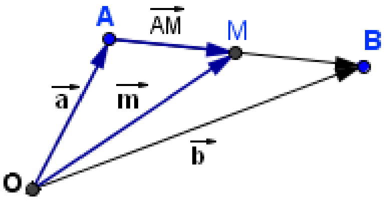
PUNTOS EN EL ESPACIO

1	**Si $\vec{a}, \vec{b}$ y $\vec{m}$ son los vectores de posición de A, B y M, siendo M el punto medio del segmento AB, ¿qué relación existe entre los tres vectores?**

SOLUCIÓN:

$$\vec{m} = \vec{a} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} \rightarrow \vec{m} = \vec{a} + \frac{1}{2}\left(\vec{b} - \vec{a}\right)$$

$$\vec{m} = \frac{1}{2}\left(\vec{b} + \vec{a}\right)$$



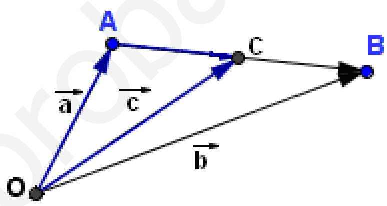
2	**Si $\vec{a}, \vec{b}$ y $\vec{c}$ son los vectores de posición de los puntos A, B y C, donde C es el punto que divide al segmento AB en dos partes, siendo el segmento AC tres veces mayor que el segmento CB, ¿qué relación vectorial existe entre los tres vectores?**

SOLUCIÓN:

$\vec{c} = \vec{a} + \overrightarrow{AC}$

$\overrightarrow{AC}$ es tres veces mayor que $\overrightarrow{CB}$, por tanto: $\overrightarrow{AC} = \frac{3}{4}\overrightarrow{AB}$

$$\vec{c} = \vec{a} + \frac{3}{4}\overrightarrow{AB} = \vec{a} + \frac{3}{4}\left(\vec{b} - \vec{a}\right) \rightarrow \vec{c} = \frac{1}{4}\vec{a} + \frac{3}{4}\vec{b}$$



3	**a) ¿Qué condición vectorial deben cumplir tres puntos, A, B y C para que estén alineados?** **b) Comprobar si A(2, 3, 1), B(5, 4, 3) y C(2, 1, 2) están alineados.**

SOLUCIÓN:

Para que los puntos A, B y C estén alineados deben verificar que los vectores $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}$ sean proporcionales:

$$\text{rango}\left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\right) = 1$$

$\overrightarrow{AB}$ = (3, 1,2) $\quad$ $\overrightarrow{AC}$ = (0, -2, 1) $\rightarrow$ Ambos vectores no son proporcionales $\rightarrow$ No están alineados

4	**Dado el vector $\overrightarrow{AB}$ = (2, 3, 4) y el punto B(5, -3, 7), hallar las coordenadas del punto A.**

SOLUCIÓN:

$\overrightarrow{AB} = \vec{b} - \vec{a}$, siendo $\vec{a}$ y $\vec{b}$ los vectores de posición de A y B, respectivamente.
$\vec{a} = \vec{b} - \overrightarrow{AB} \rightarrow \vec{a}$ = (5, -3, 7) – (2, 3, 4).

5	**Dados los puntos A(2, -1, 2) y B(3, 5, 7), hallar las coordenadas del vector $\overrightarrow{AB}$ y su módulo.**

SOLUCIÓN:

$\overrightarrow{AB} = \vec{b} - \vec{a}$, siendo $\vec{a}$ y $\vec{b}$ los vectores de posición de A y B, respectivamente.
$\overrightarrow{AB}$ = (3, 5, 7) – (2, -1, 2) = (1, 6, 5) $\rightarrow \left|\overrightarrow{AB}\right| = \sqrt{1^2 + 6^2 + 5^2} = \sqrt{62}$

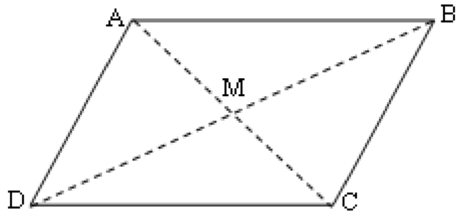
5	**Dados los puntos A(3, -2, 5) y B(3, 1, 7), hallar las coordenadas del punto medio del segmento $\overline{AB}$.**

SOLUCIÓN:

$$\vec{m} = \frac{1}{2}\left(\vec{b} + \vec{a}\right) = \frac{1}{2}[(3, 1, 7) - (3, -2, 5)] = \frac{1}{2}(6, -1, 12) = \left(3, -\frac{1}{2}, 6\right)$$

6	**Las coordenadas de dos vértices consecutivos de un paralelogramo son A(1, 0, 0) y B(0, 1, 0). Las coordenadas del centro M son M(0, 0, 1). Hallar las coordenadas de los vértices C y D.**

SOLUCIÓN:



M es el punto medio del segmento $\overrightarrow{AC}$ y $\overrightarrow{DB}$

Sea C(x, y, z), se verifica:

$$\vec{m}=\frac{1}{2}\left(\vec{a}+\vec{c}\right) \rightarrow (0, 0, 1) = \left(\frac{1+x}{2},\frac{y}{2},\frac{z}{2}\right) \rightarrow C(-1, 0, 2)$$

Sea D(x´, y´, z´), se verifica:

$$\vec{m}=\frac{1}{2}\left(\vec{b}+\vec{d}\right) \rightarrow (0, 0, 1) = \left(\frac{x'}{2},\frac{y'+1}{2},\frac{z'}{2}\right) \rightarrow D(0, -1, 2)$$

7	**Dados los vértices A(3, 3, 6) y B(6, 12, 18), que determinan el segmento $\overline{AB}$, hallar las coordenadas de los puntos que dividen el segmento en tres partes iguales.**

SOLUCIÓN:

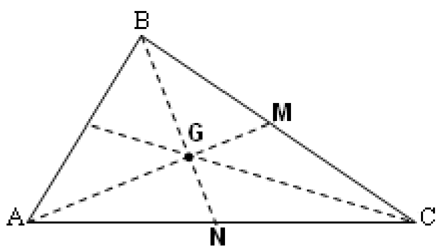
Sean C y D los puntos. Sean $\vec{c}$ y $\vec{d}$ sus vectores de posición.

$$\vec{c}=\vec{a}+\frac{1}{3}\overrightarrow{AB}= (3,3,6)+\frac{1}{3}(3,9,12)=(3,3,6)+(1,3,4)=(4,6,10) \rightarrow C(4, 6, 10)$$

$$\vec{d}=\vec{a}+\frac{2}{3}\overrightarrow{AB} = (3,3,6)+\frac{2}{3}(3,9,12)=(3,3,6)+(2,6,8)=(5,9,14) \rightarrow D(5, 9, 14)$$

8	**En un triángulo ABC el baricentro es G(1, 2, 1). El punto medio de $\overline{BC}$ es M(2, 4, 6) y el punto medio de $\overline{AC}$ es N(3, 2, 1). Hallar las coordenadas de los vértices de A, B y C.**

SOLUCIÓN:



La mediana es la recta que pasa por cada vértice y el punto medio del lado opuesto al vértice.

El baricentro divide cada el segmento AM en dos segmentos, uno el doble del otro: AG = 2 GM.

Sea A(x, y, z), se verifica:

$$\overrightarrow{AG}=2\,\overrightarrow{GM} \rightarrow (1 – x, 2 – y, 1 – z) = 2(1, 2, 5)$$

Igualando componentes obtenemos las coordenadas de A(-1, -2, -9)

Sea B(x´, y´, z´), se verifica:

$$\overrightarrow{BG}=2\,\overrightarrow{GN} \rightarrow (1 – x', 2 – y', 1 – z') = 2(2, 0, 0).$$

Igualando componentes obtenemos las coordenadas de B (-3, 2, 1)

Una propiedad del baricentro es: G = $\frac{1}{3}(A+B+C)$.

Sea C(x´´, y´´, z´´), se verifica:

$$(1, 2, 1)=\left(\frac{-1-3+x''}{3},\frac{-2+2+y''}{3},\frac{-9+1+z''}{3}\right)$$

Igualando componentes obtenemos las coordenadas de C (7, 6, 11)