1 Matrices

ACTIVIDADES INICIALES

1.I. Señala el número de filas y columnas que componen las tablas de cada uno de los siguientes ejemplos.

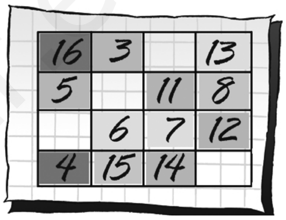
a) Un tablero de ajedrez **b) Una quiniela de fútbol** **c) El cuadro de un sudoku**

a) Ocho filas y ocho columnas b) Quince filas y tres columnas c) Nueve filas y nueve columnas

1.II. Describe tres o cuatro situaciones de la vida cotidiana en las que manejemos tablas numéricas.

Respuesta abierta

1.III. En los cuadrados mágicos la suma de los elementos de sus filas, columnas o diagonales es siempre la misma. Completa este cuadrado para que sea mágico.



Sumamos los términos de la diagonal que está completa.
4 + 6 + 11 + 13 = 34
Como el cuadrado debe ser mágico, todas las filas y columnas deben sumar 34.
Con esta información hallamos los términos desconocidos.

16	3	2	13
5	10	11	8
9	6	7	12
4	15	14	1

1.IV. Escribe el vector $\vec{v}_1 = (3,-2)$ como combinación lineal de los vectores $\vec{v}_2 = (1, 3)$ y $\vec{v}_3 = (-1, 0)$.

Hay que encontrar dos números reales, *a* y *b*, no simultáneamente nulos, tales que: $\vec{v}_1 = a\vec{v}_2 + b\vec{v}_3$

Sustituyendo los vectores $\vec{v}_1$, $\vec{v}_2$ y $\vec{v}_3$ en la expresión anterior, se obtiene:

(3, –2) = *a* (1, 3) + *b* (–1, 0) = (*a*, 3*a*) + (–*b*, 0) = (*a* – *b*, 3*a*)

Igualando las componentes resulta:

$$\left.\begin{array}{r} 3 = a - b \\ -2 = 3a \end{array}\right\} \Rightarrow a = \frac{-2}{3} \Rightarrow 3 = \frac{-2}{3} - b \Rightarrow b = -\frac{2}{3} - 3 = \frac{-11}{3}$$

Por tanto, el vector $\vec{v}_1$ es combinación lineal de los vectores $\vec{v}_2$ y $\vec{v}_3$ del siguiente modo: $\vec{v}_1 = \frac{-2}{3}\vec{v}_2 - \frac{11}{3}\vec{v}_3$

EJERCICIOS PROPUESTOS

1.1. Pon un ejemplo de matriz en los siguientes casos.

a) De dimensión 5 x 2 **b) De dimensión 1 x 6** **c) De orden 4**

Respuesta abierta, se trata únicamente de que la matriz *A* tenga 5 filas y 2 columnas, la *B* una fila y seis columnas y la *C* sea cuadrada con 4 filas y 4 columnas. Por ejemplo:

a) $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 0 \\ 4 & 2 \\ 5 & 7 \\ 6 & -4 \end{pmatrix}$ b) $B = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 & -1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ c) $C = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 & 0 \\ 2 & 0 & -3 & 5 \\ -5 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 6 & 4 & 4 \end{pmatrix}$

1.2. Halla los valores que deben tener las letras para que las matrices *M* y *N* sean iguales.

$$M = \begin{pmatrix} 6 & -1 \\ x & y \\ z & 4 \end{pmatrix} \qquad N = \begin{pmatrix} a & b \\ 5 & 9 \\ -2 & c \end{pmatrix}$$

$a = 6$; $b = -1$; $x = 5$; $y = 9$; $z = -2$; $c = 4$.

1.3. Utilizando las matrices: $A = \begin{pmatrix} -1 & 3 & 2 & 5 \\ 4 & 1 & 0 & -6 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 3 & 2 \\ 4 & 3 & -9 & 7 \end{pmatrix}$ **y** $C = \begin{pmatrix} 2 & -4 & 6 & 5 \\ 4 & -3 & 2 & 8 \end{pmatrix}$.

Comprueba que se cumplen las propiedades conmutativa y la asociativa de la suma de matrices.

Veamos que se cumple la propiedad conmutativa:

$$A + B = \begin{pmatrix} -1 & 3 & 2 & 5 \\ 4 & 1 & 0 & -6 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 & 3 & 2 \\ 4 & 3 & -9 & 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 3 & 5 & 7 \\ 8 & 4 & -9 & 1 \end{pmatrix}$$

$$B + A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 3 & 2 \\ 4 & 3 & -9 & 7 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 & 3 & 2 & 5 \\ 4 & 1 & 0 & -6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 3 & 5 & 7 \\ 8 & 4 & -9 & 1 \end{pmatrix}$$

Luego en efecto $A + B = B + A$.

Veamos que se cumple la propiedad asociativa:

$$A + (B + C) = \begin{pmatrix} -1 & 3 & 2 & 5 \\ 4 & 1 & 0 & -6 \end{pmatrix} + \left[\begin{pmatrix} 0 & 0 & 3 & 2 \\ 4 & 3 & -9 & 7 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & -4 & 6 & 5 \\ 4 & -3 & 2 & 8 \end{pmatrix}\right] =$$

$$= \begin{pmatrix} -1 & 3 & 2 & 5 \\ 4 & 1 & 0 & -6 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & -4 & 9 & 7 \\ 8 & 0 & -7 & 15 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 11 & 12 \\ 12 & 1 & -7 & 9 \end{pmatrix}$$

$$(A + B) + C = \begin{pmatrix} -1 & 3 & 5 & 7 \\ 8 & 4 & -9 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & -4 & 6 & 5 \\ 4 & -3 & 2 & 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 11 & 12 \\ 12 & 1 & -7 & 9 \end{pmatrix}$$

Luego en efecto $A + (B + C) = (A + B) + C$

1.4. Halla la matriz opuesta de la matriz *A + B*, siendo $A = \begin{pmatrix} 5 & -3 & 2 \\ 4 & 7 & 9 \\ 3 & -8 & 6 \end{pmatrix}$ **y** $B = \begin{pmatrix} 2 & 5 & 4 \\ -1 & 6 & 5 \\ 8 & 8 & 6 \end{pmatrix}$.

$$A + B = \begin{pmatrix} 5 & -3 & 2 \\ 4 & 7 & 9 \\ 3 & -8 & 6 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & 5 & 4 \\ -1 & 6 & 5 \\ 8 & 8 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & 2 & 6 \\ 3 & 13 & 14 \\ 11 & 0 & 12 \end{pmatrix} \Rightarrow -(A + B) = \begin{pmatrix} -7 & -2 & -6 \\ -3 & -13 & -14 \\ -11 & 0 & -12 \end{pmatrix}$$

1.5. Considera las matrices *A* y *B* del ejercicio resuelto anterior y calcula:

a) $2A^t - 5B^t$ **b)** $-3(A + B)$ **c)** $\frac{1}{2}A$

a) $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 4 \\ -1 & 5 & 3 \end{pmatrix} \Rightarrow A^T = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 2 & 5 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}$; $B = \begin{pmatrix} 6 & 7 & 9 \\ 0 & -2 & 4 \end{pmatrix} \Rightarrow B^T = \begin{pmatrix} 6 & 0 \\ 7 & -2 \\ 9 & 4 \end{pmatrix}$

$$2A^T - 5B^T = \begin{pmatrix} 6 & -2 \\ 4 & 10 \\ 8 & 6 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 30 & 0 \\ 35 & -10 \\ 45 & 20 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -24 & -2 \\ -31 & 20 \\ -37 & -14 \end{pmatrix}$$

b) $-3(A + B) = -3\begin{pmatrix} 9 & 9 & 13 \\ -1 & 3 & 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -27 & -27 & -39 \\ 3 & -9 & -21 \end{pmatrix}$

c) $\frac{1}{2}A = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 3 & 2 & 4 \\ -1 & 5 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{3}{2} & 1 & 2 \\ \frac{-1}{2} & \frac{5}{2} & \frac{3}{2} \end{pmatrix}$

1.6. Dadas las matrices *A y B* y los números reales *k* = 2 y *h* = 5, comprueba que se verifican las propiedades distributivas.

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 4 \\ -1 & 5 & 3 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 6 & 7 & 9 \\ 0 & -2 & 4 \end{pmatrix}$$

Tenemos que comprobar que se cumple:

Propiedad distributiva 1ª: $k(A + B) = kA + kB$

$$2(A + B) = 2\left[\begin{pmatrix} 3 & 2 & 4 \\ -1 & 5 & 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 6 & 7 & 9 \\ 0 & -2 & 4 \end{pmatrix}\right] = 2\begin{pmatrix} 9 & 9 & 13 \\ -1 & 3 & 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 18 & 18 & 26 \\ -2 & 6 & 14 \end{pmatrix}$$

$$2A + 2B = 2\begin{pmatrix} 3 & 2 & 4 \\ -1 & 5 & 3 \end{pmatrix} + 2\begin{pmatrix} 6 & 7 & 9 \\ 0 & -2 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & 4 & 8 \\ -2 & 10 & 6 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 12 & 14 & 18 \\ 0 & -4 & 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 18 & 18 & 26 \\ -2 & 6 & 14 \end{pmatrix}$$

Propiedad distributiva 2ª: $(k + h)A = kA + hA$

$$(2 + 5)A = 7A = 7\begin{pmatrix} 3 & 2 & 4 \\ -1 & 5 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 21 & 14 & 28 \\ -7 & 35 & 21 \end{pmatrix}$$

$$2A + 5A = 2\begin{pmatrix} 3 & 2 & 4 \\ -1 & 5 & 3 \end{pmatrix} + 5\begin{pmatrix} 3 & 2 & 4 \\ -1 & 5 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & 4 & 8 \\ -2 & 10 & 6 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 15 & 10 & 20 \\ -5 & 25 & 15 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 21 & 14 & 28 \\ -7 & 35 & 21 \end{pmatrix}$$

1.7. Dadas las matrices: $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Explica razonadamente si puedes realizar los productos *AB* y *BA*. En caso afirmativo, halla los resultados.

La matriz *A* tiene dimensión 3 x 4 y la matriz *B* es de orden 3, es decir tiene dimensión 3 x 3.
No se puede realizar el producto *AB* pues no coincide el número de columnas de *A* con el de filas de *B*, pero si se puede realizar el producto *BA* pues coincide el número de columnas de *B* con el de filas de *A*, el resultado es una matriz de dimensión 3 x 4.

$$BA = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 3 & 3 & 0 \\ 7 & 5 & 5 & 0 \\ 3 & 4 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$

1.8. Calcula $A^2 - 3A - I$, siendo $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ e *I* la matriz identidad de orden 2.

$$A^2 - 3A - I = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} - 3\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & 9 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 6 & 9 \\ 3 & 3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

1.9. Dada la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 & 1 \\ 4 & 5 & 3 & -2 \end{pmatrix}$, explica razonadamente si existe una matriz *B* tal que el producto *AB* sea una matriz de tres filas.

La matriz *A* tiene dimensión 2 x 4.

Para que pueda efectuarse el producto *AB*, la matriz *B* debe tener 4 filas ya que el número de columnas de *A*, 4, debe coincidir con el de filas de *B*.

Si la dimensión de *B* es 4 x *C* siendo *C* el número de columnas, la matriz producto *AB* tendrá dimensión 2 x *C*.
Por tanto, la matriz producto *AB* tendrá 2 filas independientemente de cómo sea la matriz *C*.

Por tanto, no existe ninguna matriz *B* tal que *AB* sea una matriz de 3 filas.

1.10. Comprueba que la inversa de $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ es $A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$.

Basta ver que $A \cdot A^{-1} = I_2$ $\quad A \cdot A^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

Luego, en efecto, son inversas.

1.11. Halla la matriz inversa de las matrices *A* y *B* y comprueba los resultados obtenidos.

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} \mathbf{5} & \mathbf{7} \\ \mathbf{-2} & \mathbf{3} \end{pmatrix} \qquad \boldsymbol{B} = \begin{pmatrix} \mathbf{3} & \mathbf{-2} \\ \mathbf{4} & \mathbf{5} \end{pmatrix}$$

Sea $A^{-1} = \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix}$; $\quad AA^{-1} = I_2 \Rightarrow \begin{pmatrix} 5 & 7 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$; $\begin{pmatrix} 5x+7z & 5y+7t \\ -2x+3z & -2y+3t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

Identificando se obtiene: $\left.\begin{array}{r} 5x+7z=1 \\ 5y+7t=0 \\ -2x+3z=0 \\ -2y+3t=1 \end{array}\right\} \Rightarrow x = \dfrac{3}{29}$; $y = \dfrac{-7}{29}$; $z = \dfrac{2}{29}$; $t = \dfrac{5}{29}$

Por tanto, la matriz inversa de la matriz A es la matriz: $A^{-1} = \begin{pmatrix} \dfrac{3}{29} & \dfrac{-7}{29} \\ \dfrac{2}{29} & \dfrac{5}{29} \end{pmatrix}$.

En efecto $AA^{-1} = \begin{pmatrix} 5 & 7 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \dfrac{3}{29} & \dfrac{-7}{29} \\ \dfrac{2}{29} & \dfrac{5}{29} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dfrac{15}{29}+\dfrac{14}{29} & \dfrac{-35}{29}+\dfrac{35}{29} \\ \dfrac{-6}{29}+\dfrac{6}{29} & \dfrac{14}{29}+\dfrac{15}{29} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

Sea $B^{-1} = \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix}$; $BB^{-1} = I_2 \Rightarrow \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$; $\begin{pmatrix} 3x-2z & 3y-2t \\ 4x+5z & 4y+5t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

Identificando se obtiene: $\left.\begin{array}{r} 3x-2z=1 \\ 4x+5z=0 \\ 3y-2t=0 \\ 4y+5t=1 \end{array}\right\} \Rightarrow z = \dfrac{-4}{23};\ x = \dfrac{5}{23};\ t = \dfrac{3}{23};\ y = \dfrac{2}{23}$

Por tanto, la matriz inversa de la matriz B es la matriz: $B^{-1} = \begin{pmatrix} \dfrac{5}{23} & \dfrac{2}{23} \\ \dfrac{-4}{23} & \dfrac{3}{23} \end{pmatrix}$.

En efecto $BB^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \dfrac{5}{23} & \dfrac{2}{23} \\ \dfrac{-4}{23} & \dfrac{3}{23} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dfrac{15}{23}+\dfrac{8}{23} & \dfrac{6}{23}+\dfrac{-6}{23} \\ \dfrac{20}{23}+\dfrac{-20}{23} & \dfrac{8}{23}+\dfrac{15}{23} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

1.12. Obtén razonadamente el rango de la matriz $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{2} & \mathbf{3} \\ \mathbf{4} & \mathbf{5} & \mathbf{6} \\ \mathbf{5} & \mathbf{7} & \mathbf{9} \end{pmatrix}$.

La fila tercera es la suma de la primera y la segunda.
Las filas primera y segunda no son proporcionales, luego rg(A) = 2.

1.13. Comprueba que en la siguiente matriz el número de filas linealmente independientes coincide con el número de columnas linealmente independientes.

$$\boldsymbol{B} = \begin{pmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{1} & \mathbf{3} \\ \mathbf{0} & \mathbf{3} & \mathbf{9} \\ \mathbf{5} & \mathbf{5} & \mathbf{15} \end{pmatrix}$$

Por columnas:
La columna tercera es igual al triple de la segunda.
Las columnas primera y segunda no son proporcionales, luego rg(B) = 2.

Por filas:
La fila segunda es el triple de la primera.
Las filas primera y tercera no son proporcionales, luego rg(B) = 2.

1.14. Calcula el rango de las siguientes matrices aplicando el método de Gauss.

$$A=\begin{pmatrix}1&2&3\\4&5&6\\7&8&9\end{pmatrix}\qquad B=\begin{pmatrix}1&1&0\\2&3&-6\\4&6&-12\end{pmatrix}$$

$$\text{rg}(A)=\text{rg}\begin{pmatrix}1&2&3\\4&5&6\\7&8&9\end{pmatrix}\underset{\substack{F_2-F_1\\F_3-F_2}}{=}\text{rg}\begin{pmatrix}1&2&3\\3&3&3\\3&3&3\end{pmatrix}\underset{\substack{F_2-3F_1\\F_3-F_2}}{=}\text{rg}\begin{pmatrix}1&2&3\\0&-3&-6\\0&0&0\end{pmatrix}=2$$

$$\text{rg}(B)=\text{rg}\begin{pmatrix}1&1&0\\2&3&-6\\4&6&-12\end{pmatrix}\underset{2F_2}{=}\text{rg}\begin{pmatrix}1&1&0\\4&6&-12\\4&6&-12\end{pmatrix}\underset{\substack{F_2-4F_1\\F_3-F_2}}{=}\text{rg}\begin{pmatrix}1&1&0\\0&2&-12\\0&0&0\end{pmatrix}=2$$

1.15. Aplica el método de Gauss para calcular el rango de las matrices siguientes:

$$A=\begin{pmatrix}1&1&2&1&3\\1&1&3&2&1\\1&1&2&1&7\end{pmatrix}\qquad B=\begin{pmatrix}0&3&-1&2&5\\1&1&-2&-1&3\\2&5&-5&0&11\\-1&-4&3&-1&-8\end{pmatrix}$$

$$\text{rg}(A)=\text{rg}\begin{pmatrix}1&1&2&1&3\\1&1&3&2&1\\1&1&2&1&7\end{pmatrix}\underset{\substack{F_2-F_1\\F_3-F_1}}{=}\text{rg}\begin{pmatrix}1&1&2&1&3\\0&0&1&1&-2\\0&0&0&0&4\end{pmatrix}=3$$

$$\text{rg}(B)=\text{rg}\begin{pmatrix}0&3&-1&2&5\\1&1&-2&-1&3\\2&5&-5&0&11\\-1&-4&3&-1&-8\end{pmatrix}\underset{\substack{F_4+F_2\\F_3-2F_2}}{=}\text{rg}\begin{pmatrix}0&3&-1&2&5\\1&1&-2&-1&3\\0&3&-1&2&5\\0&-3&1&-2&-5\end{pmatrix}\xrightarrow[F_2\leftrightarrow F_1]{}$$

$$\text{rg}\begin{pmatrix}1&1&-2&-1&3\\0&3&-1&2&5\\0&3&-1&2&5\\0&-3&1&-2&-5\end{pmatrix}\underset{\substack{F_4+F_2\\F_3-F_2}}{=}\text{rg}\begin{pmatrix}1&1&-2&-1&3\\0&3&-1&2&5\\0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0\end{pmatrix}=2$$

1.16. Aplica el método de Gauss-Jordan para calcular las inversas de las siguientes matrices:

$$A=\begin{pmatrix}-1&4\\2&3\end{pmatrix}\qquad B=\begin{pmatrix}2&3\\1&1\end{pmatrix}$$

Construimos la matriz $(A\mid I_2)=\left(\begin{array}{cc|cc}-1&4&1&0\\2&3&0&1\end{array}\right)$.

Transformamos la matriz anterior hasta obtener una matriz de la forma $(I_2\mid A^{-1})$ del siguiente modo:

$$(A\mid I_2)=\left(\begin{array}{cc|cc}-1&4&1&0\\2&3&0&1\end{array}\right)\xrightarrow[F_2+2F_1]{}\left(\begin{array}{cc|cc}-1&4&1&0\\0&11&2&1\end{array}\right)\xrightarrow[F_2-\frac{4}{11}F_1]{}\left(\begin{array}{cc|cc}-1&0&\frac{3}{11}&\frac{-4}{11}\\0&11&2&1\end{array}\right)\xrightarrow[(-1)F_1]{}$$

$$\left(\begin{array}{cc|cc}1&0&-3/11&4/11\\0&11&2&1\end{array}\right)\xrightarrow[\frac{1}{11}F_2]{}\left(\begin{array}{cc|cc}1&0&\frac{-3}{11}&\frac{4}{11}\\0&1&\frac{2}{11}&\frac{1}{11}\end{array}\right)=(I_2\mid A^{-1})$$

Por tanto, $A^{-1}=\begin{pmatrix}\frac{-3}{11}&\frac{4}{11}\\\frac{2}{11}&\frac{1}{11}\end{pmatrix}$. En efecto, $AA^{-1}=\begin{pmatrix}-1&4\\2&3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\frac{-3}{11}&\frac{4}{11}\\\frac{2}{11}&\frac{1}{11}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{3}{11}+\frac{8}{11}&\frac{-4}{11}+\frac{4}{11}\\\frac{-6}{11}+\frac{6}{11}&\frac{8}{11}+\frac{3}{11}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}$

Construimos la matriz $(B\mid I_2)=\left(\begin{array}{cc|cc}2&3&1&0\\1&1&0&1\end{array}\right)$.

$$(B\mid I_2)=\left(\begin{array}{cc|cc}2&3&1&0\\1&1&0&1\end{array}\right)\xrightarrow[F_2\leftrightarrow F_1]{}\left(\begin{array}{cc|cc}1&1&0&1\\2&3&1&0\end{array}\right)\xrightarrow[F_2-2F_1]{}\left(\begin{array}{cc|cc}1&1&0&1\\0&1&1&-2\end{array}\right)\xrightarrow[F_1-F_2]{}$$

$$\left(\begin{array}{cc|cc}1&0&-1&3\\0&1&1&-2\end{array}\right)=(I_2\mid B^{-1}).\quad B^{-1}=\begin{pmatrix}-1&3\\1&-2\end{pmatrix}.\text{ En efecto, }BB^{-1}=\begin{pmatrix}2&3\\1&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-1&3\\1&-2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}$$

1.17. (TIC) Halla la matriz inversa de las siguientes matrices por el método de Gauss - Jordan y comprueba los resultados.

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 3 \\ 0 & 4 & 1 \end{pmatrix} \qquad \boldsymbol{B} = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 5 \\ 1 & -1 & 7 \\ -2 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

1º Se construye la matriz $(A \mid I_3) = \left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 4 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$.

2º Se realizan transformaciones en la matriz anterior hasta obtener la matriz $(I_3 \mid A^{-1})$.

$$(A \mid I_3) = \left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 4 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{F_1 \to F_1 + 2F_2} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 0 & 3 & 6 & 1 & 2 & 0 \\ -1 & 1 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 4 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow[F_1 \leftrightarrow F_2]{F_2 \to -F_2} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & -3 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 3 & 6 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 4 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

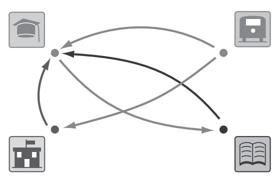
$$\xrightarrow{F_2 \to \frac{1}{3}F_2} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & -3 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & \frac{1}{3} & \frac{2}{3} & 0 \\ 0 & 4 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{F_3 \to F_3 - 4F_2} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & -3 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & \frac{1}{3} & \frac{2}{3} & 0 \\ 0 & 0 & -7 & \frac{-4}{3} & \frac{-8}{3} & 1 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[F_1 \to F_1 + F_2]{F_3 \to -\frac{1}{7}F_3} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -1 & \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 1 & 2 & \frac{1}{3} & \frac{2}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{4}{21} & \frac{8}{21} & -\frac{1}{7} \end{array}\right) \xrightarrow[F_2 \to F_2 - 2F_3]{F_1 \to F_1 + F_3} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & \frac{11}{21} & \frac{1}{21} & -\frac{1}{7} \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{1}{21} & -\frac{2}{21} & \frac{2}{7} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{4}{21} & \frac{8}{21} & -\frac{1}{7} \end{array}\right) = (I_3 \mid A^{-1})$$

Por tanto, $A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{11}{21} & \frac{1}{21} & -\frac{1}{7} \\ \frac{-1}{21} & \frac{-2}{21} & \frac{2}{7} \\ \frac{4}{21} & \frac{8}{21} & -\frac{1}{7} \end{pmatrix}$. Se puede comprobar que $AA^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 3 \\ 0 & 4 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{11}{21} & \frac{1}{21} & -\frac{1}{7} \\ \frac{-1}{21} & \frac{-2}{21} & \frac{2}{7} \\ \frac{4}{21} & \frac{8}{21} & -\frac{1}{7} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = I_3$

En el segundo caso, se comprueba que $F_3 = F_2 - F_1$, por lo que rg(B)=2 y B no tiene inversa.

1.18. El grafo relaciona 4 puntos importantes de una ciudad:



a) Formar la matriz *M* asociada al grafo.

b) ¿Qué sentido tiene la matriz *M*²?

a) Si denotamos por U a la universidad, E a la estación de autobuses, A al ayuntamiento y B a la biblioteca, tenemos que la matriz asociada al grafo es:

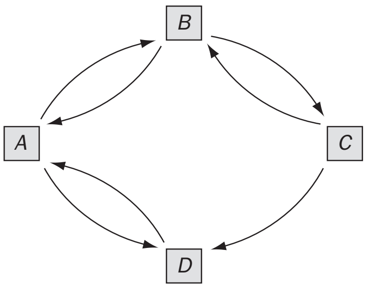
$$\begin{array}{ll} & \text{Hasta: } \; U \;\; E \;\; A \;\; B \\ \text{Desde: } \begin{cases} U \\ E \\ A \\ B \end{cases} & \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = M \end{array}$$

b) Formemos la matriz M^2: $MM = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = C$

La matriz M^2 expresa en qué forma se pueden establecer comunicaciones entre los puntos importantes de la ciudad pasando por uno de ellos.
Así, por ejemplo, el elemento c_{24} es igual a 1, eso significa que desde la estación de trenes se puede comunicar con la biblioteca a través de otro punto de la ciudad, en este caso, el Ayuntamiento: $E \to A \to U$.

1.19. Las conexiones directas por avión entre cuatro ciudades se representan en la matriz: $A = \begin{pmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{1} & \mathbf{0} & \mathbf{1} \\ \mathbf{1} & \mathbf{0} & \mathbf{1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{1} & \mathbf{0} & \mathbf{1} \\ \mathbf{1} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{pmatrix}$

¿De cuántas formas se puede viajar de una ciudad a otra haciendo una escala? ¿Y haciendo dos escalas?



La matriz A^2 expresa en qué forma se puede establecer comunicaciones entre las cuatro ciudades haciendo una escala.

$$A^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 2 \\ 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Por ejemplo:
a_{11} = 2 indica que hay dos formas diferentes de comunicar la ciudad *A* consigo misma haciendo una escala. En efecto haciendo escala en *B*: $A \to B \to A$ o haciendo escala en *D*: $A \to D \to A$.

a_{12} = 0 indica que no hay ningún modo de ir desde *A* hasta *B* haciendo una escala. Podemos comprobarlo si observamos el grafo asociado a esta situación.

a_{13} = 1 indica que hay un único modo de ir desde *A* hasta *C* haciendo escala en una ciudad. En efecto, $A \to B \to C$.

a_{14} = 0 indica que no hay ningún modo de ir desde *A* hasta *D* haciendo una escala.

Del mismo modo, la matriz $A^3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 2 \\ 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 0 & 3 \\ 4 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 3 \\ 2 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ da las formas que tienen de comunicarse por avión las cuatro ciudades haciendo dos escalas.

Por ejemplo:
a_{41} = 2 indica que hay dos formas diferentes de comunicar la ciudad *D* con la ciudad *A* haciendo dos escalas. En efecto haciendo escala en *A* y *B*: $D \to A \to B \to A$ o haciendo escala en *A* y *D*: $D \to A \to D \to A$.

a_{42} = 0 indica que no hay ningún modo de ir desde *D* hasta *B* haciendo dos escalas. Podemos comprobarlo si observamos el grafo asociado a esta situación.

a_{43} = 1 indica que hay un único modo de ir desde *D* hasta *C* haciendo dos escalas. En efecto, $D \to A \to B \to C$.

a_{44} = 0 indica que no hay ningún modo de ir desde *D* hasta *D* haciendo dos escalas.

1.20. Dado el punto P(2, –1), halla su transformado mediante los siguientes movimientos:

a) Una traslación de vector guía $\vec{v}$ = (1, 3) primero y un giro de centro el origen y amplitud 90° después.

b) Un giro de centro el origen y amplitud 90º primero y una traslación de vector guía $\vec{v}$ = (1, 3) después.

c) ¿Has obtenido los mismos resultados? Trata de explicar a qué es debido.

a) Traslación de vector (1, 3): (2, –1) + (1, 3) = (3, 2)

Giro de centro el origen y amplitud 90º: $(3, 2)\begin{pmatrix} \cos 90^\circ & \operatorname{sen} 90^\circ \\ -\operatorname{sen} 90^\circ & \cos 90^\circ \end{pmatrix} = (3, 2)\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = (-2, 3)$

b) Giro de centro el origen y amplitud 90º: $(2, -1)\begin{pmatrix} \cos 90^\circ & \operatorname{sen} 90^\circ \\ -\operatorname{sen} 90^\circ & \cos 90^\circ \end{pmatrix} = (2, -1)\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = (1, 2)$

Traslación de vector (1, 3): (1, 2) + (1, 3) = (2, 5)

c) No se han obtenido los mismos resultados ya que como el producto de matrices no es conmutativo entonces, el producto de movimientos no es conmutativo.

EJERCICIOS

Operaciones con matrices

1.21. Dadas las matrices $A = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ -3 & 4 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 5 \end{pmatrix}$, halla las matrices:

a) $2A + 3B$ b) AB c) BA d) A^3 e) $AB - A^2$ f) $2B + BA^2$

a) $2A + 3B = \begin{pmatrix} -2 & 4 \\ -6 & 8 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & -3 \\ -3 & 15 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ -9 & 23 \end{pmatrix}$

b) $AB = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ -3 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 11 \\ -4 & 23 \end{pmatrix}$

c) $BA = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ -3 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -4 \\ -14 & 18 \end{pmatrix}$

d) $A^3 = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ -3 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ -3 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ -3 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 & 6 \\ -9 & 10 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ -3 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -13 & 14 \\ -21 & 22 \end{pmatrix}$

e) $AB - A^2 = \begin{pmatrix} -2 & 11 \\ -4 & 23 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -5 & 6 \\ -9 & 10 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 5 & 13 \end{pmatrix}$

f) $2B + BA^2 = 2\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 5 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -5 & 6 \\ -9 & 10 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ -2 & 10 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 9 & -10 \\ -40 & 44 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 & -12 \\ -42 & 54 \end{pmatrix}$

1.22. Sean las matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ -1 & 4 & 2 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 2 & 6 & 0 \\ 0 & -4 & 2 \\ -3 & 1 & -5 \end{pmatrix}$. Calcula:

a) AB b) BA c) BB^t d) AB^2

a) $AB = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ -1 & 4 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 6 & 0 \\ 0 & -4 & 2 \\ -3 & 1 & -5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 & 4 & 10 \\ -8 & -20 & -2 \end{pmatrix}$

b) No es posible realizar el producto *BA* ya que el número de columnas de la matriz *B* no coincide con el número de filas de la matriz *A*.

c) $BB^t = \begin{pmatrix} 2 & 6 & 0 \\ 0 & -4 & 2 \\ -3 & 1 & -5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 0 & -3 \\ 6 & -4 & 1 \\ 0 & 2 & -5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 40 & -24 & 0 \\ -24 & 20 & -14 \\ 0 & -14 & 35 \end{pmatrix}$

d) $AB^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ -1 & 4 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 6 & 0 \\ 0 & -4 & 2 \\ -3 & 1 & -5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 6 & 0 \\ 0 & -4 & 2 \\ -3 & 1 & -5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ -1 & 4 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 & -12 & 12 \\ -6 & 18 & -18 \\ 9 & -27 & 27 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -14 & 42 & -42 \\ -10 & 30 & -30 \end{pmatrix}$

1.23. (PAU) Dadas las matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 5 & 3 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 1 \\ 0 & 6 \end{pmatrix}$, comprueba que $(BA)^t = A^t B^t$.

$BA = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 1 \\ 0 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 5 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & 7 \\ 8 & 9 \\ 30 & 18 \end{pmatrix}$. Luego $(BA)^t = \begin{pmatrix} 7 & 8 & 30 \\ 7 & 9 & 18 \end{pmatrix}$

Por otra parte: $A^tB^t = \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 3 & 0 \\ 1 & 1 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & 8 & 30 \\ 7 & 9 & 18 \end{pmatrix}$

Luego, en efecto, se verifica que $(BA)^t = A^tB^t$.

1.24. (PAU) Dada la matriz $A = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 1 & b \end{pmatrix}$, ¿qué relación deben guardar las constantes *a* y *b* para que se verifique que $A^2 = A$?

$A^2 = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 1 & b \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & 0 \\ 1 & b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^2 & 0 \\ a+b & b^2 \end{pmatrix}$. Si se verifica que $A^2 = A$, entonces $\begin{pmatrix} a^2 & 0 \\ a+b & b^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 1 & b \end{pmatrix}$

Igualando resulta: $a^2 = a$, $b^2 = b$, $a + b = 1 \Rightarrow a = 0$ o $a = 1$; $b = 0$ o $b = 1$

También se ha de verificar que $a + b = 1$, por tanto, las soluciones posibles son $a = 0$, $b = 1$ o $a = 1$, $b = 0$.

Es decir, hay dos soluciones: $A_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$; $A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

1.25. (PAU) Encuentra las matrices *X* cuadradas de orden 2 que verifican la siguiente relación.

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 12 \\ -3 & 15 \end{pmatrix}$$

Sea la matriz $X = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$. Entonces: $\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2a-c & 2b-d \\ a+2c & b+2d \\ 3c & 3d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 12 \\ -3 & 15 \end{pmatrix}$

Igualando ambas matrices se deducen las siguientes ecuaciones:

$\left.\begin{array}{r} 2a-c=3 \\ a+2c=-1 \\ 3c=-3 \end{array}\right\} \quad \left.\begin{array}{r} 2b-d=-1 \\ b+2d=12 \\ 3d=15 \end{array}\right\}$ cuyas soluciones son: $a = 1$; $b = 2$; $c = -1$ y $d = 5$

Por lo tanto, la matriz buscada es $X = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 5 \end{pmatrix}$.

1.26. (PAU) ¿Qué matrices conmutan con la matriz $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$?

Sean las matrices de la forma $\begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix}$. Si conmutan con la matriz $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, entonces:

$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x+2z & y+2t \\ z & t \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x & 2x+y \\ z & 2z+t \end{pmatrix}$

Igualando los elementos uno a uno tenemos: $x = t$, $z = 0$.

Por tanto, las matrices buscadas son de la forma $\begin{pmatrix} x & y \\ 0 & x \end{pmatrix}$, cualesquiera que sean x e y.

1.27. (PAU) Dada la matriz $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$:

a) Encuentra todas las matrices *B* cuyo producto con *A* verifique la propiedad conmutativa, es decir: *AB* = *BA*

b) Calcula A^n, con *n* cualquier número natural.

a) Para que $AB = BA$, la matriz B tiene que ser de orden 3. Supongamos que $B = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix}$, entonces:

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ a & b & c \\ d & e & f \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b & c & 0 \\ e & f & 0 \\ h & i & 0 \end{pmatrix}$$

Igualando se obtiene: $a = e = i = \alpha$; $b = c = f = 0$; $d = h = \beta$ y $g = \gamma$

Por tanto, las matrices que verifican la igualdad dada son de la forma $B = \begin{pmatrix} \alpha & 0 & 0 \\ \beta & \alpha & 0 \\ \gamma & \beta & \alpha \end{pmatrix}$.

b) $A^2 = AA = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$; $A^3 = A^2A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

$A^4 = A^3A = OA = O, \ldots, A^n = O$, matriz nula para cada $n > 2$.

1.28. (PAU) Sean las matrices $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & -3 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 0 & -3 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$. Resuelve el sistema $\begin{cases} 3X + Y = A \\ X - 2Y = 2B \end{cases}$.

$$\left.\begin{cases} 3X + Y = A \\ X - 2Y = 2B \end{cases} \Rightarrow \begin{matrix} 3X + Y = A \\ 3X - 6Y = 6B \end{matrix}\right\} \Rightarrow 7Y = A - 6B$$

$$Y = \frac{1}{7}(A - 6B) = \frac{1}{7}\left[\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & -3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & -18 \\ 6 & -6 \end{pmatrix}\right] = \frac{1}{7}\begin{pmatrix} 2 & 17 \\ -5 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{2}{7} & \frac{17}{7} \\ \frac{-5}{7} & \frac{3}{7} \end{pmatrix}$$

$$X = 2B + 2Y = \begin{pmatrix} 0 & -6 \\ 2 & -2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{4}{7} & \frac{24}{7} \\ \frac{-10}{7} & \frac{6}{7} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{4}{7} & \frac{-8}{7} \\ \frac{4}{7} & \frac{-8}{7} \end{pmatrix}$$

Por tanto, las matrices buscadas son: $X = \begin{pmatrix} \frac{4}{7} & \frac{-8}{7} \\ \frac{4}{7} & \frac{-8}{7} \end{pmatrix}$, $Y = \begin{pmatrix} \frac{2}{7} & \frac{17}{7} \\ \frac{-5}{7} & \frac{3}{7} \end{pmatrix}$

1.29. (PAU) Calcula la matriz $A^{250} + A^{20}$ siendo $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$.

$A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$, $A^3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$. Suponemos que $A^n = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ n & 1 \end{pmatrix}$

$A^{n+1} = A^nA = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ n & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ n+1 & 1 \end{pmatrix}$

De este modo, queda probado por el método de inducción que $A^n = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ n & 1 \end{pmatrix}$.

Por tanto, $A^{250} + A^{20} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 250 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 20 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 270 & 2 \end{pmatrix}$

1.30. (PAU) Dada la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

a) Calcula A^2 y A^3.

b) Halla una ley general para calcular A^n.

a) Calculamos las primeras potencias de la matriz A:

$A^2 = AA = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ $\quad A^3 = A^2A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

b) Aplicando el método de inducción, suponemos que $A^{n-1} = \begin{pmatrix} 1 & n-1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

y calculamos A^n: $A^n = A^{n-1}A = \begin{pmatrix} 1 & n-1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & n \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

Luego la ley general para las potencias de A es $A^n = \begin{pmatrix} 1 & n \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

1.31. (PAU) Se consideran las matrices: $M = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ y $N = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ x & 1 & 0 \\ y & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

a) Determina x e y para que $MN = NM$.

b) Calcula M^{1995} y M^{1996}.

a) Se tiene: $MN = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ x & 1 & 0 \\ y & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y & 0 & 0 \\ x & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$; $NM = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ x & 1 & 0 \\ y & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & x \\ 0 & 0 & y \end{pmatrix}$

Igualando $MN = NM$ se deduce $x = 0$ e $y = 1$.

b) Calculamos $M^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = I$ Así: $M^3 = MM^2 = M\,I = M$, $M^4 = M^2M^2 = I$...

Si k es impar, $M^k = M$ y si es par $M^k = I$. Por tanto, $M^{1995} = M$, $M^{1996} = I$.

1.32. (PAU) Halla todas las matrices X de la forma $X = \begin{pmatrix} a & 1 & 0 \\ 0 & b & 1 \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix}$ tales que $X^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Según el enunciado se ha de cumplir $\begin{pmatrix} a & 1 & 0 \\ 0 & b & 1 \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & 1 & 0 \\ 0 & b & 1 \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

Operando: $\begin{pmatrix} a^2 & a+b & 1 \\ 0 & b^2 & b+c \\ 0 & 0 & c^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

Identificando los términos resultan las ecuaciones: $\begin{cases} a^2 = b^2 = c^2 = 1 \\ a+b = b+c = 0 \end{cases}$

De estas ecuaciones se obtienen las dos siguientes posibilidades de valores: $\begin{cases} a = 1,\ b = -1,\ c = 1 \\ a = -1,\ b = 1,\ c = -1 \end{cases}$

La matriz X puede tener una de estas dos formas: $X = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ o $X = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$

1.33. (PAU) Se consideran las matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. Calcula B^3 y A^3 (Sugerencia: $A = B + I$).

$B^2 = BB = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$; $B^3 = B^2B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

$A^3 = (B + I)^3 = B^3 + 3B^2\,I + 3BI^2 + I^3 = B^3 + 3B^2 + 3B + I = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 6 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

1.34. (PAU) Prueba que $A^n = 2^{n-1}A$, siendo $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$.

Calculamos las potencias sucesivas de la matriz A.

$A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} = 2\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = 2A$.

$A^3 = A^2A = 2AA = 2A^2 = 2 \cdot 2A = 4A = 2^2A$

$A^4 = A^3A = 4AA = 4A^2 = 8A = 2^3A$

Suponemos que $A^{n-1} = 2^{n-2}A$, y vamos a demostrar que $A^n = 2^{n-1}A$:

$A^n = A^{n-1}A = 2^{n-2}AA = 2^{n-2}A^2 = 2^{n-2} \cdot 2A = 2^{n-1}A$. Luego, en efecto, se verifica la igualdad dada.

1.35. Halla la inversa de las siguientes matrices aplicando la definición.

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} \mathbf{3} & \mathbf{0} \\ \mathbf{1} & \mathbf{4} \end{pmatrix} \qquad \boldsymbol{B} = \begin{pmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{0} & \mathbf{2} \\ \mathbf{2} & \mathbf{-1} & \mathbf{3} \\ \mathbf{1} & \mathbf{2} & \mathbf{1} \end{pmatrix}$$

Sea $A^{-1} = \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix} \Rightarrow AA^{-1} = I_2 \Rightarrow \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 3x & 3y \\ x+4z & y+4t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow$

$$\Rightarrow \left.\begin{aligned} 3x &= 1 \\ 3y &= 0 \\ x+4z &= 0 \\ y+4t &= 1 \end{aligned}\right\} \Rightarrow x = \frac{1}{3}, y = 0, z = -\frac{1}{12}, t = \frac{1}{4} \Rightarrow A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & 0 \\ \frac{-1}{12} & \frac{1}{4} \end{pmatrix}$$

Sea $B^{-1} = \begin{pmatrix} x & y & z \\ t & u & v \\ m & n & p \end{pmatrix} \Rightarrow BB^{-1} = I_3 \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 2 & -1 & 3 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x & y & z \\ t & u & v \\ m & n & p \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

$$\begin{pmatrix} x+2m & y+2n & z+2p \\ -t+2x+3m & -u+2y+3n & -v+2z+3p \\ 2t+x+m & 2u+y+n & 2v+z+p \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Igualando resulta: $\left.\begin{matrix} x+2m=1 & y+2n=0 & z+2p=0 \\ -t+2x+3m=0 & -u+2y+3n=1 & -v+2z+3p=0 \\ 2t+x+m=0 & 2u+y+n=0 & 2v+z+p=1 \end{matrix}\right\}$

De donde: $\begin{matrix} x = \frac{-7}{3} & y = \frac{4}{3} & z = \frac{2}{3} \\ t = \frac{1}{3} & u = -\frac{1}{3} & v = \frac{1}{3} \\ m = \frac{5}{3} & n = -\frac{2}{3} & p = -\frac{1}{3} \end{matrix}$. Por tanto, $B^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{-7}{3} & \frac{4}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{-1}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{5}{3} & \frac{-2}{3} & \frac{-1}{3} \end{pmatrix}$

1.36. (PAU) Dada la matriz $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} \mathbf{2} & \mathbf{1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{1} & \mathbf{0} \end{pmatrix}$.

a) Razona si puede existir una matriz *B* tal que *AB* = *I*, siendo *I* la matriz identidad; en caso afirmativo, halla *B*.

b) ¿Tiene inversa *A*? Razona la respuesta.

a) Sea $B = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \\ e & f \end{pmatrix}$. Entonces: $AB = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \\ e & f \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2a+c & 2b+d \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Igualando las dos matrices resulta: $c = 0$; $d = 1$; $b = -\frac{1}{2}$; $a = \frac{1}{2}$. Por tanto, $B = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{-1}{2} \\ 0 & 1 \\ e & f \end{pmatrix}$.

b) La matriz *A* no tiene inversa, ya que no es cuadrada.

1.37. (PAU) Halla, por el método de Gauss, la matriz inversa de $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{1} \\ \mathbf{1} & \mathbf{0} \end{pmatrix}$.

Partimos del esquema $(A \mid I_2) = \left(\begin{array}{cc|cc} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$

Permutando las dos filas, la matriz dada se transforma directamente en la matriz unidad. El esquema final es entonces:

$\left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right) = (I_2 \mid A^{-1})$. La matriz inversa es, por tanto, ella misma; es decir, $A = A^{-1}$.

1.38. (PAU) Calcula por el método de Gauss la matriz inversa de las siguientes matrices:

$$\boldsymbol{A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & -1 \\ -6 & -1 & 0 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 3 \\ 1 & 4 & 3 \\ 1 & 3 & 4 \end{pmatrix}}$$

El esquema de partida es: $(A \mid I_3) = \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ -6 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$. Se realizan transformaciones en las filas hasta obtener el la parte izquierda la matriz identidad, por lo que la parte derecha será la matriz inversa de A: A^{-1}.

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ -6 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow[\substack{F_2-2F_1 \\ F_3+6F_1}]{} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & -5 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 5 & 12 & 6 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow[-\frac{1}{2}F_2]{} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{5}{2} & 1 & \frac{-1}{2} & 0 \\ 0 & 5 & 12 & 6 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow[F_3-5F_2]{}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{5}{2} & 1 & \frac{-1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{-1}{2} & 1 & \frac{5}{2} & 1 \end{array}\right) \xrightarrow[\substack{F_2+5F_3 \\ F_1+4F_3 \\ -2F_3}]{} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & 5 & 10 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & 6 & 12 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & -5 & -2 \end{array}\right) \xrightarrow[F_1-F_2]{} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -1 & -2 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 6 & 12 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & -5 & -2 \end{array}\right) = (I_3 \mid A^{-1})$$

La matriz inversa es $A^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & -2 & -1 \\ 6 & 12 & 5 \\ -2 & -5 & -2 \end{pmatrix}$

El esquema de partida es: $(B \mid I_3) = \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 3 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 4 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 4 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 3 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 4 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 4 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow[\substack{F_2-F_1 \\ F_3-F_1}]{} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 3 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow[F_1-3F_3]{}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 3 & 0 & 4 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow[F_1-3F_2]{} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 7 & -3 & -3 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right) = (I_3 \mid B^{-1})$$

La matriz inversa es, por tanto, $B^{-1} = \begin{pmatrix} 7 & -3 & -3 \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Se puede comprobar que su producto con la matriz B es I.

1.39. (PAU) a) Halla la matriz inversa de las siguientes: $\boldsymbol{A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}}$, $\boldsymbol{B = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 4 \\ 0 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}$.

b) Comprueba los resultados con una multiplicación.

a) $(A \mid I_3) = \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow[F_2-F_1]{} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow[F_3+F_2]{} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 1 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow[F_2-F_3]{}$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 1 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow[\substack{F_1+F_2 \\ (-1)F_2}]{} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 1 & 1 \end{array}\right) = (I_3 \mid A^{-1}) \Rightarrow A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

$$(B \mid I_3) = \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 4 & 4 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 4 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow[\substack{F_2-4F_3 \\ F_1-4F_3}]{} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 4 & 0 & 1 & 0 & -4 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 1 & -4 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow[\substack{F_1-2F_2 \\ \frac{1}{2}F_2}]{} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & -2 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) = (I_3 \mid B^{-1})$$

Luego, la matriz inversa es $B^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 4 \\ 0 & \frac{1}{2} & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

b) Multiplicando las matrices A y B por sus inversas se obtiene la matriz unidad:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad \begin{pmatrix} 1 & 4 & 4 \\ 0 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 4 \\ 0 & \frac{1}{2} & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Rango de una matriz

1.40. (PAU) Halla el rango de la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 2 & 3 \\ 2 & -1 & 0 & 1 & 3 \\ 3 & -1 & -1 & 3 & 6 \\ 5 & -2 & -1 & 4 & 9 \end{pmatrix}$

La fila tercera es la suma de la primera y la segunda.
La fila cuarta es la suma de la segunda y la tercera.
Las filas primera y segunda no son proporcionales, luego rg(A) = 2.

1.41. (PAU) Calcula, por el método de Gauss, el rango de la matriz $\begin{pmatrix} 4 & 6 & 8 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & 0 \\ 3 & 4 & 5 & 0 \end{pmatrix}$

Puesto que la primera fila es suma de la segunda y tercera, podemos suprimir esta fila: $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 3 & 4 & 5 & 0 \end{pmatrix}$.

El rango es 2, ya que las dos filas no son proporcionales.

1.42. (PAU) Halla el rango de la matriz: $\begin{pmatrix} 3 & 4 & 4 & 0 \\ 1 & 3 & 2 & -2 \\ 2 & 1 & 2 & 2 \end{pmatrix}$

Puesto que la primera fila es suma de la segunda y tercera, podemos suprimir esta fila: $\begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 & -2 \\ 2 & 1 & 2 & 2 \end{pmatrix}$.

Restando a la segunda fila el doble de la primera se tiene una matriz escalonada de dos filas: $\begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 & -2 \\ 0 & -5 & -2 & 6 \end{pmatrix}$.

El rango es 2.

1.43. (PAU) Utilizando el método de Gauss, calcula el rango de la matriz: $B = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & 0 & 7 \\ 2 & 3 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & -3 & 2 \\ -1 & -1 & 3 & -1 & 7 \end{pmatrix}$

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & 0 & 7 \\ 2 & 3 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & -3 & 2 \\ -1 & -1 & 3 & -1 & 7 \end{pmatrix} \xrightarrow[-2F_1+F_2]{} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & 0 & 7 \\ 0 & 7 & -2 & -1 & -14 \\ 0 & 1 & 2 & -3 & 2 \\ -1 & -1 & 3 & -1 & 7 \end{pmatrix} \xrightarrow[F_1+F_4]{} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & 0 & 7 \\ 0 & 7 & -2 & -1 & -14 \\ 0 & 1 & 2 & -3 & 2 \\ 0 & -3 & 4 & -1 & 14 \end{pmatrix} \xrightarrow[F_2 \leftrightarrow F_3]{}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & 0 & 7 \\ 0 & 1 & 2 & -3 & 2 \\ 0 & 7 & -2 & -1 & -14 \\ 0 & -3 & 4 & -1 & 14 \end{pmatrix} \xrightarrow[F_3-7F_2]{} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & 0 & 7 \\ 0 & 1 & 2 & -3 & 2 \\ 0 & 0 & -16 & 20 & -28 \\ 0 & -3 & 4 & -1 & 14 \end{pmatrix} \xrightarrow[F_4+3F_2]{} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & 0 & 7 \\ 0 & 1 & 2 & -3 & 2 \\ 0 & 0 & -16 & 20 & -28 \\ 0 & 0 & 10 & -10 & 20 \end{pmatrix} \xrightarrow[\frac{F_4}{10}]{}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & 0 & 7 \\ 0 & 1 & 2 & -3 & 2 \\ 0 & 0 & -16 & 20 & -28 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow[F_3 \leftrightarrow F_4]{} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & 0 & 7 \\ 0 & 1 & 2 & -3 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & -16 & 20 & -28 \end{pmatrix} \xrightarrow[\frac{F_4+16F_3}{4}]{} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & 0 & 7 \\ 0 & 1 & 2 & -3 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \text{rg}(B) = 4$$

1.44. (PAU) Calcula los valores de *t* para los que el rango o característica de la siguiente matriz es 2:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \\ 3 & 3 & t \end{pmatrix}$$

Pasaremos esta matriz, por reducción, a una matriz escalonada:

$$\text{rg}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \\ 3 & 3 & t \end{pmatrix} \underset{\substack{F_2-2F_1 \\ F_3-3F_1}}{=} \text{rg}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & t-3 \end{pmatrix} = \text{rg}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & t-3 \end{pmatrix}$$

• Si $t = 3$ el rango es 1, ya que en este caso es una matriz con una fila nula: $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

• Si $t \neq 3$, el rango es 2, ya que las filas no son proporcionales.

1.45. (PAU) Calcula el rango de la siguiente matriz para los distintos valores de *t*: $\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & t \\ 2 & 4 & 6 & 8 \\ 3 & 6 & 9 & 12 \end{pmatrix}$

Pasaremos esta matriz, por reducción, a una matriz escalonada:

$$\text{rg}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & t \\ 2 & 4 & 6 & 8 \\ 3 & 6 & 9 & 12 \end{pmatrix} \underset{\substack{F_2-2F_1\\F_3-3F_1}}{=} \text{rg}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & t \\ 0 & 0 & 0 & 8-2t \\ 0 & 0 & 0 & 12-3t \end{pmatrix} \underset{3F_2=2F_3}{=} \text{rg}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & t \\ 0 & 0 & 0 & 8-2t \end{pmatrix}$$

- Si $t = 4$ el rango de la matriz es 1, ya que la segunda fila sería nula.
- Si $t \neq 4$, el rango de la matriz es 2, ya que las filas no son proporcionales.

1.46. (PAU) Haz uso del método de Gauss y discute el rango de la matriz *B* según los valores del parámetro *a*:

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 2 \\ a & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 3 & -3 \\ 4 & 2 & 0 & a \end{pmatrix}$$

$$\text{rg}\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 2 \\ a & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 3 & -3 \\ 4 & 2 & 0 & a \end{pmatrix} \xrightarrow[\substack{F_2-F_1\\F_3+F_1\\F_4-2F_1}]{} \text{rg}\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 2 \\ a-1 & 0 & 2 & -1 \\ 2 & 0 & 2 & -1 \\ 2 & 0 & 2 & a-4 \end{pmatrix} \xrightarrow[\substack{F_2-F_3\\F_4-F_3}]{} \text{rg}\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 2 \\ a-3 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & a-3 \end{pmatrix}$$

A partir de esta última matriz y simplemente intercambiando las columnas y las filas se obtiene la siguiente matriz escalonada: $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & a-3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a-3 \end{pmatrix}$.

Si $a = 3$, hay 2 filas nulas, y se obtiene $\text{rg}(B) = 2$. Si $a \neq 3$, $\text{rg}(B) = 4$.

1.47. Dados los vectores fila.

$A = (2\ \ -3\ \ 4)$ $\quad B = (0\ \ 1\ \ 2)$ $\quad C = (1\ \ 2\ \ -3)$ $\quad D = (-3\ \ 1\ \ 1)$

a) ¿Es el vector *C* combinación lineal de los vectores *A* y *B*? En caso afirmativo encuentra los coeficientes de la combinación lineal.

b) Escribe el vector *D* como combinación lineal de los vectores *A*, *B* y *C*.

a) Si el vector *C* es combinación lineal de los vectores *A* y *B* el rango de la matriz formada por los tres vectores debe ser dos.

$$\text{rg}\begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 2 & -3 & 4 \end{pmatrix} \xrightarrow{F_3-2F_1} \text{rg}\begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & -7 & 10 \end{pmatrix} \xrightarrow{F_3+7F_2} \text{rg}\begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 24 \end{pmatrix} = 3$$

Por lo tanto, los vectores *A, B* y *C* son linealmente independientes.

b) Hay que encontrar tres números reales, *a*, *b* y *c*, no simultáneamente nulos, tales que:

$D = aA + bB + cC$

Sustituyendo los vectores *A, B* y *C* en la expresión anterior, se obtiene:

$(-3, 1, 1) = a\,(2, -3, 4) + b\,(0, 1, 2) + c\,(1, 2, -3) = (2a + c, -3a + b + 2c, 4a + 2b - 3c)$

Igualando las componentes resulta:

$$\left.\begin{array}{r} -3 = 2a + c \\ 1 = -3a + b + 2c \\ 1 = 4a + 2b - 3c \end{array}\right\} \Rightarrow c = -3 - 2a$$

Sustituyendo el valor de c en las otras dos ecuaciones:

$$\left.\begin{array}{l} 1 = -3a + b + 2(-3-2a) \\ 1 = 4a + 2b - 3(-3-2a) \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{r} -7a + b = 7 \\ 10a + 2b = -8 \end{array}\right\} \Rightarrow a = \frac{-11}{12}; b = \frac{7}{12}; c = -\frac{14}{12}$$

Por tanto, el vector *D* es combinación lineal de los vectores *A, B* y *C* del siguiente modo:

$$D = \frac{-11}{12}A + \frac{7}{12}B - \frac{14}{12}C$$

1.48. (PAU) En el espacio vectorial de las matrices de orden 2 sobre R, consideramos las siguientes matrices:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad C = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Determina si las matrices *A*, *B* y *C* son linealmente independientes.

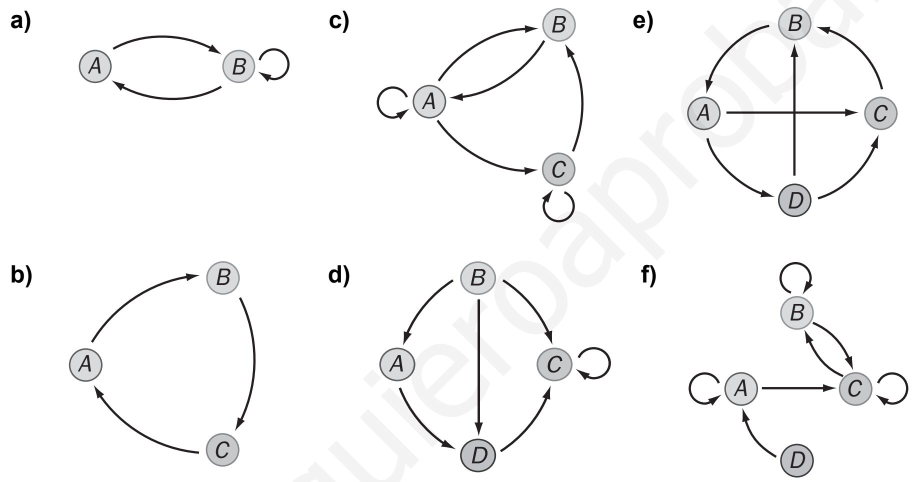
Las matrices *A*, *B*, *C* son linealmente dependientes si existen tres escalares, *x*, *y*, *z*, no todos nulos, tales que $xA + yB + zC = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

$$x\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} + y\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + z\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x+y+z=0 \\ x+z=0 \\ x=0 \\ x+y=0 \end{cases}$$

La única solución es $x = 0$; $y = 0$, $z = 0$. Por tanto, las matrices *A*, *B* y *C* son linealmente independientes.

Aplicaciones de las matrices

1.49. Escribe la matriz asociada a cada uno de los siguientes grafos:



a)

		Hasta A	Hasta B
Desde	A	0	1
Desde	B	1	1

$M = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$

b) $M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ c) $M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ d) $M = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ e) $M = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ f) $M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

1.50. Dado el punto P de coordenadas (–4, 2), halla las coordenadas del punto transformado en los siguientes movimientos:

a) Una traslación de vector guía $\vec{v}$ = (4, 1)

b) Un giro de centro el origen y amplitud 30°

c) Una homotecia de centro el origen y razón 2

d) Una simetría respecto del origen

a) $P' = (-4, 2) + (4, 1) = (0, 3)$

b) $(p'_1, p'_2) = (-4, 2)\begin{pmatrix} \cos 90^\circ & \text{sen}\, 90^\circ \\ -\text{sen}\, 90^\circ & \cos 90^\circ \end{pmatrix} = (-4, 2)\begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix} = (-2\sqrt{3}-1, \sqrt{3}-2)$

c) $(p'_1, p'_2) = (-4, 2)\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = (-8, 4)$

d) $(p'_1, p'_2) = (-4, 2)\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = (4, -2)$

1.51. (PAU) Dado el segmento de extremos *A*(1, 5) y *B*(3, 7), halla el segmento transformado en los siguientes movimientos:

a) Una traslación de vector guía $\vec{v}$ = (2, 3)

b) Un giro de centro el origen y amplitud 45°

c) Una homotecia de centro el origen y razón 4

d) Una simetría respecto del origen

Calculamos los transformados de cada punto.

a) *A*' = (1, 5) + (2, 3) = (3, 8)
B' = (3, 7) + (2, 3) = (5, 10)
El transformado del segmento *AB* es el segmento de extremos *A*'(3, 8) y *B*'(5, 10).

b) $(a'_1, a'_2) = (1, 5)\begin{pmatrix}\cos 45^\circ & -\text{sen } 45^\circ \\ \text{sen } 45 & \cos 45^\circ\end{pmatrix} = (1, 5)\begin{pmatrix}\frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{-\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2}\end{pmatrix} = \left(3\sqrt{2}, 2\sqrt{2}\right)$

$(b'_1, b'_2) = (3, 7)\begin{pmatrix}\frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{-\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2}\end{pmatrix} = \left(5\sqrt{2}, 2\sqrt{2}\right)$

El transformado del segmento *AB* es el segmento de extremos *A*' $\left(3\sqrt{2}, 2\sqrt{2}\right)$ y *B*' $\left(5\sqrt{2}, 2\sqrt{2}\right)$.

c) $(a'_1, a'_2) = (1, 5)\begin{pmatrix}4 & 0 \\ 0 & 4\end{pmatrix} = (4, 20)$; $(b'_1, b'_2) = (3, 7)\begin{pmatrix}4 & 0 \\ 0 & 4\end{pmatrix} = (12, 28)$
El transformado del segmento *AB* es el segmento de extremos *A*'(4,20) y *B*'(12, 28).

d) $(a'_1, a'_2) = (1, 5)\begin{pmatrix}-1 & 0 \\ 0 & -1\end{pmatrix} = (-1, -5)$; $(b'_1, b'_2) = (3, 7)\begin{pmatrix}-1 & 0 \\ 0 & -1\end{pmatrix} = (-3, -7)$
El transformado del segmento *AB* es el segmento de extremos *A*'(–1,–5) y *B*'(–3, –7).

1.52. (PAU) Se dan los movimientos geométricos planos: *T*(*x*, *y*) = (*x* – *y*, *x* + *y*) , *S*(*x*, *y*) = (2*x* – *y*, *x* + *y*)

a) Escribe las matrices asociadas a *S* y a *T*.

b) Escribe la matriz asociada al movimiento compuesto $S \circ T$, que consiste en aplicar primero la traslación, *T*, y después la simetría, *S*.

a) $T(x, y) = (x - y, x + y) \Rightarrow \begin{cases} x' = x - y \\ y' = x + y \end{cases} \Rightarrow (x', y') = (x, y)\begin{pmatrix}1 & 1 \\ -1 & 1\end{pmatrix}$

Por tanto, la matriz asociada a *T* es: $M(T) = \begin{pmatrix}1 & 1 \\ -1 & 1\end{pmatrix}$

$S(x, y) = (2x - y, x + y) \Rightarrow \begin{cases} x' = 2x - y \\ y' = x + y \end{cases} \Rightarrow (x', y') = (x, y)\begin{pmatrix}2 & 1 \\ -1 & 1\end{pmatrix}$

Por tanto, la matriz asociada a *S* es: $M(S) = \begin{pmatrix}2 & 1 \\ -1 & 1\end{pmatrix}$

b) La matriz asociada a la transformación compuesta $S \circ T$ será = $\begin{pmatrix}1 & 1 \\ -1 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2 & 1 \\ -1 & 1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1 & 2 \\ -3 & 0\end{pmatrix}$

1.53. (PAU) Halla las ecuaciones de los siguientes movimientos:

a) Una traslación de vector guía $\vec{v}$ = (2, 3) por un giro de centro el origen y amplitud 45°

b) Un giro de centro el origen y amplitud 45° por una traslación de vector guía $\vec{v}$ = (2, 3).

a) $(x', y') = (x, y) + (2, 3) = (x + 2, y + 3)$

$$(x'',y'') = (x', y')\begin{pmatrix} \cos 45^\circ & -\text{sen } 45^\circ \\ \text{sen } 45^\circ & \cos 45^\circ \end{pmatrix} = (x+2, y+3)\begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{-\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix} = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}(x+y+5), -\frac{\sqrt{2}}{2}(x-y-1)\right)$$

Es decir, $\left.\begin{array}{l} x'' = \frac{\sqrt{2}}{2}(x+y+5) \\ y'' = -\frac{\sqrt{2}}{2}(x-y-1) \end{array}\right\}$

b) $(x', y') = (x, y)\begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{-\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix} = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}(x+y), -\frac{\sqrt{2}}{2}(x-y)\right)$

$$(x'', y'') = (x', y') + (2, 3) = (x, y)\begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{-\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix} + (2, 3) = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}(x+y)+2, -\frac{\sqrt{2}}{2}(x-y)+3\right)$$

Es decir: $\left.\begin{array}{l} x'' = \frac{\sqrt{2}}{2}(x+y)+2 \\ y'' = -\frac{\sqrt{2}}{2}(x-y)+3 \end{array}\right\}$ Lo que prueba que el producto de movimientos no es conmutativo.

PROBLEMAS

1.54. (PAU) Se considera el conjunto M de las matrices 3 x 3 tales que en cada fila y en cada columna tienen dos ceros y un uno. Escribe todas las matrices del conjunto *M*.

Las matrices pedidas son:

$M_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$; $M_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$; $M_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$; $M_4 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$; $M_5 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$; $M_6 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

1.55. a) Calcula todas las matrices diagonales de orden dos que coinciden con su inversa.

b) Si A es una de estas matrices, calcula su cuadrado.

Sea $A = \begin{pmatrix} x & 0 \\ 0 & y \end{pmatrix}$ la matriz diagonal que tratamos de encontrar.

a) Como $A = A^{-1}$ y por definición, $AA^{-1} = I$, se cumple que:

$$\begin{pmatrix} x & 0 \\ 0 & y \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x & 0 \\ 0 & y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x^2 & 0 \\ 0 & y^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow x = \pm 1;\ y = \pm 1$$

Las matrices pedidas son: $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$; $\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$; $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$; $\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$

b) De nuevo, como $A = A^{-1}$, se cumple que $A^2 = AA^{-1} = I$.

1.56. (PAU) Se dice que dos matrices cuadradas, *A* y *B*, de orden *n* x *n*, son semejantes si existe una matriz inversible, *P*, tal que $B = P^{-1} A P$, donde P^{-1} denota la matriz inversa de *P*. Determina si son semejantes las matrices A y B con: $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$.

Si *A* y *B* son semejantes, entonces existe una matriz invertible, *P*, tal que $B = P^{-1} A P$.

Multiplicando a izquierda por la matriz *P* a los dos miembros de esta última igualdad resulta:

$PB = PP^{-1}AP \Rightarrow PB = AP$

Si $P = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, entonces: $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} a & -b \\ c & -d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a+2c & b+2d \\ c & d \end{pmatrix}$

Igualando: $\begin{cases} a = a+2c \\ -b = b+2d \\ c = c \\ -d = d \end{cases} \Rightarrow b = c = d = 0$ y *a* indeterminado.

Por tanto, $P = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

La matriz *P* no es inversible sea cual sea el valor de *a*. De este modo, las matrices dadas no son semejantes.

1.57. (PAU) Señala para qué valores de *a*, *b*, *c*, *d* se verifica que $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^2+bc & ab+bd \\ ac+dc & cb+d^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} a^2+bc=0 \\ b(a+d)=0 \\ c(a+d)=0 \\ cb+d^2=0 \end{cases}$$

Se deduce de la segunda ecuación: $b = 0$ ó $a = -d$.

Si $b = 0 \Rightarrow a = b = d = 0$. Se obtiene la matriz $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ c & 0 \end{pmatrix}$

Si $a = -d$, se deduce que $c = -\frac{a^2}{b}$ y se obtiene la matriz $\begin{pmatrix} a & b \\ \frac{-a^2}{b} & -a \end{pmatrix}$.

1.58. (PAU) a) Si *A* y *B* son matrices diagonales de orden 2, demuestra que *AB* = *BA*.

b) Determina las matrices 2 x 2 diagonales *A*, tales que $AA = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

a) Si *A* y *B* son matrices diagonales de orden 2 x 2, entonces son de la forma: $A = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} c & 0 \\ 0 & d \end{pmatrix}$, por lo que: $AB = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}\begin{pmatrix} c & 0 \\ 0 & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ac & 0 \\ 0 & bd \end{pmatrix}$; $BA = \begin{pmatrix} c & 0 \\ 0 & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ca & 0 \\ 0 & db \end{pmatrix}$

Luego *AB* = *BA*

b) Si *A* es una matriz diagonal de orden 2 x 2, entonces es de la forma: $A = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}$

Luego: $AA = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^2 & 0 \\ 0 & b^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$; de donde $a = \pm 1$ y $b = \pm 1$.

Las matrices que verifican la condición dada son: $A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$; $A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$; $A_3 = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$; $A_4 = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$.

1.59. (PAU) a) Demuestra que la matriz $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ verifica una ecuación del tipo $A^2 + \alpha A + \beta I = O$, determinando α y β (I denota la matriz identidad).

b) Utiliza el apartado anterior para hallar la inversa de A.

a) $A^2 + \alpha A + \beta I = 0 \Rightarrow \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} + \alpha\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} + \beta\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow$

$\Rightarrow \begin{pmatrix} 5 & 4 \\ 4 & 5 \end{pmatrix} + \alpha\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} + \beta\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} 5 + 2\alpha + \beta = 0 \\ 4 + \alpha = 0 \end{cases} \Rightarrow \alpha = -4,\ \beta = 3$

Por tanto, se cumple que: $A^2 - 4A + 3I = 0$

b) Para hallar la inversa procedemos del siguiente modo:

$A^2 - 4A + 3I = 0 \Rightarrow A(A - 4I) + 3I = 0 \Rightarrow A(4I - A) = 3I$

Multiplicando por A^{-1}, por la izquierda, se tiene:

$A^{-1} A(4I - A) = A^{-1}\, 3I \Rightarrow 4I - A = 3A^{-1} \Rightarrow A^{-1} = \frac{1}{3}\ (4I - A) = \frac{1}{3}\left[\begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}\right] = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & \frac{-1}{3} \\ \frac{-1}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix}$

1.60. Consideremos la matriz $A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 8 \\ 3 & a & 6 \\ -2 & 0 & -5 \end{pmatrix}$.

a) Encuentra el valor de a tal que $(A + I_3)^2 = O$.

b) Calcula la inversa de A para el valor obtenido en el apartado anterior.

a) $(A + I_3)^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 3a+3 & (a+1)^2 & 6a+6 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ así que si $a = -1$ se tiene que $(A + I_3)^2 = O$.

Desarrollando esta última expresión se obtiene fácilmente la inversa de la matriz A:

$(A + I_3)^2 = A^2 + 2A + I_3 = O \quad \Rightarrow \quad A(-A - 2I_3) = I_3$.

b) A partir del apartado anterior, tenemos que $A^{-1} = -A - 2I_3 = -\begin{pmatrix} 3 & 0 & 8 \\ 3 & -1 & 6 \\ -2 & 0 & -5 \end{pmatrix} - 2\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 & 0 & -8 \\ -3 & -1 & -6 \\ 2 & 0 & 3 \end{pmatrix}$.

1.61. (PAU) Sea la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$, y n un número natural cualquiera. Encuentra el valor de A^n para cada n y halla $A^{360} - A^{250}$.

Aplicaremos el método de inducción. Calculamos las primeras potencias de A

$A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 6 & 1 \end{pmatrix} \qquad A^3 = AA^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 6 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 9 & 1 \end{pmatrix}$

Suponemos que $A^n = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3n & 1 \end{pmatrix}$, vemos:

1. Se verifica para $n = 1$
2. Si se cumple para n, también se cumple para $n + 1$, ya que:

$A^{n+1} = AA^n = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3n & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3+3n & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3(n+1) & 1 \end{pmatrix}$

En consecuencia nuestra suposición es cierta. Luego $A^n = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3n & 1 \end{pmatrix}$.

Por tanto, $A^{350} - A^{250} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3\cdot 350 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3\cdot 250 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 300 & 0 \end{pmatrix}$

1.62. (PAU) Una matriz cuadrada A tiene la propiedad de que $A^2 = 2A + I$, donde I es la matriz unidad.

a) Demuestra que A admite matriz inversa, y obtenla en función de A.

b) Dada la matriz $B = \begin{pmatrix} 1+m & 1 \\ 1 & 1-m \end{pmatrix}$, halla los valores de m para los que se verifica que

$B^2 = 2B + I$, y escribe la matriz inversa de B para dichos valores.

a) $A^2 = 2A + I \Rightarrow A^2 - 2A = I \Rightarrow A(A - 2I) = I$. Luego $A^{-1} = A - 2I$

b) $B^2 = \begin{pmatrix} 1+m & 1 \\ 1 & 1-m \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1+m & 1 \\ 1 & 1-m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (1+m)^2+1 & 2 \\ 2 & (1-m)^2+1 \end{pmatrix}$

$2B + I = \begin{pmatrix} 2+2m & 2 \\ 2 & 2-2m \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3+2m & 2 \\ 2 & 3-2m \end{pmatrix}$

$B^2 = 2B + I \Rightarrow \begin{cases} (1+m)^2+1 = 3+2m \\ (1-m)^2+1 = 3-2m \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} m^2 = 1 \\ m^2 = 1 \end{cases} \Rightarrow m = \pm 1$

• Para $m = -1$, $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \Rightarrow B^{-1} = B - 2I = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

• Para $m = 1$, $B = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow B^{-1} = B - 2I = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$

1.63. (PAU) Sea A la matriz $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

a) Encuentra la regla del cálculo de las potencias sucesivas de A, es decir, de A^n, para cualquier número natural n.

b) Resuelve la ecuación matricial $X(A^4 + A^2 - A) = \begin{pmatrix} 4 & 3 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

a) Hallamos las primeras potencias de la matriz A:

$A^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

$A^3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = I \Rightarrow A^4 = AA^3 = A\,I = A$

En general: $A^{3n+1} = A$; $A^{3n+2} = A^2$, $A^{3n} = I$

b) $X(A^4 + A^2 - A) = \begin{pmatrix} 4 & 3 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow X(A + A^2 - A) = \begin{pmatrix} 4 & 3 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow XA^2 = \begin{pmatrix} 4 & 3 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 3 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} b & c & a \\ e & f & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 3 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow X = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

1.64. (PAU) Demuestra que en el conjunto T de las matrices de la forma $M = \begin{pmatrix} \cos bx & \operatorname{sen} bx \\ -\operatorname{sen} bx & \cos bx \end{pmatrix}$ donde b es un número real no nulo y x otro número real, el producto tiene las propiedades asociativa y conmutativa.

$M(x)M(y) = \begin{pmatrix} \cos bx & \operatorname{sen} bx \\ -\operatorname{sen} bx & \cos bx \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \cos by & \operatorname{sen} by \\ -\operatorname{sen} by & \cos by \end{pmatrix} =$

$= \begin{pmatrix} \cos bx \cos by - \operatorname{sen} bx \operatorname{sen} by & \cos bx \operatorname{sen} by + \operatorname{sen} bx \cos by \\ -\operatorname{sen} bx \cos by - \cos bx \operatorname{sen} by & -\operatorname{sen} bx \operatorname{sen} by + \cos bx \cos by \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos b(x+y) & \operatorname{sen} b(x+y) \\ -\operatorname{sen} b(x+y) & \cos b(x+y) \end{pmatrix} = M(x + y)$

La propiedad asociativa es consecuencia de ser T un subconjunto de $M_2(\mathbf{R})$.

$M(x)M(y) = M(y)M(x)$ ya que $M(x)M(y) = M(x + y) = M(y + x) = M(y)M(x)$

1.65. (PAU) Para cada número entero n, se considera la matriz: $A_n = \begin{pmatrix} \cos nx & \text{sen}\, nx \\ -\text{sen}\, nx & \cos nx \end{pmatrix}$, $x \in R$

a) Comprueba que $A_n A_m = A_{n+m}$. **b) Como aplicación de lo anterior, calcula A_n^{-1}**

a) Multiplicando, se tiene: $A_n A_m = \begin{pmatrix} \cos nx & \text{sen}\, nx \\ -\text{sen}\, nx & \cos nx \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \cos mx & \text{sen}\, mx \\ -\text{sen}\, mx & \cos mx \end{pmatrix} =$

$= \begin{pmatrix} \cos nx \cos my - \text{sen}\, nx\, \text{sen}\, my & \cos nx\, \text{sen}\, my + \text{sen}\, nx \cos my \\ -\text{sen}\, nx \cos my - \cos nx\, \text{sen} my & -\text{sen}\, nx\, \text{sen}\, my + \cos nx \cos my \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos x(n+m) & \text{sen}\, x(n+m) \\ -\text{sen}\, x(n+m) & \cos x(n+m) \end{pmatrix} = A_{n+m}$

b) Basta observar que $A_n A_{-n} = A_0 = I \Rightarrow A_n^{-1} = A_{-n}$.

Por tanto, la matriz $A_n^{-1} = \begin{pmatrix} \cos(-n)x & \text{sen}\,(-n)x \\ -\text{sen}\,(-n)x & \cos(-n)x \end{pmatrix}$

1.66. (PAU) a) Sean P y Q dos matrices cuadradas n x n. ¿Bajo qué condiciones se verifica la siguiente igualdad?

$$(P + Q)(P - Q) = P^2 - Q^2$$

b) Comprueba si se verifica la igualdad anterior para las matrices: $P = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ y $Q = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$.

a) Tiene que verificarse la propiedad conmutativa del producto, es decir, $PQ = QP$.

b) $PQ = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 3 & 3 \end{pmatrix}$; $\quad QP = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$

Como $PQ \neq QP$, no se verifica la igualdad anterior.

1.67. (PAU) Sabiendo que la matriz $A = \begin{pmatrix} 3 & -2 & -2 & 4 \\ 6 & -5 & -6 & 12 \\ 3 & -3 & -2 & 6 \\ 3 & -3 & -3 & 7 \end{pmatrix}$ verifica $A^2 = A$ (no es preciso comprobarlo), determina un valor no nulo del número real λ tal que $(\lambda A - I)^2 = I$, siendo I la matriz identidad.

Desarrollamos la expresión $(\lambda A - I)^2$:

$(\lambda A - I)^2 = (\lambda A - I)(\lambda A - I) = (\lambda A)(\lambda A - I) - I(\lambda A - I) = (\lambda A)(\lambda A) - \lambda A - \lambda A + I = \lambda^2 A^2 - 2\lambda A + I$.

Tenemos que resolver la ecuación $\lambda^2 A^2 - 2\lambda A + I = I \Rightarrow \lambda^2 A^2 - 2\lambda A = 0$

Como $A^2 = A$, sustituyendo resulta $\lambda^2 A - 2\lambda A = 0$, es decir, $(\lambda^2 - 2\lambda)A = 0$

Como $A \neq 0$, entonces $\lambda^2 - 2\lambda = 0 \rightarrow \lambda(\lambda - 2) = 0 \Rightarrow \lambda = 0$, $\lambda = 2$. Luego la solución pedida es $\lambda = 2$.

1.68. En la sala de un hospital dedicado al tratamiento de diabéticos se administra insulina de tres clases: semilenta, lenta y ultralenta. El número de unidades diarias que se aplica a cada paciente de los cinco ingresados viene dado por la siguiente tabla:

	Pac. 1	Pac. 2	Pac. 3	Pac. 4	Pac. 5
Semilenta	15	15	20	30	10
Lenta	20	20	15	5	20
Ultralenta	10	5	10	10	15

Teniendo en cuenta que el número de días que ha estado internado cada uno de los pacientes es el siguiente:

	Pac. 1	Pac. 2	Pac. 3	Pac. 4	Pac. 5
N.º de días	3	7	5	12	20

Calcula con ayuda del producto de matrices, cuantas unidades de cada clase le fue administrada a cada paciente.

Obtenemos la matriz unidades diarias: A. Si representamos por D el vector columna que expresa el número de días que ha estado internado cada uno de los pacientes, se tiene el número de unidades de cada clase que se administró a cada paciente se obtiene multiplicando la matriz A por la matriz D:

$$A = \begin{pmatrix} 15 & 15 & 20 & 30 & 10 \\ 20 & 20 & 15 & 5 & 20 \\ 10 & 5 & 10 & 10 & 15 \end{pmatrix}; D = \begin{pmatrix} 3 \\ 7 \\ 5 \\ 12 \\ 20 \end{pmatrix} \Rightarrow AD = \begin{pmatrix} 810 \\ 735 \\ 535 \end{pmatrix}$$

Así pues, se necesitan: 810 unidades de insulina semilenta, 735 unidades de insulina lenta y 535 de ultralenta.

1.69. En el dibujo están representados los cuatro equipos de rescate de una región de montaña. Las flechas indican las direcciones posibles de comunicación por radio. Por ejemplo, el equipo de rescate *D* puede comunicar directamente con *C* pero no con *A*. El equipo *D* puede comunicar con *A* pero a través de *C*.

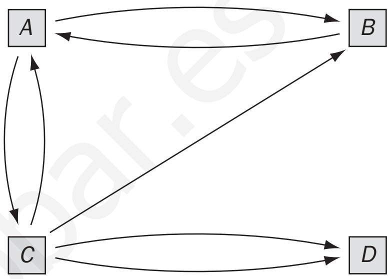
a) Dibuja el grafo asociado a esta situación.

b) Forma la matriz *M* asociada al grafo.

c) Forma la matriz M^2 e interpreta sus elementos.

d) Interpreta la matriz $M + M^2$.

a) Si denotamos con *A* al equipo de rescate que lleva casco rojo, por *B* al equipo del casco naranja, por *C* al equipo del casco verde y por *D* al equipo del casco azul, entonces tenemos el grafo asociado de la derecha.



b) Expresamos con: $\begin{cases} 1 = \text{ comunicar directamente} \\ 0 = \text{ no comunicar directamente} \end{cases}$

Al equipo: *A* *B* *C* *D*

Del equipo $\begin{array}{c} A \\ B \\ C \\ D \end{array} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = M$ es la matriz asociada al grafo dado.

c) Si hallamos la matriz $M^2 = MM$, obtenemos: $M^2 = MM = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

La matriz M^2 expresa en qué forma se pueden establecer comunicaciones entre los equipos a través de otro.

Por ejemplo, vemos que:

$a_{11} = 2$ significa que A puede comunicarse con A de dos formas distintas a través de otro equipo:

$A \to B \to A$ y $A \to C \to A$

$a_{12} = 1$ significa que *A* puede comunicarse con *B* de una sola forma a través de otro equipo: $A \to C \to B$

$a_{13} = 0$ significa que *A* no puede comunicarse con *C* a través de otro equipo:

Análogamente para los demás elementos de la matriz *A*.

d) La matriz $T = M + M^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ da las formas que tienen de comunicarse por radio los cuatro equipos, bien directamente, bien a través de otro equipo.

Por ejemplo, $t_{24} = 0$ significa que el equipo *B* no puede comunicarse con el equipo *D* ni directamente ni a través de un equipo.

PROFUNDIZACIÓN

1.70. (PAU) Discute razonadamente y en función de *a* y *b* el rango de la matriz A dada por: $\begin{pmatrix} a & 3 & 12 & 6 \\ b & 1 & 4 & 2 \\ a+b & 4 & 16 & 8 \end{pmatrix}$

Las columnas tercera y cuarta son proporcionales de la segunda. Por tanto, dependen de ella y no aportan nada al rango de la matriz. Para estudiar su rango nos fijaremos, pues, solamente en las dos primeras columnas.

Observamos que si $a = 3b$, la primera columna es $\begin{pmatrix} 3b \\ b \\ 4b \end{pmatrix}$ y, por tanto, proporcional a la segunda columna,

entonces: si $a = 3b \Rightarrow \text{rg}(A) = 1$, y si $a \neq 3b \Rightarrow \text{rg}(A) = 2$

1.71. Comprueba que si M_1 y M_2 son las matrices asociadas a dos movimientos, no traslaciones, se cumple que: $\left.\begin{array}{l}(x',y')=(x,y)\cdot M_1\\(x'',y'')=(x',y')\cdot M_2\end{array}\right\}\Rightarrow$ **(x”, y”) = (x, y) M_1M_2**

La demostración es inmediata, basta sustituir la primera ecuación en la segunda:
(x”, y”) = (x´, y´)M_2 = (x, y) M_1M_2

1.72. Halla las matrices asociadas a los siguientes movimientos sucesivos:

a) Primero un giro de centro el origen y amplitud 30º y a continuación una simetría respecto el eje *Y*.

b) Una simetría respecto el eje *Y* primero y a continuación un giro de centro el origen y amplitud 30º.

¿Qué observas? Razona tu respuesta.

a) $(x',y')=(x,y)\begin{pmatrix}\cos 30^\circ & \text{sen}\,30^\circ\\ -\text{sen}\,30^\circ & \cos 30^\circ\end{pmatrix}=(x,y)\begin{pmatrix}\frac{\sqrt3}{2} & \frac12\\ -\frac12 & \frac{\sqrt3}{2}\end{pmatrix}=\left(\frac{\sqrt3}{2}x-\frac12 y,\frac12 x+\frac{\sqrt3}{2}y\right)$

$(x'',y'')=(x',y')\begin{pmatrix}-1&0\\0&1\end{pmatrix}=\left(\frac{\sqrt3}{2}x-\frac12 y,\frac12 x+\frac{\sqrt3}{2}y\right)\begin{pmatrix}-1&0\\0&1\end{pmatrix}=\left(-\frac{\sqrt3}{2}x+\frac12 y,\frac12 x+\frac{\sqrt3}{2}y\right)$

Es decir, $(x'',y'')=(x,y)\begin{pmatrix}-\frac{\sqrt3}{2} & \frac12\\ \frac12 & \frac{\sqrt3}{2}\end{pmatrix}$. La matriz asociada a estos movimientos sucesivos es: $\begin{pmatrix}-\frac{\sqrt3}{2} & \frac12\\ \frac12 & \frac{\sqrt3}{2}\end{pmatrix}$

b) $(x',y')=(x,y)\begin{pmatrix}-1&0\\0&1\end{pmatrix}=(-x,y)$

$(x'',y'')=(x',y')\begin{pmatrix}\cos 30^\circ & \text{sen}\,30^\circ\\ -\text{sen}\,30^\circ & \cos 30^\circ\end{pmatrix}=(-x,y)\begin{pmatrix}\frac{\sqrt3}{2} & \frac12\\ -\frac12 & \frac{\sqrt3}{2}\end{pmatrix}=\left(-\frac{\sqrt3}{2}x-\frac12 y,-\frac12 x+\frac{\sqrt3}{2}y\right)$

Es decir, $(x'',y'')=(x,y)\begin{pmatrix}-\frac{\sqrt3}{2} & -\frac12\\ -\frac12 & \frac{\sqrt3}{2}\end{pmatrix}$. La matriz asociada a estos movimientos sucesivos es: $\begin{pmatrix}-\frac{\sqrt3}{2} & -\frac12\\ -\frac12 & \frac{\sqrt3}{2}\end{pmatrix}$

c) No se obtiene el mismo resultado, y esto es debido a que como el producto de matrices no es conmutativo, el producto de movimientos tampoco lo es. De hecho la matriz asociada a cada uno corresponde con el producto de las matrices.

$\begin{pmatrix}\frac{\sqrt3}{2} & \frac12\\ -\frac12 & \frac{\sqrt3}{2}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-1&0\\0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-\frac{\sqrt3}{2} & \frac12\\ \frac12 & \frac{\sqrt3}{2}\end{pmatrix}$ y $\begin{pmatrix}-1&0\\0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\frac{\sqrt3}{2} & \frac12\\ -\frac12 & \frac{\sqrt3}{2}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-\frac{\sqrt3}{2} & -\frac12\\ -\frac12 & \frac{\sqrt3}{2}\end{pmatrix}$

1.73. (PAU) En el espacio vectorial de las matrices cuadradas de orden 2 de coeficientes reales consideramos las matrices $A=\begin{pmatrix}1&-1\\2&1\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}1&0\\1&2\end{pmatrix}$ y $C=\begin{pmatrix}1&-2\\3&0\end{pmatrix}$. ¿Son linealmente independientes?

Hemos de estudiar si alguna de ellas se puede poner como combinación lineal de las otras dos. Es decir, si existen *x* e *y* tales que:

$$x\begin{pmatrix}1&-1\\2&1\end{pmatrix}+y\begin{pmatrix}1&0\\1&2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&-2\\3&0\end{pmatrix}\Rightarrow\left.\begin{array}{r}x+y=1\\-x=-2\\2x+y=3\\x+2y=0\end{array}\right\}\ \text{Solución: } x=2,\ y=-1$$

Por tanto, no son linealmente independientes, pues: $2\begin{pmatrix}1&-1\\2&1\end{pmatrix}-1\begin{pmatrix}1&0\\1&2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&-2\\3&0\end{pmatrix}$

1.74. (PAU) Estudia las potencias sucesivas de una matriz antisimétrica viendo de qué tipo son.

Sea A una matriz antisimétrica, veamos que A^2 es una matriz simétrica:
$(A^2)^t = (AA)^t = A^tA^t = (-A)(-A) = A^2$, luego A^2 es una matriz simétrica.

En general, veamos que la potencia de exponente par de una matriz antisimétrica es simétrica. Lo haremos por inducción. Suponemos que es cierto para el exponente $2n$, entonces:
$(A^{2n+2})^t = (A^{2n}A^2)^t = (A^2)^t(A^{2n})^t = A^2A^{2n} = A^{2n+2}$, luego A^{2n+2} es simétrica.

De una manera análoga se demuestra que las potencias de exponente impar de una matriz antisimétrica son matrices antisimétricas.
En efecto: $(A^3)^t = (AAA)^t = A^tA^tA^t = (-A)(-A)(-A) = -A^3$ y, por tanto, A^3 es antisimétrica.
Supongamos que es cierto para el exponente $2n + 1$, entonces:
$(A^{2n+3})^t = (A^{2n+1}A^2)^t = (A^2)^t(A^{2n+1})^t = A^2(-A^{2n+1}) = -A^{2n+3}$ y, por tanto, la matriz A^{2n+3} es antisimétrica.

1.75. (PAU) Demuestra que toda matriz cuadrada se puede descomponer como suma de una matriz simétrica y otra antisimétrica.

Sea M una matriz cuadrada que suponemos se puede descomponer en suma de una matriz simétrica S y otra antisimétrica o hemisimétrica H: $M = S + H$.
Tomando traspuestas en los dos miembros: $M^t = S^t + H^t$.

Como $S^t = S$ y $H^t = -H$, se tiene $\left.\begin{matrix} M = S+H \\ M^t = S-H \end{matrix}\right\} \Rightarrow S = \frac{1}{2}(M + M^t);\ H = \frac{1}{2}(M + M^t)$

Por tanto, acabamos de obtener las matrices A y H en que se puede descomponer toda matriz cuadrada M.

1.76. (PAU) Halla las matrices simétricas de orden dos tales que $A^2 = A$.

Consideremos la siguiente matriz: $A = \begin{pmatrix} x & y \\ y & z \end{pmatrix}$. $A^2 = \begin{pmatrix} x & y \\ y & z \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x & y \\ y & z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x^2+y^2 & xy+yz \\ yx+zy & y^2+z^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x & y \\ y & z \end{pmatrix}$

$$\left.\begin{matrix} x^2+y^2=x \\ yx+zy=y \\ y^2+z^2=z \end{matrix}\right\} \Rightarrow \left.\begin{matrix} x^2+y^2=x \\ y(x+z-1)=0 \\ y^2+z^2=z \end{matrix}\right\} \Rightarrow \left.\begin{matrix} y=0 \\ \text{ó} \\ x+z-1=0 \end{matrix}\right\} \Rightarrow \begin{matrix} y=0 \\ z=1-x \end{matrix}$$

Si $z = 1 - x$, sustituyendo este valor de z en la tercera ecuación, se obtiene:

$$\left.\begin{matrix} x^2+y^2=x \\ y^2+(1-x)^2=1-x \end{matrix}\right\} \quad \left.\begin{matrix} x^2+y^2=x \\ y^2+1-2x+x^2=1-x \end{matrix}\right\} \left.\begin{matrix} x^2+y^2=x \\ x^2+y^2=x \end{matrix}\right\} \Rightarrow y = \pm\sqrt{x-x^2}$$

Por tanto, la matriz buscada será de la forma $\begin{pmatrix} x & \sqrt{x-x^2} \\ \sqrt{x-x^2} & 1-x \end{pmatrix}$ o bien $\begin{pmatrix} x & -\sqrt{x-x^2} \\ -\sqrt{x-x^2} & 1-x \end{pmatrix}$.

Si $y = 0$, sustituyendo este valor de y en la primera y tercera ecuación, se obtiene: $\left.\begin{matrix} x^2=x \\ z^2=z \end{matrix}\right\} \Rightarrow \begin{cases} x=0,\ x=1 \\ z=0,\ z=1 \end{cases}$

Por tanto, las matrices buscadas son $A_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$; $A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$; $A_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$; $A_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

Las matrices A_3 y A_4 son un caso particular de las soluciones generales obtenidas anteriormente para $x = 1$ y para $x = 0$.
Por tanto, a las soluciones generales anteriores añadiremos la matriz nula y la matriz identidad de orden 2.

1.77. (PAU) a) Demuestra que si A y B son matrices inversibles, se cumple que $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$.

b) Suponiendo que exista A^{-1}: ¿Se cumple que $(A^2)^{-1} = (A^{-1})^2$? ¿Y que $(A^3)^{-1} = (A^{-1})^3$?

(A^n, producto de A por sí misma n veces). Justifica las respuestas.

a) Veamos que $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$

$(AB)(B^{-1}A^{-1}) = A(BB^{-1})A^{-1} = A\,IA^{-1} = AA^{-1} = I$

Luego en efecto, $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$

b) Veamos que $(A^2)^{-1} = (A^{-1})^2$: $(A^2)^{-1} = (AA)^{-1} = A^{-1}A^{-1} = (A^{-1})^2$ Luego en efecto se verifica.

Veamos que $(A^3)^{-1} = (A^{-1})^3$: $(A^3)^{-1} = (A^2A)^{-1} = A^{-1}(A^2)^{-1} = A^{-1}(A^{-1})^2 = (A^{-1})^3$

Luego también es cierto.

1.78. (PAU) Una matriz cuadrada A es ortogonal si verifica que $AA^t = I$ (A^t es la matriz transpuesta de A e I, es la matriz identidad). ¿Para qué valores de a y b es ortogonal la siguiente matriz?

$$\begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & \cos b & \operatorname{sen} b \\ 0 & -\operatorname{sen} b & \cos b \end{pmatrix}$$

$A = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & \cos b & \operatorname{sen} b \\ 0 & -\operatorname{sen} b & \cos b \end{pmatrix} \Rightarrow A^t = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & \cos b & -\operatorname{sen} b \\ 0 & \operatorname{sen} b & \cos b \end{pmatrix}$

$AA^t = \begin{pmatrix} a^2 & 0 & 0 \\ 0 & \cos^2 b + \operatorname{sen}^2 b & 0 \\ 0 & 0 & \cos^2 b + \operatorname{sen}^2 b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow a^2 = 1 \Rightarrow a = \pm 1$

La matriz A es ortogonal si $a = \pm 1$, cualquiera que sea el valor de b.

1.79. (PAU) Para una matriz cuadrada, se define su traza como la suma de los elementos de la diagonal principal. En lo que sigue A y B son matrices cuadradas de orden 2 x 2.

a) Comprueba que se verifica Traza($A + B$) = Traza(A) + Traza(B)

b) Comprueba que Traza(AB) = Traza(BA)

c) Utilizando los resultados anteriores, demuestra que es imposible tener $AB - BA = I$, donde I denota la matriz identidad.

d) Encuentra dos matrices A y B para las que Traza(AB) $\neq$ Traza(A) Traza(B).

a) Sea $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} e & f \\ g & h \end{pmatrix} \Rightarrow$ Traza(A) + Traza(B) = $a + d + e + h$.

Se tiene $A + B = \begin{pmatrix} a+e & b+f \\ c+g & d+h \end{pmatrix} \Rightarrow$ Traza($A + B$) = $a + e + d + h$.

Por tanto, Traza($A + B$) = Traza(A) + Traza(B)

b) $AB = \begin{pmatrix} ae+bg & af+bh \\ ce+dg & cf+dh \end{pmatrix} \Rightarrow$ Traza(AB) = $ae + bg + cf + dh$.

$BA = \begin{pmatrix} ea+fc & eb+fd \\ ga+hc & gb+hd \end{pmatrix} \Rightarrow$ Traza(BA) = $ea + fc + gb + hd$.

Por tanto, Traza(AB) = Traza(BA)

c) Si $AB - BA = I \Rightarrow$ Traza($AB - BA$) = Traza(I)

Pero Traza($AB - BA$) = Traza(AB) − Traza(AB) = 0 y Traza(I) = 2.

Por tanto, no se verifica que $AB - BA = I$

d) Consideremos la siguientes matrices $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow AB = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

Se verifica que Traza(AB) = 1, Traza(A) = 0; Traza(B) = 0.

Por tanto, Traza(AB) $\neq$ Traza(A)Traza(B)

1.80. (PAU) Si rg(A) es el rango de la matriz A, indica, razonando la respuesta, cuáles de las siguientes afirmaciones son ciertas:

a) rg(A) = rg($-A$) ($-A$ es la matriz opuesta de A)

b) rg(A) = rg(A^t) (A^t es la matriz traspuesta de A)

c) rg($A + B$) = rg(A) + rg(B)

d) rg(A^2) = (rg(A))²

a) rg(A) = rg($-A$). Es cierto ya que ambas matrices, A y $-A$, tienen el mismo número de vectores fila (o columna) linealmente independientes.

b) rg(A) = rg(A^t). Es cierto ya que las filas de una matriz son las columnas de la otra. El rango es independiente de que se calcule por filas o por columnas.

c) rg($A + B$) = rg(A) + rg(B). Es falso. Basta con poner un contraejemplo:

$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 5 \end{pmatrix}$; $B = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \Rightarrow A + B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 3 & 8 \end{pmatrix} \Rightarrow$ rg(A) = 2; rg(B) = 2; rg($A + B$) = 1 por tener una fila nula.

d) rg(A^2) = (rg(A))² Es falso. Basta con poner el siguiente contraejemplo:

$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$; $A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} \Rightarrow$ rg(A) = 2 y rg(A^2) = 2.

1.81. (PAU) Una matriz 3 x 3 de números reales $A = (a_{ij})$ se llama triangular superior si $a_{ij} = 0$ siempre que $i > j$ (es decir, si todos los elementos situados por debajo de la diagonal principal son 0). Encuentra las matrices triangulares superiores A tales que verifiquen simultáneamente $A\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$ y $A\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$.

¿Hay alguna que sea inversible (que tenga inversa)?

Sea $A = \begin{pmatrix}a & b & c\\0 & d & e\\0 & 0 & f\end{pmatrix}$ una matriz triangular superior. Entonces:

$$A\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix}a & b & c\\0 & d & e\\0 & 0 & f\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases}a+b+c=0\\ d+e=0\\ f=0\end{cases}; \quad A\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix}a & b & c\\0 & d & e\\0 & 0 & f\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases}b+c=1\\ d+e=0\\ f=0\end{cases}$$

Resolviendo ambos sistemas, se obtiene: $a = -1; c = 1 - b; e = -d; f = 0$. Luego, $A = \begin{pmatrix}-1 & b & 1-b\\0 & d & -d\\0 & 0 & 0\end{pmatrix}$

Si $d = 0 \Rightarrow \text{rg}(A) = 1$, entonces A no tiene inversa. Si $d \neq 0 \Rightarrow \text{rg}(A) = 2$, entonces A no tiene inversa.

RELACIONA Y CONTESTA

Elige la única respuesta correcta en cada caso:

1.1. Las matrices A, B y C son cuadradas de igual orden, siempre se verifica:

A) $AB = BA$

B) $A + C = B + C \Leftrightarrow A = B$

C) $(A + B)A = (B + A)B$

D) $A - B = I_n \Rightarrow A = B$

E) $AX = B \Rightarrow XA^{-1} = BA^{-1}$

B) La única respuesta correcta es $A + C = B + C \Leftrightarrow A = B$

1.2. La inversa de la matriz $A = \begin{pmatrix}3 & -2\\4 & 5\end{pmatrix}$ es la matriz:

A) $\begin{pmatrix}\frac{5}{23} & \frac{2}{23}\\ -\frac{4}{23} & \frac{3}{23}\end{pmatrix}$ **B) $\begin{pmatrix}5 & -4\\2 & 3\end{pmatrix}$** **C) Ninguna de ellas** **D) $\begin{pmatrix}\frac{5}{23} & -\frac{2}{23}\\ \frac{4}{23} & \frac{3}{23}\end{pmatrix}$** **E) $\begin{pmatrix}\frac{5}{7} & \frac{2}{7}\\ -\frac{4}{7} & \frac{3}{7}\end{pmatrix}$**

A)

1.3. Dadas las matrices: $A = \begin{pmatrix}1 & 2 & 3 & 4\\0 & 1 & -1 & 2\end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix}3 & 1 & 0\\1 & 2 & 0\\2 & 5 & 0\\0 & 6 & 1\end{pmatrix}$.

¿Cuál de los siguientes productos se puede hallar?

A) AB **B) AA** **C) BB** **D) BA** **E) Ninguno de ellos**

A) Solo se puede realizar el producto AB, pues es necesario que el número de columnas de la primera coincida con el número de filas de la segunda.

1.4. Las matrices $A = \begin{pmatrix}1 & 3\\5 & 7\end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix}-2 & 1\\3 & 4\end{pmatrix}$ verifican:

A) $A^t = A$ **B) $AB = A^t B^t$** **C) $(A + B)^t = -(A^t + B^t)$** **D) $(A B)^t = B^t A^t$** **E) Ninguna de las anteriores**

D) Sólo es correcta $(AB)^t = B^tA^t$

1.5. Si B es la matriz $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, la matriz B^3 es:

A) $B^3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ **B)** $B^3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ **C)** $B^3 = B$ **D)** $B^3 = 0$ **E)** $B^3 = I$

D) $B^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ $B^3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = 0$

Señala, en cada caso, las respuestas correctas:

1.6. Sean A, B y C tres matrices cuadradas de orden n:

A) $AB = 0 \not\Rightarrow A = 0$ ó $B = 0$

B) $AB = AC \Rightarrow B = C$

C) $(A + B)^2 \neq A^2 + 2AB + B^2$

D) $(A - B)^2 = A^2 - 2AB + B^2$

E) $(A + B)(A - B) \neq A^2 - B^2$

Son correctas A), C) y E) debido a la no conmutatividad del producto de matrices.

1.7. Sea $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ a & 0 & b \end{pmatrix}$

A) $\text{rg}(A) \geq 2$, **para cualquier valor de a y b.**

B) $\text{rg}(A) = 3$, **si** $b \neq 0$

C) $\text{rg}(A) = 3$, **si** $a \neq 0$

D) $\text{rg}(A) = 2$, **si** $b = 0$

E) $\text{rg}(A) = 3$, **si** $a\,b \neq 0$

Son correctas todas menos la C)

Elige la relación correcta entre las dos afirmaciones dadas:

1.8. a) Una matriz antisimétrica es una matriz cuadrada tal, que coincide con su opuesta:

b) Una matriz antisimétrica es aquella en la que $a_{ij} = -a_{ji}$

A) a $\Rightarrow$ b, pero b $\not\Rightarrow$ a

B) b $\Rightarrow$ a, pero a $\not\Rightarrow$ b

C) a $\Leftrightarrow$ b

D) a $\not\Rightarrow$ b y b $\not\Rightarrow$ a

E) Nada de lo anterior

C) Ambas afirmaciones son equivalentes.

Señala el dato innecesario para contestar:

1.9. Para que el producto AB tenga dimensión 2 x 3:

a) La matriz A debe tener dos filas.

b) La matriz B ha de tener tres columnas.

c) El número de columnas de la matriz A es igual al número de filas de la matriz B.

d) La matriz B tiene una fila de ceros.

A) Puede eliminarse el dato a.

B) Puede eliminarse el dato b.

C) Puede eliminarse el dato c.

D) Puede eliminarse el dato d.

E) Ninguna de las anteriores.

D) Es el único dato innecesario.

Analiza si la información suministrada es suficiente para contestar la cuestión:

1.10. Una fila F_1 depende linealmente de las filas F_2 y F_3:

a) Si existen dos números a_2 y a_3 tales que $F_1 = a_2 F_2 + a_3 F_3$.

b) Si rg $(F_1, F_2, F_3) = 3$.

A) Cada afirmación es suficiente por sí sola.

B) a es suficiente por sí sola, pero b no.

C) b es suficiente por sí sola, pero a no.

D) Son necesarias las dos juntas.

E) Hacen falta más datos.

B) Es la respuesta correcta, ya que la afirmación b es incorrecta.