Control de la 2ª Evaluación. Solución

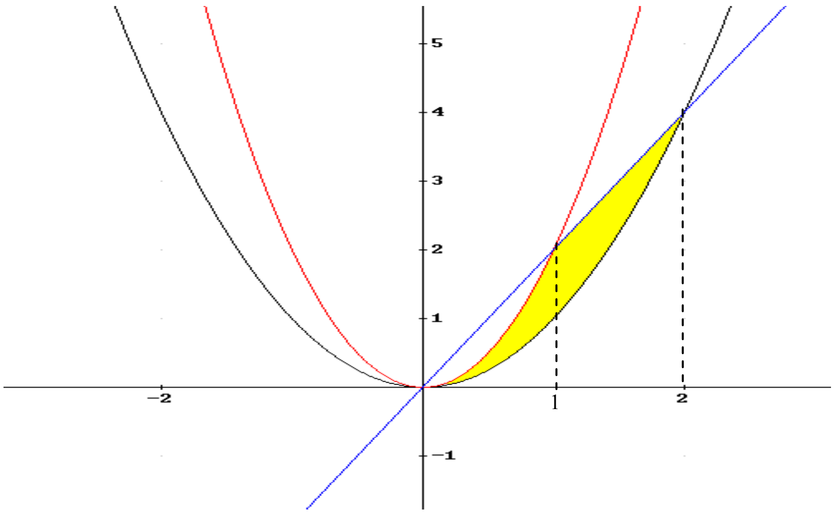
Resolver los siguientes problemas y cuestiones. Se valorará no sólo el resultado sino también el ***desarrollo del problema*** y el ***uso correcto de la notación matemática***.

C1. Calcular el área encerrada por la siguientes tres curvas: $f(x)=x^2$, $g(x)=2x^2$, $h(x)=2x$. **(1.5 puntos)**

Solución.

Representamos las funciones:

- las parábolas, las dos tiene el vértice en el origen. La función g(x) crece más rápido que f(x) ya que tiene un factor dos.
- La recta pasa por el origen (0,0) y por (2,4).



Las tres funciones se cortan en el origen (0,0), veamos los puntos de corte de la recta con las parábolas:

$x^2=2x \rightarrow x=0, x=2$

$2x^2=2x \rightarrow x=0, x=1$

El área es tal que la dividimos en dos intervalos

$A=A_1+A_2$

$A_1=\int_0^1 (2x^2-x^2)dx = \int_0^1 x^2 dx = \left[\frac{x^3}{3}\right]_o^1 = \frac{1}{3}-0=\frac{1}{3}u^2$

$A_2=1\int_1^2 (2x-x^2)dx = \left[x^2-\frac{x^3}{3}\right]_1^2 = (4-\frac{8}{3})-(1-\frac{1}{3})=\frac{2}{3}u^2$

$A=\frac{1}{3}+\frac{2}{3}=1\ u^2$

C2. Calcular el área encerrada por la función $f(x) = x^3 - 3x^2 + 2x$ y el eje OX entre las rectas x=-1 y x=3. **(1.5 puntos)**

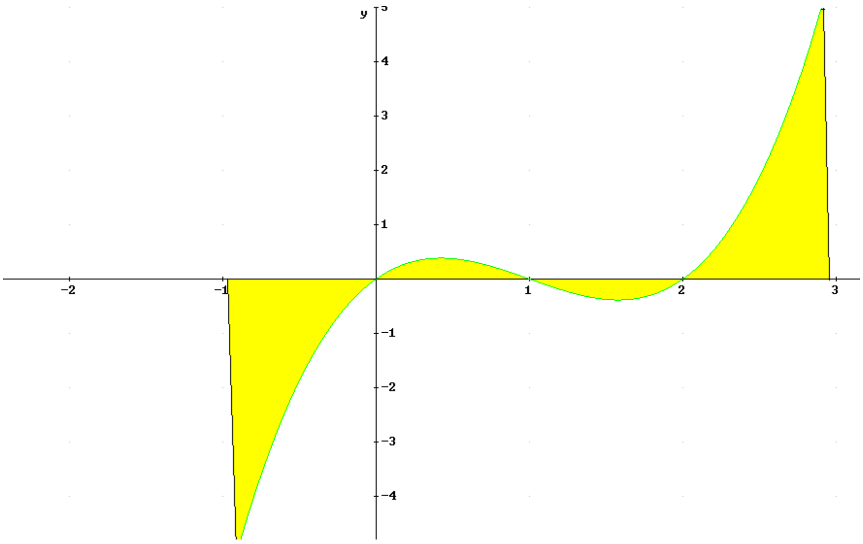
Solución

Tenemos que ver los puntos de corte con el eje OX:

$f(x) = x^3 - 3x^2 + 2x = 0 \rightarrow x=0, x=1, x=2$

Veamos en los 4 intervalos si la función por encima o debajo del eje OX

	(-1,0)	(0,1)	(1,2)	(2,3)
Signo(f(x))	-	+	-	+
Area	$A_1=-\int_{-1}^{0} f(x)dx$	$A_2=\int_{0}^{1} f(x)dx$	$A_3=-\int_{1}^{2} f(x)dx$	$A_4=\int_{2}^{3} f(x)dx$



$$\int f(x)dx = \int (x^3 - 3x^2 + 2x)dx = \frac{x^4}{4} - x^3 + x^2$$

$A_1=9/4\cdot u^2$

$A_2=1/4\cdot u^2$

$A_3=1/4\cdot u^2$

$A_4=9/4\cdot u^2$

$A=A_1+A_2+A_3+A_4=5\cdot u^2$

C3. Calcular <u>uno</u> de los siguientes dos determinantes: **(1.5 puntos)**

a) $$\begin{vmatrix} 2 & 3 & 4 & 5 \\ 4 & -2 & 1 & 2 \\ -3 & 0 & -1 & 0 \\ -4 & -1 & 2 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -14 & 11 & 0 & -3 \\ 4 & -2 & 1 & 2 \\ 1 & -2 & 0 & 2 \\ -12 & 3 & 0 & -2 \end{vmatrix} \begin{matrix} F_1 - 4F_2 \\ F_2 \\ F_3 + F_2 \\ F_4 - 2F_2 \end{matrix} = 1\cdot(-1)\begin{vmatrix} -14 & 11 & -3 \\ -7 & 0 & -2 \\ -12 & 3 & -2 \end{vmatrix} = -(-151) = 151$$

$$\begin{vmatrix} x & y & z & 1 \\ y & z+1 & x & 0 \\ z & x & y & 1 \\ 0 & y+1 & x & z \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x+y+z+1 & y & z & 1 \\ x+y+z+1 & z+1 & x & 0 \\ x+y+z+1 & x & y & 1 \\ x+y+z+1 & y+1 & x & z \end{vmatrix} = (x+y+z+1)\begin{vmatrix} 1 & y & z & 1 \\ 1 & z+1 & x & 0 \\ 1 & x & y & 1 \\ 1 & y+1 & x & z \end{vmatrix} =$$

b)

$$= (x+y+z+1)\begin{vmatrix} 1 & y & z & 1 \\ 0 & z+1-y & x-z & -1 \\ 0 & x-y & y-z & 0 \\ 0 & 1 & x-z & z-1 \end{vmatrix} = (x+y+z+1)\begin{vmatrix} z+1-y & x-z & -1 \\ x-y & y-z & 0 \\ 1 & x-z & z-1 \end{vmatrix} =$$

$$= (x+y+z+1)\cdot\left[(z+1-y)(y-z)(z-1)-(x-y)(x-z)+(y-z)-(x-y)(x-z)\right] =$$
$$= (x+y+z+1)\cdot\left[(z+1-y)(y-z)(z-1)-2(x-y)(x-z)+(y-z)\right]$$

C4. Calcular la matriz $X \in M_{3x3}$ que cumple la siguiente igualdad **(1.5 puntos)**:

$A\cdot X\cdot C = A^2\cdot C^2 + A$

Siendo $A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ y $C=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$

Ayuda: antes de operar con matrices simplifica si puedes.

Solución:

$\mathbf{A^{-1}A\cdot X\cdot C\cdot C^{-1} = A^{-1}}(A^2\cdot C^2+A)\cdot \mathbf{C^{-1}}$

$X = \mathbf{A^{-1}}\cdot A^2\cdot C^2\cdot C^{-1} + A^{-1}\cdot A\cdot \mathbf{C^{-1}}$

$X = \mathbf{A^{-1}}\cdot A\cdot A\cdot C\cdot C\cdot C^{-1} + \mathbf{C^{-1}}$

$X = A\cdot C + C^{-1}$

$A\cdot C=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -2 \\ 3 & 1 & 4 \end{pmatrix}$

$C^{-1}=\begin{pmatrix} 0 & -2 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

$X=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -2 \\ 3 & 1 & 4 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 0 & -2 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 1 & 3 & -3 \\ 3 & 2 & 4 \end{pmatrix}$

C5. Dada la matriz A=$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$, calcular A^2, A^3, A^4 .... A^n(con n∈N). ¿Cuánto vale A^{67}?

(1.5 puntos)

$A^1=A$
$A^2=-Id$
$A^3=A^2\cdot A=-A$
$A^4=A^3\cdot A=-A\cdot A=Id$
$A^5=A$
…

$$A^n=\begin{cases} A & n=1+4k \\ -Id & n=2+4k \\ -A & n=3+4k \\ Id & n=4k \end{cases}$$

Si el resto de dividir entre 4 el exponente:

- es 1 el resultado es A,
- si 2 el resultado es –Id
- si 3 el resultado es –A
- si es 0 el resultado es Id

resto(67/4)=3 → $A^{67}=A^3=-A$

C6. Encontrar las matrices A triangulares inferiores 2x2, que cumplan $A\cdot A^t=Id$, con Id la matriz identidad.**(1.5 puntos)**

Solución

Triangular inferior

A=$\begin{pmatrix} a & 0 \\ b & c \end{pmatrix}$ y A^t=$\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix}$.

$$A\cdot A^t=\begin{pmatrix} a^2 & ab \\ ab & b^2+c^2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \left.\begin{array}{r} a^2=1 \\ ab=0 \\ b^2+c^2=1 \end{array}\right\} \rightarrow a=\pm 1,\ b=0,\ c=\pm 1$$

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix},\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix},\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

C7. Se tiene una matriz M cuadrada de orden 3 cuyas columnas son respectivamente C_1, C_2 y C_3 ($M=(C_1, C_2, C_3)$) y cuyo determinante vale -4. Se considera la matriz A cuyas columnas son $A=(-C_2, C_1+3C_2, 2C_3)$. Calcular razonadamente **$\det(M\cdot A^{-1})$**.
(1 punto)

$\det(M\cdot A^{-1})=\det(M)\cdot\det(A^{-1})=\frac{\det(M)}{\det(A)}=\frac{-4}{-8}=\frac{1}{2}$

$\det(A)=\det(-C_2, C_1+3C_2, 2C_3)=\det(-C_2, C_1, 2C_3)+\det(-C_2, 3C_2, 2C_3)=$
$\det(-C_2, C_1, 2C_3)+0=-2\det(C_2, C_1, C_3)=2\det(C_1, C_2, C_3)=-8$