columna.

3) Sacamos factor común $(b - a)$ de la primera columna y $(c - a)$ de la segunda columna.

Razonando de forma análoga, se obtiene:

$$\begin{vmatrix}1&1&1&1\\a&b&c&d\\a^2&b^2&c^2&d^2\\a^3&b^3&c^3&d^3\end{vmatrix}=(b-a)(c-a)(d-a)(c-b)(d-b)(d-c)$$

Si a, b, c y d son distintos entre sí, el valor del determinante es distinto de 0.

2.79. (PAU) Resuelve la ecuación: $\begin{vmatrix} x & x & x & x \\ x & 1 & 0 & x \\ x & 0 & x & 1 \\ x & x & 1 & 0 \end{vmatrix} = 0.$

Restamos a cada columna la primera: $\begin{vmatrix} x & x & x & x \\ x & 1 & 0 & x \\ x & 0 & x & 1 \\ x & x & 1 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x & 0 & 0 & 0 \\ x & 1-x & -x & 0 \\ x & -x & 0 & 1-x \\ x & 0 & 1-x & -x \end{vmatrix} = x\begin{vmatrix} 1-x & -x & 0 \\ -x & 0 & 1-x \\ 0 & 1-x & -x \end{vmatrix} =$

$= x(x^3 - (1-x)^3) = 0 \Rightarrow x = 0$ ó $x^3 - (1-x)^3 = 0$. $x^3 = (1-x)^3$, tiene como solución real $x = \dfrac{1}{2}$.

Así, $x^3 - (1-x)^3 = 2x^3 - 3x^2 + 3x - 1$ se puede dividir por $\left(x - \dfrac{1}{2}\right)$, y resulta $2x^2 - 2x + 2 = 0$, cuyas raíces (no reales) son $x = \dfrac{1 \pm \sqrt{3}\,i}{2}$.

Las cuatro soluciones son: $0, \dfrac{1}{2}, \dfrac{1+\sqrt{3}\,i}{2}, \dfrac{1-\sqrt{3}\,i}{2}$.

2.80. (PAU)Averigua, según el valor de *a*, el número de raíces reales que tiene la ecuación $\begin{vmatrix} x^2 & a & a & a \\ a & x^2 & a & a \\ a & a & x^2 & a \\ a & a & a & x^2 \end{vmatrix} = 0.$

Sumamos a la primera columna las otras tres:

$$\begin{vmatrix} x^2 & a & a & a \\ a & x^2 & a & a \\ a & a & x^2 & a \\ a & a & a & x^2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x^2+3a & a & a & a \\ x^2+3a & x^2 & a & a \\ x^2+3a & a & x^2 & a \\ x^2+3a & a & a & x^2 \end{vmatrix} = (x^2+3a)\begin{vmatrix} 1 & a & a & a \\ 1 & x^2 & a & a \\ 1 & a & x^2 & a \\ 1 & a & a & x^2 \end{vmatrix} = (x^2+3a)\begin{vmatrix} 1 & a & a & a \\ 0 & x^2-a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & x^2-a & 0 \\ 0 & 0 & 0 & x^2-a \end{vmatrix} =$$

$= (x^2 + 3a)(x^2 - a)^3$

Por tanto, la ecuación es: $(x^2 + 3a)(x^2 - a)^3 = 0$ y sus raíces reales son:

- Si $a = 0$, una única raíz: $x = 0$.
- Si $a > 0$, dos raíces: $x = \pm\sqrt{a}$
- Si $a < 0$, dos raíces: $x = \pm\sqrt{-3a}$

2.81. (PAU) Si $A = \begin{pmatrix} a & 0 & b & 0 \\ b+1 & a & 0 & 0 \\ 0 & b+1 & 0 & a \\ 0 & 0 & a & b \end{pmatrix}$

a) Prueba que para cualquier valor de *a* y *b*, el rango de la matriz *A* es mayor o igual que 2.

b) Determina un par de valores reales de *a* y *b* para los cuales sea rg *A* = 3 y otro par de valores de *a* y *b* de forma que rg *A* = 4.

a) Calculamos los siguientes determinantes de segundo orden, extraídos de la matriz *A*:

$\Delta_1 = \begin{vmatrix} a & 0 \\ b+1 & a \end{vmatrix} = a^2$; $\Delta_2 = \begin{vmatrix} b & 0 \\ a & b \end{vmatrix} = b^2$; $\Delta_3 = \begin{vmatrix} b+1 & a \\ 0 & b+1 \end{vmatrix} = (b+1)^2$

Si $a \neq 0, \Delta_1 \neq 0 \Rightarrow \text{rg}(A) \geq 2$

Si $a = 0$, y $b \neq 0$, $\Delta_2 \neq 0 \Rightarrow \text{rg}(A) \geq 2$

Si $a = 0$ y $b = 0$, $\Delta_3 \neq 0 \Rightarrow \text{rg}(A) \geq 2$.

Por tanto, el rango de *A* siempre es mayor o igual a 2.

b) $|A| = \begin{vmatrix} a & 0 & b & 0 \\ b+1 & a & 0 & 0 \\ 0 & b+1 & 0 & a \\ 0 & 0 & a & b \end{vmatrix} = -a^4 + b^2(b+1)^2$; $-a^4 + b^2(b+1)^2 = 0 \Rightarrow a^4 = b^2(b+1)^2$

- Para $b = 1$, sustituyendo se obtiene $a = \pm\sqrt{2}$. Para estos valores la matriz *A* es la siguiente:

$A = \begin{pmatrix} \sqrt{2} & 0 & 1 & 0 \\ 2 & \sqrt{2} & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & \sqrt{2} \\ 0 & 0 & \sqrt{2} & 1 \end{pmatrix}$; $\text{rg}(A) = 3$ ya que $\begin{vmatrix} \sqrt{2} & 0 & 1 \\ 2 & \sqrt{2} & 0 \\ 0 & 2 & 0 \end{vmatrix} \neq 0$ y $|A| = 0$

- Si hacemos $a = 0$ y $b = 1 \Rightarrow |A| \neq 0$ y en consecuencia $\text{rg}(A) = 4$.

2.82. (PAU) Calcula la matriz *X* en la ecuación $A^3X = B$, siendo $B = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$ y $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ con $a + d = 1$ y $|A| = 1$.

Calculamos: $A^2 = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^2+bc & ab+bd \\ ca+dc & cb+d^2 \end{pmatrix}$

Del enunciado se deduce: $\left.\begin{matrix} \det(A)=1 \\ a+d=1 \end{matrix}\right\} \Rightarrow \left.\begin{matrix} ab-bc=1 \\ a+d=1 \end{matrix}\right\} \Rightarrow \left.\begin{matrix} a(1-a)-bc=1 \\ d=1-a \end{matrix}\right\} \Rightarrow a - a^2 - bc = 1; a^2 + bc = a - 1.$

Análogamente: $\left.\begin{matrix} \det(A)=1 \\ a+d=1 \end{matrix}\right\} \Rightarrow \left.\begin{matrix} ad-bc=1 \\ a+d=1 \end{matrix}\right\} \Rightarrow \left.\begin{matrix} (1-d)d-bc=1 \\ a=1-d \end{matrix}\right\} \Rightarrow d - d^2 - bc = 1;\ d^2 + bc = d - 1.$

Por otro lado: $ab + bd = b(a + d) = b;\ ca + dc = c(a + d) = c$

Sustituyendo en la expresión de A^2: $A^2 = \begin{pmatrix} a-1 & b \\ c & d-1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = A - I$

Calculamos A^3: $A^3 = A^2 \cdot A = (A - I) \cdot A = A^2 - A = A - I - A = -I$. Luego: $A^3 = -I$, $(A^3)^{-1} = (-I)^{-1} = -I$

De la expresión $A^3X = B$, despejando: $(A^3)^{-1}A^3X = (A^3)^{-1}B$; $X = (A^3)^{-1}B = (-I)B = -B = -\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 0 & -3 \end{pmatrix}$.

2.83. (PAU) Calcula el valor del determinante: $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ \log 3 & \log 30 & \log 300 \\ (\log 3)^2 & (\log 30)^2 & (\log 300)^2 \end{vmatrix}$

Conviene recordar que:

$\log 30 = \log(3 \cdot 10) = \log 3 + \log 10 = 1 + \log 3$ $\qquad$ $\log 300 = \log(3 \cdot 100) = \log 3 + \log 100 = 2 + \log 3$

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ \log 3 & \log 30 & \log 300 \\ (\log 3)^2 & (\log 30)^2 & (\log 300)^2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ \log 3 & 1+\log 3 & 2+\log 3 \\ (\log 3)^2 & (1+\log 3)^2 & (2+\log 3)^2 \end{vmatrix}$$

Restamos a cada columna la anterior, y se obtiene:

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \log 3 & 1 & 1 \\ (\log 3)^2 & 1+2\log 3 & 3+2\log 3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1+2\log 3 & 3+2\log 3 \end{vmatrix} = 3 + 2\log 3 - 1 - 2\log 3 = 2$$

RELACIONA Y CONTESTA

Elige la única respuesta correcta en cada caso:

2.1. El rango de la matriz $A = \begin{pmatrix} a & 0 & 2 \\ 0 & b & 1 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}$ es:

A) 1, si $a = b$ $\qquad$ **C) 3, si $ab \neq 0$.** $\qquad$ **E) Ninguna de las anteriores**

B) 2, si $a \neq b$ y $ab \neq 0$ $\qquad$ **D) 3, si $a \neq b$**

C) Para que la matriz *A* tenga rango 3 se tiene que cumplir la siguiente condición $a \cdot b \neq 0$.

2.2. La matriz adjunta de la matriz $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ es la matriz:

A) $\begin{pmatrix} 4 & -3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ $\qquad$ **C)** $\begin{pmatrix} 4 & -3 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$ $\qquad$ **E)** $\begin{pmatrix} 4 & 3 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$

B) $\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}$ $\qquad$ **D)** $\begin{pmatrix} 4 & -3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$

D) La matriz adjunta es Adj $(A) = \begin{pmatrix} 4 & -3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$

2.3. Las soluciones de la ecuación $\begin{vmatrix} x & a & b \\ b & x & a \\ b & a & x \end{vmatrix} = 0$ **son:**

A) No tiene solución real. **C)** $x = -a - b$ **E)** $x = b$, $x = a$, $x = 0$

B) $x = a$ **D)** $x = -a - b$; $x = a$; $x = b$

D) $\begin{vmatrix} x & a & b \\ b & x & a \\ b & a & x \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x+a+b & a & b \\ x+a+b & x & a \\ x+a+b & a & x \end{vmatrix} = (x + a + b)\begin{vmatrix} 1 & a & b \\ 1 & x & a \\ 1 & a & x \end{vmatrix} = (x + a + b)\begin{vmatrix} 1 & a & b \\ 0 & x-a & a-b \\ 0 & 0 & x-b \end{vmatrix} =$

$= (x + a + b)(x - a)(x - b) = 0 \Rightarrow x = -(a + b); x = a; x = b.$

2.4. Si una matriz es de orden 3 y $|A| = -2$, el determinante de $4A$ es:

A) –2 **C) –128** **E) Ninguno de los anteriores**

B) 16 **D) 64**

C) $\det(4A) = 4^3 \det A = 4^3(-2) = -128$

2.5. Sabiendo que $\det(F_1, F_2, F_3) = 4$, el valor de $\det(-F_3, 5F_1 + F_2, 2F_1)$ es:

A) 20 **B) 8** **C) 0** **D) –8** **E) 125**

B) $\det(-F_3, 5F_1 + F_2, 2F_1) = \det(-F_3, 5F_1, 2F_1) + \det(-F_3, F_2, 2F_1) = -2\det(F_3, F_2, F_1) = 2\det(F_3, F_1, F_2) =$

$= -2\det(F1, F_3, F_2) = 2\det(F_1, F_2, F_3) = 2 \cdot 4 = 8$

Señala, en cada caso, las respuestas correctas:

2.6. Sea A una matriz regular de orden 3, entonces se verifica:

A) $|A^{-1}| = \dfrac{1}{|A|}$ **C)** $|2A| = 2^3|A|$ **E)** $|A^t| = -|A|$

B) $|A^4| = |A|^4$ **D)** $|AA^{-1}| = 1$

Son todas correctas.

2.7. Dada la ecuación $\begin{vmatrix} x-a-b & a & b \\ c & x-b-c & b \\ c & a & x-a-c \end{vmatrix} = 0$

A) $x = 0$ **es una solución.** **C)** $x = a + b + c$ **es una solución.** **E) Ninguna de las anteriores.**

B) $x = a$ **es una solución.** **D)** $x = b - c$ **es una solución.**

$\begin{vmatrix} x-a-b & a & b \\ c & x-b-c & b \\ c & a & x-a-c \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x & a & b \\ x & x-b-c & b \\ x & a & x-a-c \end{vmatrix} = x\begin{vmatrix} 1 & a & b \\ 1 & x-b-c & b \\ 1 & a & x-a-c \end{vmatrix} =$

$= x\begin{vmatrix} 1 & a & b \\ 0 & x-b-c & 0 \\ 0 & 0 & x-a-c \end{vmatrix} = x(x - a - b - c)^2 = 0 \Rightarrow x = 0$ ó $x = a + b + c$. Son correctas A y C.

Elige la relación correcta entre las dos afirmaciones dadas:

2.8. a) Una matriz cuadrada es inversible si su determinante es no nulo.

b) Una matriz cuadrada es inversible si su rango coincide con su orden.

A) $a \Rightarrow b$**, pero** $b \not\Rightarrow a$

B) $b \Rightarrow a$**, pero** $a \not\Rightarrow b$

C) $a \Leftrightarrow b$

D) $a \not\Rightarrow b$ **y** $b \not\Rightarrow a$

E) Ninguna de las anteriores

C) $a \Leftrightarrow b$. Ambas proposiciones son equivalentes, en consecuencia, $a \Rightarrow b$ y $b \Rightarrow a$.

Señala el dato innecesario para contestar:

2.9. Para resolver la ecuación matricial $XAB - XC = 2C$**, donde** X **es la matriz incógnita, nos dan los siguientes datos:**

a) Las matrices A **y** B **son equidimensionales.**

b) Las matrices AB **y la matriz** C **tienen el mismo orden.**

c) La matriz $AB - C$ **es regular.**

d) $|AB - C| \neq 0$

A) Puede eliminarse el dato a.

B) Puede eliminarse el dato b.

C) Puede eliminarse el dato c.

D) Puede eliminarse el dato d.

E) No puede eliminarse ninguno.

A) Puede eliminarse el dato a ya que no solo es innecesario, sino que es posible resolver el ejercicio sin que las matrices A y B sean equidimensionales. Lo que es imprescindible es que $A \cdot B$ tenga el mismo orden que la matriz C y además que la matriz $A\,B - C$ será regular para que tenga inversa.

Analiza si la información suministrada es suficiente para contestar la cuestión:

2.10. La matriz dada por $A = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 2 & 5 & 0 \\ 1 & 4 & c \end{pmatrix}$ **tiene rango 2.**

a) Si $ac = 0$ **y** $a \neq 0$ **ó** $c \neq 0$

b) Si $\begin{vmatrix} a & 0 \\ 2 & 5 \end{vmatrix} \neq 0$

A) Cada afirmación es suficiente por sí sola.

B) a es suficiente por sí sola, pero b no.

C) b es suficiente por sí sola, pero a no.

D) Son necesarias las dos juntas.

E) Hacen falta más datos.

B) La afirmación a es suficiente por sí sola, pero no b. Obsérvese que b es insuficiente pues

$\begin{vmatrix} a & 0 \\ 2 & 5 \end{vmatrix} \neq 0 \Rightarrow \begin{vmatrix} a & 0 & 0 \\ 2 & 5 & 0 \\ 1 & 4 & c \end{vmatrix}$ puede ser distinto de 0, bastaría que $c \neq 0$.