

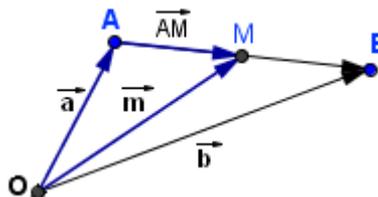
PUNTOS EN EL ESPACIO

- 1 Si \vec{a} , \vec{b} y \vec{m} son los vectores de posición de A, B y M, siendo M el punto medio del segmento AB, ¿qué relación existe entre los tres vectores?

SOLUCIÓN:

$$\vec{m} = \vec{a} + \frac{1}{2}\overline{AB} \rightarrow \vec{m} = \vec{a} + \frac{1}{2}(\vec{b} - \vec{a})$$

$$\vec{m} = \frac{1}{2}(\vec{b} + \vec{a})$$



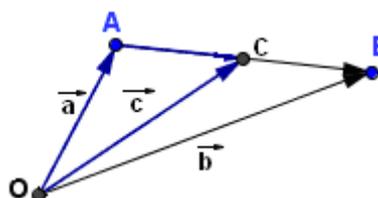
- 2 Si \vec{a} , \vec{b} y \vec{c} son los vectores de posición de los puntos A, B y C, donde C es el punto que divide al segmento AB en dos partes, siendo el segmento AC tres veces mayor que el segmento CB, ¿qué relación vectorial existe entre los tres vectores?

SOLUCIÓN:

$$\vec{c} = \vec{a} + \overline{AC}$$

$$\overline{AC} \text{ es tres veces mayor que } \overline{CB}, \text{ por tanto: } \overline{AC} = \frac{3}{4}\overline{AB}$$

$$\vec{c} = \vec{a} + \frac{3}{4}\overline{AB} = \vec{a} + \frac{3}{4}(\vec{b} - \vec{a}) \rightarrow \vec{c} = \frac{1}{4}\vec{a} + \frac{3}{4}\vec{b}$$



- 3 a) ¿Qué condición vectorial deben cumplir tres puntos, A, B y C para que estén alineados?
b) Comprobar si A(2, 3, 1), B(5, 4, 3) y C(2, 1, 2) están alineados.

SOLUCIÓN:

Para que los puntos A, B y C estén alineados deben verificar que los vectores \overline{AB} , \overline{AC} sean proporcionales:

$$\text{rango}(\overline{AB}, \overline{AC}) = 1$$

$$\overline{AB} = (3, 1, 2) \quad \overline{AC} = (0, -2, 1) \rightarrow \text{Ambos vectores no son proporcionales} \rightarrow \text{No están alineados}$$

- 4 Dado el vector $\overline{AB} = (2, 3, 4)$ y el punto B(5, -3, 7), hallar las coordenadas del punto A.

SOLUCIÓN:

$$\overline{AB} = \vec{b} - \vec{a}, \text{ siendo } \vec{a} \text{ y } \vec{b} \text{ los vectores de posición de A y B, respectivamente.}$$

$$\vec{a} = \vec{b} - \overline{AB} \rightarrow \vec{a} = (5, -3, 7) - (2, 3, 4).$$

- 5 Dados los puntos A(2, -1, 2) y B(3, 5, 7), hallar las coordenadas del vector \overline{AB} y su módulo.

SOLUCIÓN:

$$\overline{AB} = \vec{b} - \vec{a}, \text{ siendo } \vec{a} \text{ y } \vec{b} \text{ los vectores de posición de A y B, respectivamente.}$$

$$\overline{AB} = (3, 5, 7) - (2, -1, 2) = (1, 6, 5) \rightarrow |\overline{AB}| = \sqrt{1^2 + 6^2 + 5^2} = \sqrt{62}$$

- 5 Dados los puntos A(3, -2, 5) y B(3, 1, 7), hallar las coordenadas del punto medio del segmento \overline{AB} .

SOLUCIÓN:

$$\vec{m} = \frac{1}{2}(\vec{b} + \vec{a}) = \frac{1}{2}[(3, 1, 7) + (3, -2, 5)] = \frac{1}{2}(6, -1, 12) = \left(3, -\frac{1}{2}, 6\right)$$

- 6** Las coordenadas de dos vértices consecutivos de un paralelogramo son $A(1, 0, 0)$ y $B(0, 1, 0)$. Las coordenadas del centro M son $M(0, 0, 1)$. Hallar las coordenadas de los vértices C y D .

SOLUCIÓN:

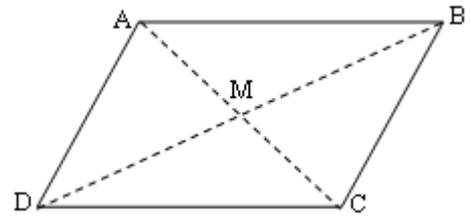
M es el punto medio del segmento \overline{AC} y \overline{DB}

Sea $C(x, y, z)$, se verifica:

$$\vec{m} = \frac{1}{2}(\vec{a} + \vec{c}) \rightarrow (0, 0, 1) = \left(\frac{1+x}{2}, \frac{y}{2}, \frac{z}{2}\right) \rightarrow C(-1, 0, 2)$$

Sea $D(x', y', z')$, se verifica:

$$\vec{m} = \frac{1}{2}(\vec{b} + \vec{d}) \rightarrow (0, 0, 1) = \left(\frac{x'}{2}, \frac{y'+1}{2}, \frac{z'}{2}\right) \rightarrow D(0, -1, 2)$$



- 7** Dados los vértices $A(3, 3, 6)$ y $B(6, 12, 18)$, que determinan el segmento \overline{AB} , hallar las coordenadas de los puntos que dividen el segmento en tres partes iguales.

SOLUCIÓN:

Sean C y D los puntos. Sean \vec{c} y \vec{d} sus vectores de posición.

$$\vec{c} = \vec{a} + \frac{1}{3}\overline{AB} = (3, 3, 6) + \frac{1}{3}(3, 9, 12) = (3, 3, 6) + (1, 3, 4) = (4, 6, 10) \rightarrow C(4, 6, 10)$$

$$\vec{d} = \vec{a} + \frac{2}{3}\overline{AB} = (3, 3, 6) + \frac{2}{3}(3, 9, 12) = (3, 3, 6) + (2, 6, 8) = (5, 9, 14) \rightarrow D(5, 9, 14)$$

- 8** En un triángulo ABC el baricentro es $G(1, 2, 1)$. El punto medio de \overline{BC} es $M(2, 4, 6)$ y el punto medio de \overline{AC} es $N(3, 2, 1)$. Hallar las coordenadas de los vértices de A, B y C .

SOLUCIÓN:

La mediana es la recta que pasa por cada vértice y el punto medio del lado opuesto al vértice.

El baricentro divide cada el segmento AM en dos segmentos, uno el doble del otro: $AG = 2 GM$.

Sea $A(x, y, z)$, se verifica:

$$\overline{AG} = 2 \overline{GM} \rightarrow (1-x, 2-y, 1-z) = 2(1, 2, 5)$$

Igualando componentes obtenemos las coordenadas de $A(-1, -2, -9)$

Sea $B(x', y', z')$, se verifica:

$$\overline{BG} = 2 \overline{GN} \rightarrow (1-x', 2-y', 1-z') = 2(2, 0, 0).$$

Igualando componentes obtenemos las coordenadas de $B(-3, 2, 1)$

Una propiedad del baricentro es: $G = \frac{1}{3}(A+B+C)$.

Sea $C(x'', y'', z'')$, se verifica:

$$(1, 2, 1) = \left(\frac{-1-3+x''}{3}, \frac{-2+2+y''}{3}, \frac{-9+1+z''}{3}\right)$$

Igualando componentes obtenemos las coordenadas de $C(7, 6, 11)$

