Actividades y ejercicios 2º Bachillerato Matemáticas Aplicadas a las Ciencias Sociales II.

ÍNDICE:

1. Matrices	2
2. Determinantes	11
3. Sistemas lineales	24
4. Inecuaciones y programación lineal	31
5. Límites y continuidad	40
6. Derivadas	48
7. Integrales	63
8. Probabilidad	71
9. Estimación. Intervalos de confianza	85

LibrosMareaVerde.tk
www.apuntesmareaverde.org.es

Autores: Leticia González Pascual y Álvaro Valdés.
Ilustraciones: Banco de Imágenes de INTEF y de los autores

CAPÍTULO 1: MATRICES

ACTIVIDADES PROPUESTAS

1. CONCEPTO DE MATRIZ

1. Utiliza matrices para representar la información siguiente: Un agricultor cultiva lechugas, naranjas y melones. Durante el año 2014 ha recogido mil lechugas, 2000 kilos de naranjas y 500 melones. En los años anteriores su producción ha sido de 500, 1000 y 400 respectivamente. Por cada lechuga recibe un céntimo, por cada kilo de naranjas 3 céntimos y por cada melón 5 céntimos. Escribe la matriz de sus ganancias del año 2014.
2. Analiza los siguientes elementos de tu entorno y determina si son matrices o no:
    a. Un calendario.
    b. La clasificación de la Liga de fútbol (o cualquier otro deporte).
    c. El disco duro de un ordenador.
    d. Un armario donde se guarda una colección de copas.
    e. Los lineales de un supermercado.
    f. Una pantalla de televisión.
    g. El boleto de la Lotería Primitiva, de la Quiniela y del Euromillón.
    h. Los buzones de una vivienda.
    i. Los pupitres de una clase.
3. Propón otros elementos de tu entorno que sea matrices o puedan representarse mediante matrices.

3. OPERACIONES CON MATRICES

4. Escribe tres matrices fila.
5. Escribe tres matrices columna.
6. Escribe tres matrices cuadradas de dimensión 2, 3 y 4 respectivamente.
7. Escribe la matriz unidad de dimensión 2, 3 y 4.
8. Escribe la matriz nula de dimensión 2, 3 y 4.
9. Dadas las matrices $A=\begin{pmatrix}2&1&0\\9&0&-3\\-2&0&7\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}1&1&1\\2&2&-2\\-3&3&3\end{pmatrix}$ y $C=\begin{pmatrix}1&0&0\\2&4&-5\\7&3&-3\end{pmatrix}$ calcula: a) $A+3B$ b) $2A+B-5C$
10. Para las matrices $A=\begin{pmatrix}2&1&0\\9&0&-3\\-2&0&7\end{pmatrix}$ y $B=\begin{pmatrix}1&1&1\\2&2&-2\\-3&3&3\end{pmatrix}$ calcula $A\cdot B$ y $B\cdot A$. ¿Es el producto conmutativo?
11. Dadas las matrices $A=\begin{pmatrix}2&1&0\\9&0&-3\\-2&0&7\end{pmatrix}$ y $B=\begin{pmatrix}1&1&1\\2&2&-2\\-3&3&3\end{pmatrix}$ calcula $3A^t-B^2$.
12. Calcula las matrices inversas, si existen, de las siguientes matrices:
$$A=\begin{pmatrix}2&1&0\\9&0&-3\\-2&0&7\end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix}1&1&1\\2&2&-2\\-3&3&3\end{pmatrix},\ C=\begin{pmatrix}2&3\\1&0\end{pmatrix},\ D=\begin{pmatrix}1&1&1\\2&2&2\\3&3&3\end{pmatrix}$$
13. Resuelve la ecuación matricial $M\cdot X+N=P$ siendo: $M=\begin{pmatrix}2&1&0\\9&0&-3\\-2&0&7\end{pmatrix}$, $N=\begin{pmatrix}1&1&1\\2&2&-2\\-3&3&3\end{pmatrix}$, $P=\begin{pmatrix}1&1&1\\2&2&2\\3&3&3\end{pmatrix}$
14. Calcula el rango de las siguientes matrices: $A=\begin{pmatrix}2&1&0\\9&0&-3\\-2&-1&0\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}1&1&1\\2&2&-2\\-3&3&3\end{pmatrix}$, $C=\begin{pmatrix}2&3\\4&6\end{pmatrix}$, $D=\begin{pmatrix}1&1&1\\2&2&2\\3&3&3\end{pmatrix}$

EJERCICIOS Y PROBLEMAS.

1. - Dadas las matrices $A=\begin{pmatrix}1 & -1\\ 0 & 3\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}4 & 0\\ -1 & -2\end{pmatrix}$ y $C=\begin{pmatrix}-1 & 2\\ -2 & 3\end{pmatrix}$ calcula: a) $A + B$b) $A - B - C$c) $3\cdot A + 5\cdot B - 6\cdot C$

2. - Para las matrices $A=\begin{pmatrix}1 & -1\\ 2 & 3\\ 0 & 4\end{pmatrix}$ y $B=\begin{pmatrix}4 & -1 & 2\\ 0 & 5 & 3\end{pmatrix}$ calcula $A\cdot B$ y $B\cdot A$. ¿Es el producto conmutativo?

3. - Calcula los productos posibles entre las matrices $A=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ 1 & 1 & 1\\ 0 & 1 & -1\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}1\\ 2\\ 1\end{pmatrix}$ y $C=\begin{pmatrix}2 & 1 & 0\\ 3 & 4 & 5\end{pmatrix}$.

4.- Dadas las matrices $A=\begin{pmatrix}1 & 3 & 3\\ 1 & 4 & 3\\ 1 & 3 & 4\end{pmatrix}$ y $B=\begin{pmatrix}1 & 1 & 2\\ 2 & 0 & -1\\ -6 & -1 & 0\end{pmatrix}$ calcula $3\cdot A^t - B^2$.

5.- Para las matrices $A=\begin{pmatrix}1 & -1 & 2\\ 4 & 0 & -3\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}0 & 3 & 4\\ -1 & -2 & 3\end{pmatrix}$, $C=\begin{pmatrix}2 & 3 & 0 & 1\\ -5 & 1 & 4 & -2\\ 1 & 0 & 0 & -3\end{pmatrix}$ y $D=\begin{pmatrix}2\\ 1\\ 3\end{pmatrix}$ realiza las siguientes operaciones si es posible: a) $A + B$ b) $3\cdot A - 4\cdot B$ c) $A\cdot B$ d) $A\cdot D$ e) $B\cdot C$ f) $C\cdot D$ g) $A^t\cdot C$

6. - ¿Es posible que para dos matrices A y B no cuadradas puedan existir $A\cdot B$ y $B\cdot A$?

7. - a) Calcula A^{50} y A^{97} para la matriz $A=\begin{pmatrix}0 & -1\\ 1 & 0\end{pmatrix}$

b) Encuentra los valores de a y b para que la matriz A conmute con la matriz $\begin{pmatrix}a & 0\\ b & 1\end{pmatrix}$.

8. - Calcula A^n, para $n \in \mathbb{N}$, siendo A las siguientes matrices: a) $\begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & 1\end{pmatrix}$ b) $\begin{pmatrix}1 & 1\\ 0 & 1\end{pmatrix}$ c) $\begin{pmatrix}1 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$

9. – Se dice que dos matrices A y B conmutan si $A\cdot B = B\cdot A$. Dada la matriz $A=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 0 & 1\end{pmatrix}$ halla las matrices B que conmuten con A.

10. - Encuentra todas las matrices, del orden correspondiente, que conmuten con las matrices: $\begin{pmatrix}1 & 1\\ 0 & 1\end{pmatrix}$ y $\begin{pmatrix}0 & 0 & 0\\ 1 & 0 & 0\\ 1 & 1 & 0\end{pmatrix}$

11. - Sean las matrices $A=2\cdot\begin{pmatrix}x & 2\\ 0 & m\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}5\\ y\end{pmatrix}$, $C=\begin{pmatrix}0\\ 10x\end{pmatrix}$, $D=10\cdot\begin{pmatrix}1\\ m\end{pmatrix}$, $E=\begin{pmatrix}3 & m\end{pmatrix}$. Calcula cada uno de los productos $A\cdot B$, $D\cdot E$, $E\cdot B$, $C\cdot E$.

12.- Sean $A=\begin{pmatrix}-1 & 2 & 1\\ y & 3 & 5\end{pmatrix}$ y $B=\begin{pmatrix}-1 & x & 1\\ 3 & z & x+z\end{pmatrix}$ dos matrices de orden 2×3, en las que x, y, z denotan valores numéricos desconocidos.

a) Determina, razonadamente, los valores de $x, y, z \in \mathbb{R}$ de manera que $A = B$.

b) ¿Es posible el cálculo de $A\cdot B$? Razona la respuesta.

13.- Sea la matriz $A=\begin{pmatrix}2 & 1 & 2\\ 2 & 0 & -1\\ -5 & -1 & 0\end{pmatrix}$ calcula, si existen, las siguientes matrices: a) Una matriz X, tal que $X\cdot A=\begin{pmatrix}1 & 0 & -1\end{pmatrix}$. b) Una matriz Y tal que $A\cdot Y=\begin{pmatrix}1 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 0\end{pmatrix}$

14. - Calcula las matrices inversas, si existen, de las siguientes matrices:

a) $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$ b) $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 8 \end{pmatrix}$ c) $\begin{pmatrix} -1 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 3 \\ 4 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ d) $\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 3 & 1 & 2 \\ 4 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

15.- Dadas las matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$ calcula $(AB)^t$ y $(AB)^{-1}$.

16.- Dada la matriz $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$. a) Halla la matriz inversa de A. b) Comprueba que $A \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot A = I$. c) Halla una matriz X tal que $A \cdot X = B$, siendo $B = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$

17.- Calcula la matriz inversa de $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

18. - Dadas las matrices $A = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 1 & -2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$ obtén, si procede, $(B \cdot A)^{-1}$.

19.- Sean las matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

a) Calcula la matriz inversa de $A \cdot B$
b) Halla el producto de la inversa de B por la inversa de A. ¿Qué relación existe entre la matriz del apartado anterior y esta matriz? Justifica la respuesta.

20. – Sea $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ comprueba que $A^t = A^{-1}$ y calcula $(A \cdot A^t)^{2003}$.

21.- Sean las matrices: $C = \begin{pmatrix} -3 & 2 & 2 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$, $D = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & -1 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. a) Halla C^{-1} y D^{-1}. b) Calcula la matriz inversa de $C \cdot D$. c) Comprueba si $(C \cdot D)^{-1}$ es igual a $C^{-1} \cdot D^{-1}$ o es igual a $D^{-1} \cdot C^{-1}$.

22.- Resuelve la ecuación matricial $M \cdot X + N = P$ siendo $M = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$, $N = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ y $P = \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$

23. - Sean las matrices $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$. a) Calcula $A^{-1} \cdot (2 \cdot B + 3 \cdot I)$. b) Determina la matriz X para que $X \cdot A = A + I$

24. - Sean las matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ y $C = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$. Resuelve la ecuación $X \cdot A \cdot B - X \cdot C = 2 \cdot C$

25. - Calcula el rango de las siguientes matrices: a) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ b) $\begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 4 & 2 \end{pmatrix}$ c) $\begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

26. - Calcula el rango de las siguientes matrices según los valores del parámetro a: a) $\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 3 & 1 \\ a & 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$ b) $\begin{pmatrix} 2a & 1 & 1 \\ 2 & a & 1 \\ 2 & 1 & a \end{pmatrix}$

27.- Determina las matrices A y B que son soluciones del siguiente sistema:

$$3A-2B=\begin{pmatrix}-8 & 7 & -1\\ 9 & -18 & 1\\ 14 & 9 & -14\end{pmatrix} \qquad 2A+B=\begin{pmatrix}11 & 7 & 4\\ -8 & 2 & 17\\ 14 & -1 & -14\end{pmatrix}$$

28. - Obtener las matrices X e Y que verifiquen los siguientes sistemas matriciales.

a) $\begin{cases} 2X-3Y=\begin{pmatrix}1 & 5\\ 4 & 2\end{pmatrix}\\ X-Y=\begin{pmatrix}-1 & 0\\ 3 & 6\end{pmatrix}\end{cases}$ b) $\begin{cases} X+Y=\begin{pmatrix}2 & 1\\ 3 & 0\end{pmatrix}\\ X-Y=\begin{pmatrix}6 & 2\\ 0 & 1\end{pmatrix}\end{cases}$ c) $\begin{cases} 2X+Y=\begin{pmatrix}3 & 1\\ 0 & -2\end{pmatrix}\\ X+2Y=\begin{pmatrix}1 & 0\\ -2 & 4\end{pmatrix}\end{cases}$

29. - Utilizando las operaciones elementales por filas, obtén matrices triangulares equivalentes a las siguientes matrices:

a) $\begin{pmatrix}1 & 2\\ 3 & 4\end{pmatrix}$ b) $\begin{pmatrix}-1 & 0 & 1\\ 1 & 2 & 2\\ 2 & 1 & 1\end{pmatrix}$ c) $\begin{pmatrix}1 & 2 & -1\\ 3 & -2 & 1\\ 4 & 0 & 2\end{pmatrix}$ d) $\begin{pmatrix}1 & 1 & -2 & 1\\ 2 & 0 & 1 & 3\\ -1 & 1 & 2 & 1\\ 3 & 2 & 1 & 2\end{pmatrix}$

30. - En una academia de idiomas se imparten inglés y alemán en cuatro niveles y dos modalidades: grupos reducidos y grupos normales. La matriz $A=\begin{pmatrix}130 & 160\\ 120 & 80\\ 210 & 130\\ 100 & 60\end{pmatrix}$ expresa el número de personas, según el tipo de grupo, donde la primera columna corresponde a los cursos de inglés, la segunda a los de alemán y las filas, a los niveles primero, segundo, tercero y cuarto respectivamente. Las columnas de la matriz $B=\begin{pmatrix}0{,}2 & 0{,}25 & 0{,}4 & 0{,}75\\ 0{,}8 & 0{,}75 & 0{,}6 & 0{,}25\end{pmatrix}$ reflejan el tanto por uno de estudiantes (común para ambos idiomas) que siguen curso reducido (primera fila) y curso normal (segunda fila) para cada uno de los niveles.

a) Obtener la matriz que proporciona el número de estudiantes por modalidad e idioma.

b) Sabiendo que la academia cobra 30 euros por persona en grupos reducidos y 20 euros por persona en grupo normal, hallar la cantidad que obtiene la academia en cada uno de los idiomas.

31. - Tres escritores presentan a un editor, al acabar la enciclopedia, la minuta que se recoge en la tabla adjunta:

	Horas de trabajo	Conferencias dadas	Viajes
Escritor A	40	10	5
Escritor B	80	15	8
Escritor *C*	100	25	10

El editor paga la hora de trabajo a 75 euros, la conferencia a 300 euros y el viaje a 250 euros. Si sólo piensa pagar, respectivamente, el 30 %, el 20 % y el 10 % de lo que correspondería a cada escritor, ¿qué gasto tendría el editor?

32. - Una fábrica produce dos modelos de lavadoras, *A* y *B*, en tres terminaciones: *N*, *L* y *S*. Produce del modelo *A*: 400 unidades en la terminación *N*, 200 unidades en la terminación *L* y 50 unidades en la terminación *S*. Produce del modelo *B*: 300 unidades en la terminación *N*, 100 en la *L* y 30 en la *S*. La terminación *N* lleva 25 horas de taller y 1 hora de administración. La terminación *L* lleva 30 horas de taller y 1,2 horas de administración. La terminación *S* lleva 33 horas de taller y 1,3 horas de administración.

a) Representa la información en dos matrices.

b) Halla una matriz que exprese las horas de taller y de administración empleadas para cada uno de los modelos.

33. - Sean A y B dos matrices de igual orden, y λ un número. Se sabe que $\lambda\cdot(A + B) = \lambda\cdot A + \lambda\cdot B$. Justifica el resultado.
34. - Sean A y B dos matrices cuadradas de igual tamaño. Si A y B son simétricas, analiza si, entonces, también lo es su producto $A\cdot B$.
    Si la respuesta es afirmativa, justifíquese; en caso contrario, dese un contraejemplo que lo confirme.
35. - Sea la matriz $M = \begin{pmatrix} 0 & r \\ s & 0 \end{pmatrix}$, siendo r y s dos números reales tales que $r\cdot s \neq 1$. Calcula M^2, M^3, M^4 y M^{2k} para $k \in \mathbb{N}$.
36. - Sea el conjunto de matrices definido por: $M = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ b & a \end{pmatrix}; a, b \in R \right\}$
    a) Comprueba que $A, B \in \mathbb{M}$, también $A + B \in \mathbb{M}$ y $A\cdot B \in \mathbb{M}$
    b) Encuentra todas las matrices $C \in \mathbb{M}$, tales que $C^2 = C$.
37. - Se dice que una matriz cuadrada A es ortogonal si se verifica que $A\cdot A^t = I$ donde A^t es la matriz traspuesta de A e I es la matriz identidad. Si A y B son dos matrices ortogonales de igual tamaño, analiza si $A\cdot B$ es una matriz ortogonal.
38. – Considera las matrices A, B y C definidas como:

$$A_{3\times 3} = \left(a_{ij} = i + j\right),\ \forall i, j = 1,2,3$$
$$B_{2\times 3} = \left(b_{ij} = i - j\right),\ \forall i = 1,2; j = 1,2,3$$
$$C_{3\times 2} = \left(c_{ij} = 2i + j\right),\ \forall i = 1,2,3;, j = 1,2$$

    a) Construye las tres matrices.
    b) Halla las traspuestas A^t, B^t y C^t y determina cuál (o cuáles) de las matrices es simétrica.
    c) Analiza cuáles de los productos $A\cdot A$, $A\cdot B$, $A\cdot C$, $B\cdot A$, $B\cdot B$, $B\cdot C$, $C\cdot A$, $C\cdot B$ o $C\cdot C$ pueden realizarse.
    d) Determina el rango de las tres matrices A, B y C.
39. – Dada la matriz: $M = \begin{pmatrix} 0 & z & -y \\ -z & 0 & x \\ y & -x & 0 \end{pmatrix}$ en la que se verifica $x^2 + y^2 + z^2 = 1$.

a) Calcula M^2. b) Calcula $P = M^2 + I$. c) Comprueba que $P^2 = P$. d) Comprueba que $P\times M = M\times P = O$.

AUTOEVALUACIÓN

Dadas las matrices $A=\begin{pmatrix}5 & -2 & 0\\ 3 & 4 & -7\end{pmatrix}$; $B=\begin{pmatrix}1 & 3 & 5\\ 0 & 1 & -2\end{pmatrix}$

1.- La dimensión de la matriz A es:

a) 3 b) 2 c) 2 x 3 d) 3 x 2

2.- La matriz A es:

a) una matriz fila b) cuadrada c) traspuesta d) rectangular

3.- La suma de las matrices A y B es:

$a)\ A+B=\begin{pmatrix}5 & -2 & 0\\ 3 & 4 & -7\end{pmatrix}$ $b)\ A+B=\begin{pmatrix}6 & 1 & 5\\ 3 & 5 & -9\end{pmatrix}$ $c)\ A+B=\begin{pmatrix}6 & -1 & 5\\ 3 & 4 & -5\end{pmatrix}$ $d)\ A+B=\begin{pmatrix}6 & 1 & 0\\ 3 & 4 & -9\end{pmatrix}$

4.- El producto $3A$ es:

$a)\ 3A=\begin{pmatrix}15 & -6 & 0\\ 3 & 4 & -7\end{pmatrix}$ $b) 3A=\begin{pmatrix}15 & -6 & 0\\ 9 & 12 & -9\end{pmatrix}$ $c)\ 3A=\begin{pmatrix}15 & -6 & 0\\ 9 & 12 & -21\end{pmatrix}$ $d)\ 3A+B=\begin{pmatrix}0 & 3 & 0\\ 0 & 0 & -21\end{pmatrix}$

5.- Indica qué afirmación es cierta

a) Las matrices A y B se pueden multiplicar
b) Las matrices A y B no se pueden multiplicar
c) Ambas tienen matriz inversa
d) Sus matrices traspuestas son iguales

Dadas las matrices $C=\begin{pmatrix}3 & 3 & 3\\ 3 & 3 & 3\\ 3 & 3 & 3\end{pmatrix}; D=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}; E=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ 4 & 0 & 1\\ 2 & 3 & 4\end{pmatrix}; F=\begin{pmatrix}1 & 3 & 1\\ 0 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 4\end{pmatrix}$

6.- La matriz identidad es la matriz: a) C; b) D; c) E; d) F.

7.- El producto de las matrices E y F es:

$a) EF=\begin{pmatrix}1 & 6 & 15\\ 0 & 13 & 8\\ 2 & 10 & 21\end{pmatrix}$ $b) EF=\begin{pmatrix}1 & 5 & 13\\ 0 & 12 & 8\\ 2 & 10 & 21\end{pmatrix}$ $c) EF=\begin{pmatrix}1 & 6 & 15\\ 0 & 13 & 8\\ 2 & 13 & 9\end{pmatrix}$ $d) EF=\begin{pmatrix}1 & 6 & 15\\ 4 & 10 & 16\\ 2 & 10 & 21\end{pmatrix}$

8.- La matriz inversa de la matriz F es:

$a) F^{-1}=\begin{pmatrix}-1 & 11 & -3\\ 0 & -4 & 1\\ 0 & 1 & 0\end{pmatrix}$ $b) F^{-1}=\begin{pmatrix}-1 & 0 & 0\\ 11 & 4 & 1\\ 3 & 0 & 0\end{pmatrix}$ $c) F^{-1}=\begin{pmatrix}-1 & 0 & 0\\ 0 & 4 & -1\\ 0 & -1 & 0\end{pmatrix}$ $d) F^{-1}=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 12 & 4 & 1\\ 3 & 0 & 0\end{pmatrix}$

9.- La matriz traspuesta de la matriz F es:

$a) F^{t}=\begin{pmatrix}1 & 11 & -3\\ 0 & -4 & 1\\ 0 & 1 & 0\end{pmatrix}$ $b) F^{t}=\begin{pmatrix}1 & 0 & -3\\ 3 & 1 & 0\\ 1 & 1 & 0\end{pmatrix}$ $c) F^{t}=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 1\\ 0 & 1 & 0\end{pmatrix}$ $d) F^{t}=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 3 & 0 & 1\\ 1 & 1 & 4\end{pmatrix}$

10.- El rango de la matriz C es: a) 3 b) 2 c) 1 d) no tiene

Apéndice: Problemas de matrices en las P.A.A.U.

(1) Sea la matriz $A = \begin{pmatrix} -1 & -2 & -2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \end{pmatrix}$. a) Comprueba que verifica $A^3 - I = O$, con I la matriz identidad y O la nula. b) Calcula A^{13}. c) Basándote en los apartados anteriores y sin recurrir al cálculo de inversas, halla la matriz X que verifica la igualdad $A^2 \cdot X + I = A$

(2) a) Define rango de una matriz.

b) Una matriz de 3 filas y 3 columnas tiene rango 3. ¿Cómo varía el rango si quitamos una columna? Si suprimimos una fila y una columna, ¿podemos asegurar que el rango de la matriz resultante valdrá dos?

(3) Sea A una matriz $(m \times n)$

a) ¿Existe una matriz B tal que $B \cdot A$ sea una matriz fila? Si existe, ¿qué orden tiene?

b) ¿Se puede encontrar una matriz B tal que $A \cdot B$ sea una matriz fila? Si existe, ¿qué orden tiene?

c) Busca una matriz B tal que $B \cdot A = (\,0 \;\; 0\,)$ siendo $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

(4) Dada la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$ y el vector $X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$, se pide obtener razonadamente:

a) El vector X tal que $A \cdot X = 0 \cdot X$.

b) Todos los vectores X tales que $A \cdot X = 3 \cdot X$.

c) Todos los vectores X tales que $A \cdot X = 2 \cdot X$.

(5) Sean I y A las matrices cuadradas siguientes: $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ y $A = \begin{pmatrix} 17 & 29 \\ -10 & -17 \end{pmatrix}$

Se pide calcular, explicando todos los pasos necesarios:

a) Las matrices A^2 y A^3.

b) Los números reales a y b para los cuales se verifica $(I + A)^2 = a \cdot I + b \cdot A$.

(6) Dada la ecuación matricial: $\begin{pmatrix} a & 2 \\ 3 & 7 \end{pmatrix} \cdot B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ donde B es una matriz cuadrada de tamaño 2 × 2, se pide:

a) Calcula el valor o valores de a para los que esta ecuación tiene solución.

b) Calcula B en el caso $a = 1$.

(7) Una matriz 2×2 se dice que es triangular si el primer elemento de su segunda fila es 0. Encuentra todas las matrices triangulares B tales que $B \cdot B^t = \begin{pmatrix} 27 & 4 \\ 4 & 8 \end{pmatrix}$.

(8) Comprueba razonadamente que:

a) Si el producto de dos matrices cuadradas A y B es conmutativo, entonces se deduce que el producto de los cuadrados de dichas matrices es igual al cuadrado del producto de dichas matrices.

b) La matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & 10 \\ 0 & -3 & 7 \end{pmatrix}$ satisface la relación $A^2 - 3 \cdot A + 2 \cdot I = O$, siendo I y O, respectivamente, las matrices de orden 3×3 unidad y nula.

c) Calcula razonadamente escribiendo todos los pasos del razonamiento utilizado, los valores a y b que hacen que $A^2 = a \cdot A + b \cdot I$, sabiendo que la matriz A verifica la igualdad $A^2 = 3 \cdot A + 2 \cdot I$.

(9) a) Calcula las matrices reales cuadradas de orden 3, X e Y, que satisfacen las ecuaciones: $\begin{cases} 2 \cdot X + Y = B \\ X - 2Y = C \end{cases}$ donde:

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad C = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

b) Si X e Y son las matrices anteriores, calcula $(2 \cdot X + Y) \cdot X - (2 \cdot X + Y) \cdot (2Y)$.

(10) Calcula todos los valores reales x, y, z, t para los cuales se verifica $A \cdot X = X \cdot A$, donde

$$X = \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix} \quad y \quad A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$$

(11) Tenemos las matrices $A=\begin{pmatrix}-1 & -1 & 2\\ 3 & -5 & 6\\ 1 & -1 & 0\end{pmatrix}$ e $I=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$

a) Calcula la matriz inversa de A.
b) Calcula la matriz $B = A\cdot(A + 4\cdot I)$.
c) Determina los números reales que cumplen: $A^{-1} = x\cdot A + y\cdot I$, $A^2 = z\cdot A + t\cdot I$,

(12) Sean las matrices: $A=\begin{pmatrix}-1 & 2 & 1\\ y & 3 & 5\end{pmatrix}$ y $B=\begin{pmatrix}-1 & x & 1\\ 3 & z & x+z\end{pmatrix}$ dos matrices de orden (2×3) en las que x, y y $z \in \mathbb{R}$ denotan valores numéricos desconocidos. a) Determina, razonadamente, los valores de x, y y $z \in \mathbb{R}$ de manera que $B = A$.
b) ¿Es posible el cálculo de $A \times B$? Razona la respuesta

(13) Sea $6\cdot A + 2\cdot I = B$ una expresión matricial, donde B denota la matriz cuadrada de orden (2×2): $B=\begin{pmatrix}6 & 1\\ 3 & -1\end{pmatrix}$ e I es la matriz identidad de orden correspondiente: a) ¿Qué dimensión tiene la matriz A? b) Determina los elementos que integran la matriz A, esto es, $a_{ij} \in A_{\times q}$. c) Calcula $A+2\cdot I$.

(14) Sean A y B dos matrices desconocidas. Resuelve el siguiente sistema de ecuaciones:

$$2A+B=\begin{pmatrix}5 & 12 & 7\\ 4 & 2 & 7\end{pmatrix} \qquad 3A+2B=\begin{pmatrix}11 & 25 & 0\\ 20 & 10 & 35\end{pmatrix}$$

(15) Sean X e Y dos matrices desconocidas. Resuelve el siguiente sistema de ecuaciones:

$$5X+3Y=\begin{pmatrix}2 & 0\\ -4 & 15\end{pmatrix} \qquad 3X+2Y=\begin{pmatrix}1 & -1\\ -2 & 9\end{pmatrix}$$

(16) Se llama "traza" de una matriz a la suma de los elementos de su diagonal principal. Halla A, matriz de tamaño (2×2), sabiendo que la traza de $A\cdot A^t$ es cero.

(17) Sea A una matriz que tiene tres filas; sea B la matriz que resulta de sustituir en A la 1ª fila por la suma de las otras dos. ¿Qué debe ocurrir entre las filas de A para que A y B tengan el mismo rango?

(18) Dadas las matrices $A=\begin{pmatrix}5 & 2 & 0\\ 2 & 5 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$ $B=\begin{pmatrix}a & b & 0\\ c & c & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$ se pide: a) Encontrar las condiciones que deben cumplir a, b y c para que se verifique $A\cdot B = B\cdot A$. b) Para $a = b = c = 1$, calcular B^{10}.

(19) Denotamos por M^t a la matriz traspuesta de una matriz M. Considera: $A=\begin{pmatrix}1\\ 2\\ -1\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}1 & 4 & 3\end{pmatrix}$, $C=\begin{pmatrix}0 & 4 & -3\\ -2 & 9 & -6\\ 1 & -4 & 4\end{pmatrix}$

a) Calcula $(A\cdot B)^t$ y $(B\cdot A)^t$. b) Determina una matriz X que verifique la relación $\frac{1}{2}X+(A\cdot B)^t=C$.

RESUMEN

Definición de matriz	Tabla de números ordenados	$\begin{pmatrix} 5 & -2 & 0 \\ 3 & 4 & -7 \end{pmatrix}$
Dimensión de una matriz	El número de filas (*m*) y el número de columnas (*n*)	La dimensión de la matriz anterior es 2 × 3.
Igualdad de matrices	Dos matrices son iguales si tienen la misma dimensión y si los términos que ocupan la misma posición son iguales	$A = B \Rightarrow a_{ij} = b_{ij} \ \forall\ i,j$
Tipos de matrices	Matriz fila: $\begin{pmatrix} 31 & 4 & -5 \end{pmatrix}$ Matriz columna: $\begin{pmatrix} -5 \\ 7 \end{pmatrix}$ Matriz triangular de dimensión 2 × 2: $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$ Matriz diagonal: $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}$ Matriz escalar: $\begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}$ Matriz unidad: $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$	
Suma de matrices	Se suman los elementos que ocupan la misma posición: $C = A + B \Rightarrow c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$	$\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 5 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 4 & 8 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & 8 \\ 1 & 7 \end{pmatrix}$
Producto de un real por una matriz	Es otra matriz de elementos los de la matriz multiplicados por el número: $kA = k(a_{ij}) = (ka_{ij})$	$3 \cdot \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & 3 \\ 12 & 15 \end{pmatrix}$
Producto de matrices	$\left.\begin{matrix} A = (a_{ij}) \\ B = (bij) \end{matrix}\right\} \rightarrow C = A \cdot B = (a_{ij})(b_{ij}) = (c_{ij}) \ \Big\vert\ c_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} \cdot b_{kj}$	$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1\cdot 2+0\cdot 4 & 1\cdot 1+0\cdot 5 \\ 2\cdot 2+3\cdot 4 & 2\cdot 1+3\cdot 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 16 & 17 \end{pmatrix}$
Matriz inversa	$A \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot A = I$	$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow A^{-1} = \begin{pmatrix} -1/13 & 3/13 \\ 5/13 & -2/13 \end{pmatrix}$
Matriz traspuesta	Se obtiene cambiando filas por columnas.	$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow A^t = \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$
Rango de una matriz	Número de filas o columnas de la matriz que son **linealmente independientes**, es decir, que no pueden obtenerse a partir de las demás filas o columnas de la misma matriz.	El rango de la matriz $\begin{pmatrix} 6 & 3 \\ 12 & 6 \end{pmatrix}$ es 1.

CAPÍTULO 2: DETERMINANTES.

ACTIVIDADES PROPUESTAS

1. CONCEPTO DE DETERMINANTE

1. Calcula los siguientes determinantes: a) $\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix}$ b) $\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ -3 & 2 \end{vmatrix}$ c) $\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 0 \end{vmatrix}$
2. Calcula los siguientes determinantes: a) $\begin{vmatrix} 3 & 1 & 0 \\ -2 & 1 & 2 \\ 3 & -2 & -2 \end{vmatrix}$ b) $\begin{vmatrix} -1 & 0 & 2 \\ -2 & 0 & 5 \\ 4 & -2 & -2 \end{vmatrix}$ c) $\begin{vmatrix} 4 & 1 & 0 \\ -2 & 3 & 2 \\ 0 & -1 & -2 \end{vmatrix}$

2. PROPIEDADES DE LOS DETERMINANTES

3. Comprueba qué ocurre en un determinante de orden tres cuando haces dos permutaciones de filas.
4. Comprueba qué ocurre en un determinante de orden dos cuando haces una permutación de filas seguida de una permutación de columnas.
5. Comprueba qué ocurre en un determinante de orden tres cuando haces dos permutaciones de filas.
6. Comprueba qué ocurre en un determinante de orden tres cuando haces una permutación de filas seguida de una permutación de columnas.
7. Razona por qué esta propiedad puede deducirse de la propiedad número 5.
8. Comprueba en un determinante de orden 3 que la propiedad se verifica también cuando hay dos columnas iguales. Hazlo de dos formas diferentes: desarrollando el determinante y utilizando la propiedad del determinante de la matriz traspuesta.
9. Demuestra esta propiedad para determinantes de orden tres.
10. Comprueba que el valor del segundo determinante, obtenido del primero con la transformación indicada, es el mismo que el del determinante de partida.

$$\begin{vmatrix} 6 & 1 & 5 \\ 7 & -2 & 1 \\ -4 & -3 & 0 \end{vmatrix} \xrightarrow[C_3=C_3+C_1+2C_2]{} \begin{vmatrix} 6 & 1 & 13 \\ 7 & -2 & 4 \\ -4 & -3 & -10 \end{vmatrix}$$

11. Comprueba esta propiedad para las siguientes matrices cuadradas de orden tres: a) $A=\begin{pmatrix} 6 & 1 & 5 \\ 7 & -2 & 1 \\ -4 & -3 & 0 \end{pmatrix}$ y $B=\begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & -1 \\ 2 & -2 & 0 \end{pmatrix}$; b) $A=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ y $B=\begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$; c) $A=\begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & -2 \\ 2 & -1 & 0 \end{pmatrix}$ y $B=\begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & -1 \\ 2 & -2 & 0 \end{pmatrix}$
12. Razona si es posible que para dos matrices A y B existan los productos $A\cdot B$ y $B\cdot A$, pero no se verifique que $|A\cdot B| = |B\cdot A|$.
13. Dadas dos matrices A y B, cuadradas y de igual dimensión, razona si las siguientes expresiones son ciertas o no:
    - a) $(A+B)^2=(A+B)\cdot(A+B)=A^2+B^2$
    - b) $(A+B)^2=A^2+B^2+2\cdot A\cdot B$
    - c) $(A-B)^2=(A-B)\cdot(A-B)=A^2-B^2$
    - d) $(A-B)^2=A^2+B^2-2\cdot A\cdot B$
    - e) $(A+B)\cdot(A-B)=A^2-B^2$
    - f) $|(A+B)^2|=|A|^2+|B|^2$
    - g) $|(A+B)^2|=|A|^2+|B|^2+2\cdot|A|\cdot|B|$
    - h) $|(A-B)^2|=|A|^2-|B|^2$
    - i) $|(A-B)^2|=|A|^2+|B|^2-2\cdot|A|\cdot|B|$
    - j) $|(A+B)\cdot(A-B)|=|A|^2-|B|^2$

3. CÁLCULO DE DETERMINANTES POR LOS ELEMENTOS DE UNA LÍNEA

14. Calcula por adjuntos el valor de este determinante: $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & -1 & -2 & -3 \\ 0 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{vmatrix}$

15. Halla el valor de a que verifica: $\begin{vmatrix} 1 & -38 & 53 & -78 \\ 0 & -4 & 87 & -39 \\ 0 & 0 & a & 93 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{vmatrix} = 24$

16. Para las matrices A y B del ejemplo, determina:
   a) $|A|$ y $|B|$
   b) $[\mathrm{Adj}(A)]^t$ y $[\mathrm{Adj}(B)]^t$
   c) $A\cdot[\mathrm{Adj}(A)]^t$ y $B\cdot[\mathrm{Adj}(B)]^t$
   ¿Qué observas?

17. a) Calcula la matriz adjunta de:

$$C = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

   b) Halla $|C|$, $[\mathrm{Adj}(C)]^t$ y efectúa el producto $C\cdot[\mathrm{Adj}(C)]^t$.
   c) ¿Qué observas?

4. MATRIZ INVERSA

18. Comprueba para los ejemplos anteriores que $A\cdot A^{-1} = I$ y $B\cdot B^{-1} = I$

EJERCICIOS Y PROBLEMAS.

1.- Calcula los determinantes de las siguientes matrices:

a) $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ b) $\begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}$ c) $\begin{pmatrix} a & -5 \\ 5 & b \end{pmatrix}$ d) $\begin{pmatrix} a & b \\ b & a \end{pmatrix}$ e) $\begin{pmatrix} m^2 & m \\ m & 1 \end{pmatrix}$ f) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

g) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 3 & 4 & 5 \end{pmatrix}$ h) $\begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 0 & 3 & 4 \\ -4 & 1 & 5 \end{pmatrix}$ i) $\begin{pmatrix} a & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 \\ 1 & 1 & a \end{pmatrix}$ j) $\begin{pmatrix} m & 1 & 3 \\ 1 & -1 & -1 \\ 5 & -3 & m \end{pmatrix}$

2.- Prueba, sin desarrollarlos, que los determinantes de las siguientes matrices son nulos:

a) $\begin{pmatrix} 1 & a & b+c \\ 1 & b & c+a \\ 1 & c & a+b \end{pmatrix}$ b) $\begin{pmatrix} a & c+d & b \\ a & b+d & c \\ a & b+c & d \end{pmatrix}$

3.- Demuestra sin desarrollar que los determinantes $\begin{vmatrix} 1 & 5 & 2 \\ 2 & 2 & 8 \\ 0 & 5 & 5 \end{vmatrix}$ y $\begin{vmatrix} 6 & 3 & 0 \\ 9 & 2 & 5 \\ 4 & 0 & 5 \end{vmatrix}$ son múltiplos de 15.

4.- Prueba sin desarrollar que los determinantes siguientes son múltiplos de 11: a) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 9 & 8 \\ 5 & 0 & 6 \end{vmatrix}$ b) $\begin{vmatrix} 1 & 9 & 1 & 3 \\ 2 & 6 & 1 & 8 \\ 2 & 2 & 1 & 3 \\ 1 & 5 & 1 & 9 \end{vmatrix}$

5.- Comprueba, a partir de las propiedades de los determinantes, que $A_1 = 0$ y que $A_2 = \dot{5}$.

$$A_1 = \begin{vmatrix} -8 & 25 & 40 \\ 2/5 & 3 & -2 \\ 0 & 27 & 0 \end{vmatrix} \qquad A_2 = \begin{vmatrix} 5 & 2 & 1 \\ 4 & 7 & 6 \\ 6 & 3 & 9 \end{vmatrix}$$

6.- Sabiendo que: $\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} = 3$ calcula, sin desarrollar, el valor de $\begin{vmatrix} -i & -g & -h \\ f+c & d+a & e+b \\ 3c & 3a & 3b \end{vmatrix}$

7.- Sabiendo que $\begin{vmatrix} a & b & c \\ p & q & r \\ x & y & z \end{vmatrix} = -2$ calcula sin desarrollar:

$$\begin{vmatrix} a & c & b \\ 2x & 2z & 2y \\ -3p & -3r & -3q \end{vmatrix} = \qquad \begin{vmatrix} x & a-3p & -2a \\ y & b-3q & -2b \\ z & c-3r & -2c \end{vmatrix} = \qquad \begin{vmatrix} x-2p+3a & a & -3p \\ z-2r+3c & c & -3r \\ y-2q+3b & b & -3q \end{vmatrix} =$$

8.- ¿Cuál será el orden de una matriz cuadrada A si sabemos que su determinante vale -5 y que el determinante de la matriz $3 \cdot A^t$ vale -1215?

9.- Justifica, sin realizar cálculo alguno, que $\begin{vmatrix} x & y & z \\ x^2 & y^2 & z^2 \\ x^3 & y^3 & z^3 \end{vmatrix} = x \cdot y \cdot z \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x & y & z \\ x^2 & y^2 & z^2 \end{vmatrix}$

10.- Dadas las matrices A y B de orden 4×4 con $|A| = 3$ y $|B| = 2$, calcula $|A^{-1}|$, $|B^t A|$ y $|(AB^{-1})^t|$.

11.- Obtén, en función de a, b y c el valor del determinante: $\begin{vmatrix} a & a & a \\ a+b & a & a \\ a & a+c & a \end{vmatrix}$

12.- Demuestra que: $\begin{vmatrix} 1+a & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1-a & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1+b & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1-b \end{vmatrix} = a^2 \cdot b^2$ y $\begin{vmatrix} a & 1 & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 & 1 \\ 1 & 1 & a & 1 \\ 1 & 1 & 1 & a \end{vmatrix} = (a-1)^3 \cdot (a+3)$

13.- Dada la matriz $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -3 \\ 3 & 2 & 0 \\ 1 & -2 & 4 \end{pmatrix}$ se pide:

a) Calcula: $|A|$; α_{32} ; α_{13} ; A_{22} ; A_{12}

b) Resuelve la siguiente ecuación: $|A| \cdot x + A_{23} + 3\alpha_{11} = -2 + A_{13} \cdot x$

14.- Sea una matriz simétrica $A \in \mathcal{M}_{3x3}$ cuyo determinante es $-\frac{1}{3}$. Comprueba si es verdadero o falso

$\lvert -3A \rvert = 9$	$\dfrac{\lvert A \cdot A^t \rvert}{3} = 3^{-3}$	$A^3 \notin \mathcal{M}_{3x3}$	$4\lvert A \rvert - 7\lvert A^t \rvert = 1$	$2A \in \mathcal{M}_{6x6}$
$\lvert 4A - A^t \rvert = -3^2$	$\lvert A^{-1} \rvert = -3^{-1}$	$\dfrac{\lvert 3A - A^t \rvert}{\lvert 3A^t + A \rvert} = (-2)^{-3}$	$\dfrac{1}{9}\lvert A^{-1} \rvert - 6\lvert A^t \rvert^2 = 1$	$\lvert 3^{-2} A^t \rvert = -\dfrac{1}{3^7}$

Si son falsas, indica la respuesta correcta.

15.- Sean las matrices A y $B \in \mathcal{M}_{3x3}$ tales que $|A| = -3^{-2}$ y $|B| = 3$. Con estos datos calcula de forma razonada: $|A^{-1}|$; $|B^{-1}|$; $|A| \cdot |B|^{-1}$; $|3B^{-1} \cdot A|$; $|3A \cdot B^t|$; $\left|(B^{-1} \cdot A^{-1})^t\right|$

16. - Sean F_1, F_2, F_3 y F_4 las cuatro filas de una matriz cuadrada A, cuyo determinante vale -2. Se pide calcular de forma razonada:

a) El determinante de la matriz $-\dfrac{3A}{2}$.

b) El determinante de la matriz inversa de A.

c) El determinante de la matriz $\dfrac{A^2}{6}$.

d) El determinante de una matriz cuyas filas son: $2F_2, -3F_1 + 4F_3, -F_4, 2F_3$.

17.- Para los determinantes $A_1 = \begin{vmatrix} a & b & b \\ b & a & b \\ b & b & a \end{vmatrix}$ $A_2 = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ a & b \end{vmatrix}$ $A_3 = \begin{vmatrix} a & b & c & d \\ -a & b & -c & d \\ a & b & 0 & 1 \\ a^2 & b & -1 & 0 \end{vmatrix}$

a) Halla los menores complementarios de los elementos α_{11}, α_{23}, α_{32} y α_{12}, cuando existan.
b) Halla los adjuntos de dichos elementos, cuando existan.

18.- a) La matriz A verifica $A^2 = A$. Halla los posibles valores del determinante de A.

b) La matriz A verifica que $A \cdot A^t = I$. Halla los posibles valores del determinante de A.

19.- Dada la matriz $A = \begin{pmatrix} -3 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & -3 \\ -2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ calcula el determinante de la matriz A de las siguientes maneras:

a) Aplicando la regla de Sarrus.
b) Desarrollando por los elementos de la 3ª fila y de la 2ª columna.

20.- Dadas las matrices $A=\begin{pmatrix}-3 & 1 & 3\\ 1 & 2 & -1\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}2 & 3\\ 0 & -1\\ 1 & -3\end{pmatrix}$ y $C=\begin{pmatrix}2 & -2 & 0\\ -3 & 1 & 2\\ 1 & -1 & 3\end{pmatrix}$ se pide calcular el valor de los siguientes determinantes: $|A\cdot B|$; $|C|$; $|A^t\cdot B^t|$; $|C\cdot B\cdot A|$; $|C|^2$.

21. - Resuelve las siguientes ecuaciones: a) $\begin{vmatrix}1 & 2 & x\\ -1 & 3 & 2\\ 2 & 0 & 3\end{vmatrix}=2-3x$ b) $\begin{vmatrix}2 & -1 & 2\\ -1 & x & -3\\ x & 1 & 4\end{vmatrix}+5=5x-3$

22.- Resuelve las siguientes ecuaciones: a) $\begin{vmatrix}3 & x & 2\\ x & 2 & 3\\ 2 & 3 & x\end{vmatrix}=0$ b) $\begin{vmatrix}2 & -3 & x\\ -1 & 1 & 2\\ -x & 2 & 3\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}-x & 3\\ 1 & 2x\end{vmatrix}=11$

23.- Resuelve la siguiente ecuación $|A-x\cdot I|=0$, siendo $A=\begin{pmatrix}-1 & 0 & 0\\ 3 & 2 & 1\\ -2 & 1 & 2\end{pmatrix}$ e I la matriz unidad.

24.- Halla los determinantes de las siguientes matrices:

$A=\begin{pmatrix}1 & 4\\ 2 & 3\end{pmatrix}$ $B=\begin{pmatrix}1 & 1\\ 0 & 3\end{pmatrix}$ $D=\begin{pmatrix}1 & 1 & 2\\ 3 & 0 & 1\\ 2 & 1 & 0\end{pmatrix}$ $E=\begin{pmatrix}-1 & 3 & -2\\ 0 & -1 & 2\\ 1 & 4 & 2\end{pmatrix}$

$F=\begin{pmatrix}2 & 1 & -1\\ 3 & -2 & -2\\ 1- & 2 & 0\end{pmatrix}$ $G=\begin{pmatrix}2 & 1 & 3\\ 0 & -1 & -5\\ 0 & 0 & 2\end{pmatrix}$ $H=\begin{pmatrix}1 & 2 & 1 & 2\\ 3 & 0 & 0 & 1\\ 0 & 2 & 1 & 0\\ -1 & 2 & 3 & 1\end{pmatrix}$ $J=\begin{pmatrix}-1 & 3 & 0 & 2\\ 0 & -2 & 3 & 1\\ 2 & 1 & -4 & 2\\ -1 & 5 & -2 & 3\end{pmatrix}$

25.- Aplicando propiedades, calcular el valor del determinante: $|A|=\begin{vmatrix}-2 & -3 & 0 & 2\\ -3 & 1 & 2 & 1\\ 0 & -2 & -1 & 3\\ -1 & 4 & 2 & 0\end{vmatrix}$

a) Indicando los pasos a realizar, hasta llegar a uno de orden 2.
b) Desarrollando por los elementos de una línea.

26. - Comprobar el valor de los siguientes determinantes: $\begin{vmatrix}3 & -2 & 2 & -3\\ -2 & 0 & 3 & 1\\ 4 & 1 & -2 & 3\\ 2 & 3 & 0 & 4\end{vmatrix}=137$; $\begin{vmatrix}2 & 1 & 3 & 2\\ 1 & -2 & 1 & 2\\ -3 & 2 & -2 & 1\\ -1 & 3 & 0 & -3\end{vmatrix}=27$

27.- Calcula el determinante: $\begin{vmatrix}1 & 8 & 0 & 0 & -7\\ -2 & -3 & 0 & 4 & 1\\ 0 & 5 & 0 & 0 & -2\\ 3 & 6 & 7 & 1 & 2\\ 0 & -3 & 0 & 0 & 0\end{vmatrix}$

28.- Calcula los determinantes siguientes: a) $\begin{vmatrix}1 & 3 & -2 & 5\\ 5 & 0 & 3 & 1\\ 2 & 5 & 6 & 3\\ -1 & 2 & 3 & 2\end{vmatrix}$ b) $\begin{vmatrix}1 & 1 & 1 & 1 & 1\\ -1 & x & 1 & 1 & 1\\ -1 & -1 & x & 1 & 1\\ -1 & -1 & -1 & x & 1\\ -1 & -1 & -1 & -1 & x\end{vmatrix}$

29. - Resuelve las siguientes ecuaciones: a) $\begin{vmatrix} 3 & -1 & x \\ 5 & 2x & 7 \\ -1 & 3 & x \end{vmatrix} = 5x + 6$ b) $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 4 \\ 0 & x & 4 \\ -1 & 3 & x \end{vmatrix} = 0$

30.- Resuelve las siguientes ecuaciones: a) $\begin{vmatrix} x & -1 & 2x \\ 8 & x-1 & 5 \\ -2 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 67$ b) $\begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 \\ x-1 & 0 & x+3 \\ 1 & x-2 & 4 \end{vmatrix} = 1 - 7x$

31.- Halla las matrices inversas de las matrices: a) $\begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 5 \end{pmatrix}$ b) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & -5 & 1 \\ 5 & 0 & 4 \end{pmatrix}$ c) $\begin{pmatrix} 1 & c & b \\ 1 & a & c \\ 1 & b & c \end{pmatrix}$

32.- Dada la matriz $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$. a) Halla la matriz inversa de A. b) Comprueba que $A \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot A = I$. c) Halla una matriz X tal que $AX = B$, siendo $B = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$

33.- Sean las matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

a) Calcula la matriz inversa de $A \cdot B$.
b) Halla el producto de la inversa de B por la inversa de A. ¿Qué relación existe entre la matriz del apartado anterior y esta matriz? Justifica la respuesta.

34.- Siendo las matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 & -2 \\ 2 & 2 & 1 & -4 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -1 \\ 0 & 3 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$.

a) ¿Es cierto que $\det(A \cdot B) = \det(B \cdot A)$?
b) Calcula, si es posible, la inversa de $A \cdot B$.

35. - Dada la matriz $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & t \\ -t & 0 & -1 \\ -2 & -1 & 3 \end{pmatrix}$ halla los valores de t para los cuales A no tiene inversa.

36.- Dada la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ -2 & -\lambda & 0 \\ \lambda & 1 & 1 \end{pmatrix}$, averigua para qué valores de λ existe A^{-1}, y calcúlala para $\lambda = -3$.

37.- Calcula la matriz inversa de $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

38.- Dada la matriz $M = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 3 \\ 2 & 1 & -2 \end{pmatrix}$

a) Comprueba si es una matriz regular o inversible. En caso afirmativo, halla su inversa.
b) Descompón la matriz M en suma de dos matrices, una simétrica y otra antisimétrica.
c) Descompón $|M|$ en suma de dos determinantes $|P|$ y $|Q|$, tales que sus elementos sean <u>todos no nulos</u> y que el valor de uno de ellos sea <u>nulo</u>.
d) Comprueba si: $|M| = |P| + |Q|$ y $|M| = |P| \cdot |Q|$
e) Resuelve la ecuación: $\alpha_{13} x^2 - |M| x + 4A_{32} = 2$

39.- ¿Para qué valores de a la matriz $\begin{pmatrix} a & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & a & 0 \end{pmatrix}$ no tiene inversa? Halla la inversa para $a = 2$.

40.- a) ¿Para qué valores del parámetro a no es invertible la matriz A? $A = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 7 \\ 1 & 3 & 2 \\ a & -2 & 5 \end{pmatrix}$

b) Para los valores de a encontrados calcular los determinantes de $A \cdot A^t$ y de $A^t \cdot A$.

41.- Sea C la matriz $\begin{pmatrix} 2 & -1 & m \\ 1 & 0 & -1 \\ -2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

a) ¿Para qué valores de m no tiene inversa la matriz C?
b) Calcula la inversa de C para $m = 2$.

42.- Dada la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & x & 3 \\ 4 & 1 & -x \end{pmatrix}$ donde x es un número real, halla:

a) Los valores de x para los que la matriz A posea inversa.
b) La inversa de A para $x = 2$.
c) Con $x = 5$, el valor $b \in \mathbb{R}$ para que la matriz $b \cdot A$ tenga determinante 1.

43.- Dadas las matrices A, B y $C \in \mathcal{M}_{3x3}$, plantea la resolución de las siguientes ecuaciones utilizando la matriz inversa:

a) $X \cdot A = B$ b) $B \cdot X - 2B = 3X$ c) $A \cdot X \cdot C = 2B^t + A$

44.- Calcula todas las matrices diagonales de orden dos que coinciden con su inversa. Si A es una de esas matrices, calcula su cuadrado.

45.- a) Halla, si existe, la matriz inversa de M. $M = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ -1 & -2 & -2 \end{pmatrix}$

b) Calcula la matriz X que cumple $X \cdot M + M = 2M^2$

46.- Dadas las matrices: $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$ $C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & a \\ 2 & a & 1 \\ 2 & 2 & 0 \end{pmatrix}$ $D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 2 & -1 & -1 \end{pmatrix}$

a) ¿Qué valores de a hacen singular la matriz C?
b) ¿Qué dimensiones debe tener la matriz B para que la ecuación $A \cdot B \cdot C = D$ tenga sentido?
c) Calcula B para el valor $a = 1$.

47.- Resuelve las siguientes ecuaciones: a) $\begin{vmatrix} 5 & x & -2 \\ 4 & 3 & 9 \\ 1 & 0 & 7 \end{vmatrix} = 0$ b) $\begin{vmatrix} x-1 & 2 & 2 \\ 2 & x-1 & 2 \\ 1 & 1 & x-2 \end{vmatrix} = 0$ c) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & x \\ 2 & x & 2 & 2 \\ 3 & 5 & x & 3 \\ 4 & 4 & 4 & x+3 \end{vmatrix} = 0$

48.- Halla el rango de las siguientes matrices: a) $\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$ b) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 2 \\ 2 & -1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$ c) $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ d) $\begin{pmatrix} 3 & 4 & 4 & 0 \\ 1 & 3 & 2 & -2 \\ 2 & 1 & 2 & 2 \end{pmatrix}$

49. - Halla el rango de las siguientes matrices: $A=\begin{pmatrix}3&1&2&0&1\\6&2&4&0&2\end{pmatrix}$ $B=\begin{pmatrix}1&2&3&0\\2&-1&4&0\\3&2&2&1\end{pmatrix}$ $C=\begin{pmatrix}1&2&3&4&5\\-1&3&0&-2&4\\3&6&9&12&15\\0&5&3&2&9\end{pmatrix}$

50.- Halla el rango de las matrices en función del parámetro: a) $\begin{pmatrix}a&1\\1&1\end{pmatrix}$ b) $\begin{pmatrix}a&0&4\\3&0&6\end{pmatrix}$ c) $\begin{pmatrix}1&3&0\\1&a&-1\\0&2&a\end{pmatrix}$ d) $\begin{pmatrix}1&a&1\\1&1&a\\a&1&1\end{pmatrix}$

51. - Determina el rango de las matrices siguientes en función del parámetro correspondiente:

$$A=\begin{pmatrix}x&3&0\\0&1&-x\\1&1&1\end{pmatrix}\qquad B=\begin{pmatrix}1&1&1&1\\3&0&0&-1\\1&x&x&1\end{pmatrix}\qquad C=\begin{pmatrix}0&1&-1\\3&3&2\\1&1&a\end{pmatrix}$$

52.- Dada la matriz $A=\begin{pmatrix}-x&1&1\\1&-x&1\\1&1&-x\end{pmatrix}$

a) Resuelve la ecuación $\det(A)=0$

b) Calcula el rango de la matriz A según los valores de x.

53. - Dadas las matrices $A=\begin{pmatrix}m&2&6\\2&m&4\\2&m&6\end{pmatrix}$ $B=\begin{pmatrix}2&2\\1&0\\-1&2\end{pmatrix}$

a) Discute el rango de A según los valores de m.

b) ¿Qué dimensiones debe tener la matriz X para que sea posible la ecuación $A\cdot X=B$?

c) Calcula X para $m=0$.

54.- Resuelve las ecuaciones:

a) $A\cdot X=B$ siendo $A=\begin{pmatrix}1&2\\2&5\end{pmatrix}$ y $B=\begin{pmatrix}4&-6\\2&1\end{pmatrix}$

b) $B\cdot X=C$, siendo $B=\begin{pmatrix}1&0&0\\2&1&0\\1&0&1\end{pmatrix}$ y $C=\begin{pmatrix}2&0&1\\1&3&0\\0&0&1\end{pmatrix}$

c) $A\cdot X=B+2C$ siendo $A=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&2&0\\1&0&3\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}1&0&-1\\0&0&0\\9&3&-3\end{pmatrix}$ y $C=\begin{pmatrix}1&1&1\\2&3&0\\3&4&5\end{pmatrix}$

d) $A\cdot X+B=2C$ siendo $A=\begin{pmatrix}2&0\\1&-1\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}3&1&0\\-1&2&1\end{pmatrix}$ y $C=\begin{pmatrix}4&-1&2\\0&0&1\end{pmatrix}$

AUTOEVALUACIÓN

Dadas las matrices $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 7 & 4 \\ 0 & -2 & -2 & -3 \\ 0 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$

1.- El valor del determinante de la matriz *A* es:

a) 4 b) 0 c) –4 d) 8

2.- El adjunto B_{23} del determinante de la matriz *B* es:

a) 0 b) $\begin{pmatrix} 0 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$ c) –4 d) $-\begin{pmatrix} 0 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$

3.- El valor del determinante de la matriz *B* es:

a) 4 b) 0 c) 8 d) –8

4.- El rango de *B* es: a) 1 b) 2 c) 3 d) 4

5.- La matriz inversa de *A* es:

a) $\begin{pmatrix} 3 & -1 & -1 \\ -1 & 3 & -1 \\ -1 & -1 & 3 \end{pmatrix}$ b) $\begin{pmatrix} 3/4 & 1/4 & -1/4 \\ 1/4 & 3/4 & 1/4 \\ -1/4 & 1/4 & 3/4 \end{pmatrix}$ c) $\begin{pmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 1 & 3 & 1 \\ -1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$ d) $\begin{pmatrix} 3/4 & -1/4 & -1/4 \\ -1/4 & 3/4 & -1/4 \\ -1/4 & -1/4 & 3/4 \end{pmatrix}$

Dadas las matrices: $C = \begin{pmatrix} 3 & 3 & 3 \\ 3 & 3 & 3 \\ 3 & 3 & 3 \end{pmatrix}; D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}; E = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 0 & 1 \\ 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}; F = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 4 \end{pmatrix}$

6.- La matriz inversa de la matriz *F* es:

$a)\ F^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 11 & -3 \\ 0 & -4 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ $b)\ F^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 11 & 4 & 1 \\ 3 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ $c)\ F^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$ $d)\ F^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 12 & 4 & 1 \\ 3 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

7.- El rango de la matriz *C* es:

a) 3 b) 2 c) 1 d) no tiene

8.- La matriz de determinante nulo es:

a) C b) D c) E d) F

9.- El determinante de la matriz 5*CD* vale:

a) 5 b) 0 c) 15 d) 1

10.- El rango de la matriz *CF* es:

a) 3 b) 2 c) 1 d) no tiene

Apéndice: Problemas de determinantes en la P.A.U.

(1) Considera las matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ x & 1 & -1 \\ 2 & 1 & -x \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$, $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

a) ¿Puede existir una matriz C de forma que se puedan realizar los productos $A \cdot C$ y $C \cdot B$? Si es posible, proporciona un ejemplo. Si no es posible, explica por qué.

b) Calcula $(B - I)^2$.

c) Determina los valores de x que verifican $|A| = -7|I|$

(2) Dados los números reales a, b, c y d, se considera la matriz $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$. Prueba que el polinomio $p(x) = \det(A - x \cdot I_2)$ es $p(x) = x^2 - \mathrm{tr}(A) \cdot x + \det(A)$, donde $\mathrm{tr}(A)$ es la traza de la matriz A, es decir, la suma de los elementos de la diagonal de A.

(3) Considera la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & -1 \end{pmatrix}$

a) Halla el determinante de la matriz A.

b) Halla el determinante de la matriz $3 \cdot A$.

c) Halla el determinante de la matriz $(3 \cdot A)^3$.

(4) Dadas las matrices cuadradas $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ y $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 2 \\ -3 & -3 & -2 \end{pmatrix}$

a) Calcula las matrices $(A - I)^2$ y $A \cdot (A - 2 \cdot I)$.

b) Justifica razonadamente que

b.1) Existen las matrices inversas de las matrices A y $(A - 2 \cdot I)$.

b.2) No existe la matriz inversa de la matriz $(A - I)$.

c) Determina el valor del parámetro real λ para el que se verifica que $A^{-1} = \lambda \cdot (A - 2 \cdot I)$.

(5) Considera la matriz

$$A = \begin{pmatrix} \sec\theta & \mathrm{tg}\,\theta & 0 \\ \mathrm{tg}\,\theta & \sec\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

a) Estudia para qué valores de t la matriz A tiene inversa.

b) Busca, si es posible, la matriz inversa de A cuando $\theta = \frac{\pi}{4}$

(6) Se dan las matrices $A = \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$, $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ y M, donde M es una matriz de dos filas y dos columnas que verifica que $M^2 = M$. Obtén razonadamente:

a) Todos los valores reales k para los que la matriz $B = A - k\,I$ tiene inversa.

b) La matriz inversa B^{-1} cuando $k = 3$.

c) Las constantes reales α y β para las que se verifica que $\alpha\, A^2 + \beta\, A = -2\, I$.

d) Comprueba razonadamente que la matriz $P = I - M$ cumple las relaciones: $P^2 = P$ y $M\,P = P\,M$.

(7) Dado el número real a se considera la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & a & 1 \\ 1-a & 1 & 2 \\ a & a^2 & -1 \end{pmatrix}$

a) Obtén los valores del número real a para los que la matriz A tiene inversa.

b) Busca, si es posible, la matriz inversa de A cuando $a = 0$.

(8) Se considera la matriz $A = \begin{pmatrix} -x & 1 & 0 \\ 0 & -x & 1 \\ c & b & a-x \end{pmatrix}$

a) Obtén el polinomio $p(x) = \det(A)$.

b) Si $c = 0$, busca las raíces de $p(x)$ dependiendo de a y b.

(9) Se consideran las matrices: $A=\begin{pmatrix}2 & 1 & -1\\ 0 & 1 & 2\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$ y $B=\begin{pmatrix}1 & -1 & 0\\ 2 & 0 & 3\end{pmatrix}$

a) Calcula, si es posible, la matriz inversa de la matriz A.
b) Resuelve, si es posible, la ecuación matricial $X \cdot A = B$.

(10) Utilizando las propiedades de los determinantes:

a) Verifica que: $\begin{vmatrix}a-2 & 4 & 3\\ 1 & a+1 & -2\\ 0 & 0 & a-4\end{vmatrix}=(a-3)\cdot(a-4)\cdot(a+2)$

b) Calcula: $\begin{vmatrix}1 & 1 & 2 & 3\\ 0 & 3 & 5 & 1\\ 2 & 2 & 4 & 7\\ 0 & 3 & 0 & 2\end{vmatrix}$

(11) Sea $A=\begin{pmatrix}0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\\ 1 & 0 & 0\end{pmatrix}$

a) Calcula su inversa, si existe.
b) Encuentra la regla de cálculo de las sucesivas potencias A^n de A.
c) Resuelve la ecuación $x\cdot\left(A^4+A^2-A\right)=\begin{pmatrix}2 & 3 & 2\\ 1 & 1 & 1\end{pmatrix}$

(12) Se considera una matriz cuadrada A de orden tres que verifica la ecuación $A^2 = 6 \cdot A - 9 \cdot I$, donde I es la matriz identidad.

a) Expresa A^4 como combinación lineal de I y A.
b) 1) Estudia si la matriz: $B=\begin{pmatrix}1 & 3 & 1\\ -2 & 6 & 1\\ 2 & -3 & 2\end{pmatrix}$ verifica la ecuación $B^2 = 6 \cdot B - 9 \cdot I$.

2) Determina si B tiene inversa y, si la tiene, calcúlala.

(13) Dada la matriz $A=\begin{pmatrix}-x & 1 & 1\\ 1 & -x & 1\\ 1 & 1 & -x\end{pmatrix}$

a) Resuelve la ecuación $\det(A) = 0$.
b) Calcula el rango de la matriz A según los valores de x.

(14) Sea $A=\begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix}$

a) Calcula las matrices que verifican la relación $|A| = |A + I|$ (I es la matriz identidad)
b) Calcula todas las matrices diagonales, que no poseen inversa y que verifican la relación anterior.
c) ¿Se verifica para cualquier par de matrices B y C la relación $|B + C| = |B| + |C|$? Si no es cierto pon un contraejemplo.

(15) Sea la matriz $\begin{pmatrix}2a & a & a & a\\ a & 2a & a & a\\ a & a & 2a & a\\ a & a & a & 2a\end{pmatrix}$

a) Calcula el valor de su determinante en función de a
b) Encuentra su inversa, si existe, cuando $a = 1$.

(16) Aplicando las propiedades de los determinantes (y sin desarrollar, ni aplicar la regla de Sarrus) responde razonadamente a las siguientes preguntas:

a) ¿Cómo varía el determinante de una matriz de orden 3 si se multiplica cada elemento a_{ij} de la matriz por 2^{i-j}?
b) La matriz, de orden 4, $A = (a_{ij})$ con $a_{ij} = i + j$, ¿tiene inversa?

(17) Aplicando las propiedades de los determinantes y sin utilizar la regla de Sarrus, calcula razonadamente las raíces de la ecuación polinómica: $p(x)=\begin{vmatrix} x & 1 & 1 & 1 \\ 1 & x & 1 & 1 \\ 1 & 1 & x & 1 \\ 1 & 1 & 1 & x \end{vmatrix}$ Enuncia las propiedades utilizadas.

(18) Dada la siguiente matriz de orden n: $A_n=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 & 1 \\ -1 & 9 & 1 & \dots & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 9 & \dots & 1 & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ -1 & -1 & -1 & \dots & -1 & 9 \end{pmatrix}$ se pide:

a) Calcular el determinante de la matriz A_2.
b) Calcular el determinante de la matriz A_3.
c) Calcular el determinante de la matriz A_5.

(19) Dada la matriz: $M=\begin{pmatrix} 2 & 1 & -a \\ 2a & 1 & -a \\ 2 & a & 1 \end{pmatrix}$

a) Determina el rango de M según los valores del parámetro a.
b) Determinar para qué valores de a existe la matriz inversa de M. Calcula dicha inversa para a = 2.

(20) Halla una matriz X tal que $A^{-1}\cdot X\cdot A=B$, siendo: $A=\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}$ $B=\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$

(21) Calcula los valores de b para los cuales la matriz A tiene inversa. $A=\begin{pmatrix} 2 & 1 & b \\ b+1 & 1 & b \\ 0 & 1 & -2 \end{pmatrix}$

(22) Resuelve la siguiente ecuación: $\begin{vmatrix} x & 2x+1 & 2x+1 \\ 2x+1 & 3x-1 & 4x \\ 3x-1 & 4x & 6x-1 \end{vmatrix}=0$

(23) Obtén razonadamente:

a) El determinante de una matriz cuadrada B de dos filas, que tiene matriz inversa y verifica la ecuación $B^2=B$.
b) El determinante de una matriz cuadrada A que tiene tres filas y que verifica la ecuación:

$$A^2-9\cdot\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$ sabiendo que el determinante de A es positivo.

(24) Dada la matriz $M=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & -1 \end{pmatrix}$ y se sabe que T es una matriz cuadrada de tres filas y tres columnas cuyo determinante vale $\sqrt{2}$. Calcula razonadamente los determinantes de las siguientes matrices, indicando explícitamente las propiedades utilizadas en su cálculo:

a) ½ T b) M^4 c) TM^3T^{-1}

(25) Dadas las matrices $A(x)=\begin{pmatrix} x+2 & 4 & 3 \\ x+2 & 6 & 2 \\ x+3 & 8 & 2 \end{pmatrix}$ y $B(y)=\begin{pmatrix} y+1 & 4 & 3 \\ y+2 & 6 & 2 \\ y+3 & 8 & 1 \end{pmatrix}$

a) Obtén razonadamente el valor de x para que el determinante de la matriz $A(x)$ sea 6.
b) Calcula razonadamente el determinante de la matriz $2A(x)$.
c) Demuestra que la matriz $B(y)$ no tiene matriz inversa para ningún valor real de y.

(26) Se da la matriz $A=\begin{pmatrix}-1 & 0 & 1\\ 0 & m & 0\\ 2 & 1 & m^2-1\end{pmatrix}$ donde m es un parámetro real.

a) Obtén razonadamente el rango o característica de la matriz A en función de los valores de m.
b) Explica por qué es invertible la matriz A cuando $m = 1$.
c) Obtén razonadamente la matriz inversa A^{-1} de A cuando $m = 1$, indicando los distintos pasos para la obtención de A^{-1}. Comprueba que los productos AA^{-1} y $A^{-1}A$ dan la matriz identidad.

(27) Dadas las matrices $A=\begin{pmatrix}-2 & 0 & 0\\ 1 & 1 & 0\\ 4 & 2 & -2\end{pmatrix}$ y $B=\begin{pmatrix}2 & 1 & 2\\ 0 & -1 & 5\\ 0 & 0 & 2\end{pmatrix}$

calcula razonadamente el valor de los determinantes siguientes escribiendo todos los pasos utilizados.

a) $|A+B|$ y $\frac{1}{2}\left|(A+B)^{-1}\right|$ b) $\left|(A+B)^{-1}A\right|$ y $\left|A^{-1}\cdot(A+B)\right|$ c) $\left|2ABA^{-1}\right|$ y $\left|A^3B^{-1}\right|$

(28) Dada la matriz $A(a)=\begin{pmatrix}1 & 2 & a-2\\ 4 & 3 & 2\\ a & a & -6\end{pmatrix}$

a) Calcula, en función de a, le determinante de la matriz $A(a)$, escribiendo los cálculos necesarios.
b) Determina, razonadamente, los números reales a, para los que el determinante de la matriz inversa $A(a)$ es igual a $\frac{1}{66}$.

(29) Dadas las matrices cuadradas $A=\begin{pmatrix}3 & 6 & 0\\ 0 & 3 & 2\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}18 & 48 & 12\\ 0 & 18 & 12\\ 0 & 0 & 6\end{pmatrix}$ e $I=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$

a) Justifica que la matriz A tiene inversa y obtener razonadamente la matriz inversa de A, incluyendo en la respuesta todos los pasos.
b) Calcula, razonadamente, el determinante de la matriz $3A^{-1}$, incluyendo en la respuesta todos los pasos realizados.
c) Obtén razonadamente los valores reales x, y, z que verifican la ecuación:

$$x\cdot I + y\cdot A + z\cdot A^2 = B.$$

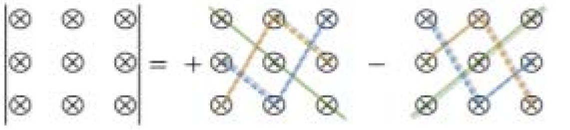
(30) Dada la matriz $A=\begin{pmatrix}2 & -1\\ 4 & 2\end{pmatrix}$

a) Calcula $(A - I)^2\cdot(A - 5I)$ donde I es la matriz identidad.
b) Obtén la matriz traspuesta de la matriz A.
c) Razona si existe la matriz inversa de A y, en su caso, calcúlala.

(31) Tenemos las matrices reales $A=\begin{pmatrix}-1 & -1 & 2\\ 3 & -5 & 6\\ 1 & -1 & 0\end{pmatrix}$ $I=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$:

a) Justifica que existe la matriz inversa de A, calcúlala y calcula el determinante de A^{-1}.
b) Calcula el determinante de la matriz B, $B = A(A + 4\cdot I)$.
c) Determina los números reales x, y, z, t que cumplen: $A^{-1} = x\cdot A + y\cdot I$, $A^2 = z\cdot A + t\cdot I$.

RESUMEN

Definición de determinante	El determinante de una matriz cuadrada *A* es el número real que se obtiene mediante $\det(A)=\lvert A\rvert=\sum_{\sigma\in S_n}(-1)^{i(\sigma)}a_{1\sigma(1)}a_{2\sigma(2)}\dots a_{n\sigma(n)}$	
Determinante de orden dos	$\det(A)=\lvert A\rvert=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22}\end{vmatrix}=a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}$	$\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 5\end{vmatrix}=2\cdot5-3\cdot1=10-3=7$
Determinante de orden tres. Regla de Sarrus		$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 5 & 1 \\ 3 & 6 & 2\end{vmatrix}=10+6+18-45-6-4=-21$
Menor complementario	Menor complementario del elemento a_{ij}, Δ_{ij}, es el determinante de orden *n* – 1 que se obtiene al eliminar la fila *i* y la columna *j*.	$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33}\end{pmatrix}\Rightarrow \alpha_{21}=\begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{32} & a_{33}\end{vmatrix}$
Adjunto de un elemento	Adjunto del elemento a_{ij}, A_{ij}, es el menor complementario Δ_{ij}, precedido de + o – según la suma de los subíndices *i* + *j* sea par o impar. $A_{ij}=(-1)^{i+j}\alpha_{ij}$	$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33}\end{pmatrix}\Rightarrow\begin{cases} A_{21}=-\begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{32} & a_{33}\end{vmatrix} \\ A_{33}=+\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22}\end{vmatrix}\end{cases}$
Matriz adjunta	Se llama matriz adjunta de la matriz *A* a la matriz formada por los adjuntos de la matriz *A*, y se representa por Adj(*A*).	$\text{Adj}(A)=\begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33}\end{pmatrix}$
Desarrollo por adjuntos	El determinante de una matriz es igual a la suma de los productos de los elementos de una línea por sus adjuntos correspondientes.	$\lvert A_3\rvert=\begin{cases} a_{11}A_{11}+a_{12}A_{12}+a_{13}A_{13} \\ a_{12}A_{12}+a_{22}A_{22}+a_{32}A_{32}\end{cases}$
Matriz inversa	Si el determinante de *A* no es nulo: $A^{-1}=\frac{1}{\lvert A\rvert}\cdot[\text{Adj}(A)]^t$	
Menor de una matriz	Menor de orden *k* es el determinante formado por la intersección de *k* filas y *k* columnas de la matriz.	$\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 3 \\ -2 & 3\end{pmatrix}\rightarrow M_2=\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 3\end{vmatrix}$
Rango de una matriz	Rango (o característica) de una matriz es el orden del menor de mayor orden no nulo	El rango de la matriz anterior es dos, porque $M_2 = 3 - 2 = 1 \neq 0$.

CAPÍTULO 3: SISTEMAS DE ECUACIONES

ACTIVIDADES PROPUESTAS

3. RESOLUCIÓN DE SISTEMAS

- Analiza y resuelve mediante el método de Gauss los sistemas siguientes:

a) $\begin{cases} -x+2y-5z=-3 \\ 2x-3y+z=3 \\ -5x+2y-5z=-4 \end{cases}$ b) $\begin{cases} x-2y+3z=-14 \\ -x+3y-z=10 \\ 2x-y+6z=-22 \end{cases}$ c) $\begin{cases} -x+3y-z=-6 \\ 3x-y+4z=7 \\ 2x+2y+3z=-9 \end{cases}$ d) $\begin{cases} x-9y+5z=33 \\ x+3y-z=-9 \\ x-y+z=5 \end{cases}$

4. EXPRESIÓN MATRICIAL DE UN SISTEMA DE ECUACIONES:

- Resuelve el sistema anterior $\begin{cases} x+y+z=90 \\ 6x-2{,}5y-1{,}5z=210 \\ x-2y+z=0 \end{cases}$ y comprueba que el aspirante deberá contestar 50 preguntas correctamente, 30 erróneamente y dejar 10 preguntas sin contestar para alcanzar los 210 puntos.

RESUMEN

		Ejemplos
Sistema de ecuaciones lineales	Se denomina sistema de *m* ecuaciones lineales con *n* incógnitas al conjunto de relaciones: $\begin{cases} a_{11}x_1 & + & a_{12}x_2 & + & \dots & + & a_{1n}x_n & = & b_1 \\ a_{11}x_1 & + & a_{22}x_2 & + & \dots & + & a_{2n}x_n & = & b_2 \\ \dots & \vdots & \dots & \vdots & \dots & \vdots & \dots & \ddots & \dots \\ a_{11}x_1 & + & a_{m2}x_2 & + & \dots & + & a_{mn}x_n & = & b_m \end{cases}$	$\begin{cases} x+y+z=3 \\ 2x-y+z=2 \\ x+2y-3z=0 \end{cases}$
Sistema homogéneo	Un sistema de ecuaciones lineales se dice que es homogéneo cuando el término independiente de todas las ecuaciones es igual a cero.	$\begin{cases} x+y+z=0 \\ 2x-y+z=0 \\ x+2y-3z=0 \end{cases}$
Sistemas equivalentes	Dos sistemas con el mismo número de incógnitas, aunque no tengan el mismo número de ecuaciones, se dice que son **equivalentes** si tienen las **mismas soluciones**, es decir, toda solución del primero es solución del segundo, y viceversa.	$\begin{cases} x+y=3 \\ 2x-y=0 \end{cases}$ y $\begin{cases} x+2y=5 \\ 2x-2y=-2 \\ 3x-y=1 \end{cases}$ Verifican $x = 1$; $y = 2$
Expresión matricial de un sistema	Todo sistema puede expresarse como producto de matrices en la forma $A \cdot X = B$: $\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \ddots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \cdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \cdots \\ b_m \end{pmatrix}$	$\begin{cases} 6x+y=15 \\ 3x+2y=8 \end{cases}$ $A \cdot X = B \Rightarrow$ $\begin{pmatrix} 6 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 15 \\ 8 \end{pmatrix}$
Resolución por inversa	$A \cdot X = B \Rightarrow A^{-1}A \cdot X = A^{-1}B \Rightarrow I \cdot X = A^{-1}B \Rightarrow \quad X = A^{-1}B$	
Teorema de Rouchè-Fröbenius	El teorema de Rouchè-Fröbenius dice: "La condición necesaria y suficiente para que un sistema de *m* ecuaciones y *n* incógnitas sea compatible (tenga solución) es que el rango de la matriz de los coeficientes sea igual al rango de la matriz ampliada".	$\begin{cases} \mathrm{rg}(A) = \mathrm{rg}(A^*) \Rightarrow \begin{cases} \mathrm{rg}(A) = n & \text{SCD} \\ \mathrm{rg}(A) < n & \text{SCI} \end{cases} \\ \mathrm{rg}(A) < \mathrm{rg}(A^*) \Rightarrow \text{S.I.} \end{cases}$
Regla de Cramer	La solución de un sistema puede calcularse como: $x_i = \dfrac{\Delta_i}{\lvert A \rvert}$ Si $\lvert A \rvert \neq 0$ Siendo Δ_i el determinante que resulta de sustituir la columna de la incógnita *i*–ésima por la matriz de términos independientes.	$\begin{pmatrix} 6 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 13 \\ 6 \end{pmatrix}$ $\lvert A \rvert = \begin{vmatrix} 6 & 1 \\ 2 & 2 \end{vmatrix}$ $\Delta_x = \begin{vmatrix} 13 & 1 \\ 6 & 2 \end{vmatrix}, \Delta_y = \begin{vmatrix} 6 & 13 \\ 2 & 6 \end{vmatrix}$ $x = \dfrac{20}{10} = 2 \quad y = \dfrac{10}{10} = 1$

Autores: Leticia González Pascual y Álvaro Valdés

EJERCICIOS Y PROBLEMAS.

1. – Resuelve los siguientes sistemas aplicando el método de eliminación o de Gauss:

a) $\begin{cases} -x+2y-5z=-3 \\ 2x-3y+z=3 \\ -5x+2y-5z=-4 \end{cases}$ b) $\begin{cases} x-2y+3z=-14 \\ -x+3y-z=10 \\ 2x-y+6z=-22 \end{cases}$ c) $\begin{cases} -x+3y-z=-6 \\ 3x-y+4z=7 \\ 2x+6y-z=-9 \end{cases}$ d) $\begin{cases} x-9y+5z=33 \\ x+3y-z=-9 \\ x-y+z=5 \end{cases}$

2. – Dados los sistemas: a) $\begin{cases} -4x+3y=-5 \\ 3x-4y=2 \end{cases}$ b) $\begin{cases} 2x-y=-4y \\ 5+2y=3x \end{cases}$ c) $\begin{cases} y+2z=-3 \\ 2x+y \quad =3 \\ x+3y-4z=3 \end{cases}$

a) Exprésalos en forma matricial y comprueba que son sistemas de Cramer.
b) Resuélvelos utilizando la matriz inversa y aplicando la regla de Cramer.

3. – Discute y resuelve, cuando sea posible, los siguientes sistemas:

a) $\begin{cases} -2x+y=-3 \\ 6x-3y=9 \end{cases}$ b) $\begin{cases} -4x-6y=-6 \\ -2x+3y=-3 \end{cases}$ c) $\begin{cases} 3x-2y=-2 \\ 9x-6y=6 \\ 6x+4y=3 \end{cases}$

4. – Resuelve los siguientes sistemas aplicando, si es posible, la Regla de Cramer:

a) $\begin{cases} -x-2y+3z=6 \\ 3x-4y+2z=7 \\ 4x+y-z=-1 \end{cases}$ b) $\begin{cases} 2x-3y+z=-29 \\ 3x+y-5z=21 \\ -x+2y-4z=32 \end{cases}$ c) $\begin{cases} x+y+z=1 \\ 2x+3y-4z=9 \\ x-y+z=-1 \end{cases}$ d) $\begin{cases} 3x+2y+z=1 \\ 5x+3y+4z=2 \\ x+y-z=1 \end{cases}$

5. – Discute y resuelve los sistemas en los casos que sea posible: a) $\begin{cases} 2x+3y-4z=1 \\ 4x+6y-az=2 \\ x+y+az=10 \end{cases}$ b) $\begin{cases} 5x+4y+2z=0 \\ 2x+3y+z=0 \\ 4x-y+m^2z=m-1 \end{cases}$

6. – Dado el sistema $\begin{cases} (a+2)x+(a-1)y-z=3 \\ ax-y+z=3 \\ x+ay-z=1 \end{cases}$

a) Estudia su compatibilidad según los valores de a.
b) Resuélvelo para el caso $a=-1$.

7. – Dadas las ecuaciones: $\begin{cases} 6x-9y+2z=5 \\ 2x-3y+z=4 \end{cases}$ se pide:

a) Añade una ecuación para que el sistema resulte ser incompatible.
b) Añade una ecuación para que el sistema resulte ser compatible determinado.

8. – Dado el sistema de ecuaciones $\begin{cases} 2x+3y-z=-2 \\ x+2y+2z=1 \end{cases}$ se pide:

a) Discute y resuelve, cuando sea posible.
b) Añade una ecuación lineal para que el sistema resultante tenga:
i) una solución ii) muchas soluciones iii) no tenga solución

9. – Discute y resuelve cuando sea posible los siguientes sistemas homogéneos:

a) $\begin{cases} x+y+3z=0 \\ -2x-3y+z=0 \\ 3x+2y+4z=0 \end{cases}$ b) $\begin{cases} 2x-y+3z=0 \\ 2y-z=0 \\ -2x+3y-4z=0 \end{cases}$ c) $\begin{cases} y=x+3z-y \\ x=z-2y+x \\ z=x-2y-2z \end{cases}$

10. – Sean las matrices $A=\begin{pmatrix} x & 1 \\ x & m \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 1 \\ -y \end{pmatrix}$, $C=\begin{pmatrix} y-2 \\ -m \end{pmatrix}$, $D=\begin{pmatrix} 3x \\ 4x \end{pmatrix}$, $E=\begin{pmatrix} 1 & 4 \end{pmatrix}$

a) Calcula cada uno de los tres productos $A\cdot B$, $E\cdot D$, $D\cdot E$.
b) Si $C-2AB=-D$ plantea un sistema de 2 ecuaciones y 2 incógnitas (representadas por x, y) en función de m. ¿Para qué valores de m el sistema tiene solución? ¿Es siempre única?

11. – Sean las matrices $A=\begin{pmatrix}1 & 1\\ 0 & 0\\ 1 & 1\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}x & 0 & z\\ 0 & y & 0\end{pmatrix}$, $C=\begin{pmatrix}x & 0 & 0\\ 0 & -y & -z\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$, $D=\begin{pmatrix}1\\ 1\\ 1\end{pmatrix}$, $E=\begin{pmatrix}0\\ a\\ a\end{pmatrix}$

a) Sabiendo que $(AB-C)D=2E$, plantea un sistema de 3 ecuaciones y 3 incógnitas (representadas por x, y, z) en función de a.

b) ¿Para algún valor de a el sistema tiene solución única?

c) Para $a = 0$ encuentra una solución del sistema con $z \neq 0$

12. – El cajero automático de una determinada entidad bancaria sólo admite billetes de 50, 20 y de 10 euros. Los viernes depositan en el cajero 225 billetes por un importe total de 7000 €. Averigua el número de billetes de cada valor depositado, sabiendo que la suma del número de billetes de 50 y de 10 euros es el doble que el número de billetes de 20 euros.

13. – Se dispone de tres billeteras A, B y C con billetes de 10, 20 y 50 euros respectivamente. Si pasamos 5 billetes de B a A, el número de billetes en ésta es igual a la suma de los otros dos, pero si pasamos 10 billetes de A a C, el número de billetes en ésta también es igual a la suma de los otros dos. Averigua cuántos billetes hay en cada billetera si se sabe que en total hay 1550 euros.

14. – La suma de las tres cifras de un número es 18. La cifra de las unidades es igual a la suma de las decenas más las centenas. Si se invierte el orden de las cifras el número aumenta en 594 unidades. ¿De qué número se trata?

15. – Un examen de Matemáticas II va a consistir en un test de 60 preguntas. Por cada acierto se darán 5 puntos, por cada fallo se quitarán 2 puntos y por cada pregunta no contestada se quitará 1 punto. Para aprobar hay que obtener por lo menos 150 puntos. ¿Cuántas preguntas habrá que contestar correctamente para obtener los150 puntos y que el número de fallos más el quíntuple del número de preguntas no contestadas sea igual al número de aciertos?

16. – En el mercado podemos encontrar tres alimentos preparados para gatos que se fabrican poniendo, por kilo, las siguientes cantidades de carne, pescado y verdura:

- Alimento Migato: 600 g de carne, 300 g de pescado y 100 g de verdura
- Alimento Catomeal: 300 g de carne, 400 g de pescado y 300 g de verdura
- Alimento Comecat: 200 g de carne, 600 g de pescado y 200 g de verdura

Si queremos ofrecer a nuestro gato 470 g de carne, 370 g de pescado y 160 g de verdura por kilo de alimento, ¿qué porcentaje de cada uno de los compuestos anteriores hemos de mezclar para obtener la proporción deseada?

17. – Calcula las edades de una familia (padre, madre e hija), sabiendo que entre los tres suman 70 años, que hace cuatro años la edad del padre era siete veces la edad de la hija y que dentro de quince años la edad de la hija será la cuarta parte de la suma de las edades del padre y de la madre.

18. – Una persona invirtió 72000 € repartidos en tres empresas y obtuvo 5520 € de beneficios. Calcular la inversión realizada en cada empresa sabiendo que en la empresa B hizo el triple de inversión que en la A y C juntas, y que los beneficios de las empresas fueron del 10 % en la empresa A, el 8 % en la empresa B y el 5 % en la empresa C.

19. – Se tienen tres tipos de café: el de la clase A, que cuesta 6 €/kg, el de clase B, que cuesta 8 €/kg y el de la clase C que cuesta 10 €/kg. Se desea hacer una mezcla para vender 80 kg de café a 7 €/kg. ¿Cuántos kg de cada clase se deben poner si del primer tipo debe entrar el doble del segundo más el tercero?

20. – Calcula las edades actuales de una madre y sus dos hijos, sabiendo que hace 14 años la edad de la madre era 5 veces la suma de las edades de los hijos en aquel momento, que dentro de 10 años la edad de la madre será la suma de las edades que los hijos tendrán en ese momento y que cuando el hijo mayor tenga la edad actual de la madre, el hijo menor tendrá 42 años.

21. – En una farmacia se comercializan 3 tipos de champú de cierta marca: normal, con vitaminas y anticaspa. Se sabe que el precio al que se vende el normal es de 2 euros y el de vitaminas es de 3 euros. Se desconoce el precio al que se vende el anticaspa. Por otro lado, el dinero total obtenido por las ventas de los 3 tipos de champú el mes pasado fue de 112 euros y el dinero obtenido en ventas con el champú normal fue 56 euros inferior al dinero total obtenido en ventas con el resto. Además, el dinero total obtenido en ventas con el champú de vitaminas y el anticaspa fue el mismo que el que hubiera obtenido vendiendo 28 unidades del anticaspa y ninguna de los demás.

a) Plantea un sistema de ecuaciones (en función del precio desconocido del champú anticaspa, que puedes llamar por ejemplo m) donde las incógnitas (x, y, z) sean las unidades vendidas el mes pasado de cada tipo de champú.

b) ¿Qué puedes concluir sobre el precio del champú anticaspa a partir de un estudio de la compatibilidad del sistema?

c) Si se sabe que el número de unidades vendidas del anticaspa fue 20, utiliza el resultado del apartado (b) para calcular las unidades vendidas de los otros 2.

22. – En el trayecto que hay entre su casa y el trabajo, un individuo puede repostar gasolina en tres estaciones de servicio (A, B y C). El individuo recuerda que este mes el precio de la gasolina en A ha sido de 1,20 euros/litro y el precio de la gasolina en B de 1,18 euros/litro, pero ha olvidado el precio en C. (Supongamos que son ”m” euros/litro). También recuerda que:

- la suma del gasto en litros de gasolina en las estaciones A y B superó en 46,80 € al gasto en C.
- el número de litros de gasolina consumidos en B fue el mismo que en C.
- el gasto de litros en A superó al de B en 12,60 euros.

a) Plantea un sistema de ecuaciones (en función de ”m”) para determinar los litros consumidos en cada gasolinera.

b) Estudiar la compatibilidad del sistema en función de ”m”. ¿Puedes dar algún precio al que sea imposible haber vendido la gasolina en la gasolinera C?

23. – En una cafetería los ocupantes de una mesa abonaron 4 € por 2 cafés, 1 tostada y 2 refrescos, mientras que los de otra mesa pagaron 9 € por 4 cafés, 3 tostadas y 3 refrescos.

a) ¿Cuánto tienen que pagar los clientes de una tercera mesa si han consumido 2 cafés y 3 tostadas?

b) Con los datos que se dan, ¿se puede calcular cuánto vale un café? Justifica las respuestas.

AUTOEVALUACIÓN

Dado el siguiente sistema de ecuaciones: $\begin{cases} x+y+z=6 \\ x-2z+2y=5 \\ 2y-x+z=11 \end{cases}$

1.- Su matriz de coeficientes es:

a) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 2 \\ 2 & -1 & 1 \end{pmatrix}$ b) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 2 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ c) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & -2 \\ 2 & -1 & 1 \end{pmatrix}$ d) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$

2.- Su matriz ampliada es:

a) $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 6 \\ 1 & -2 & 2 & 5 \\ 2 & -1 & 1 & 11 \end{array}\right)$ b) $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 6 \\ 1 & -2 & 2 & 5 \\ -1 & 2 & 1 & 11 \end{array}\right)$ c) $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 6 \\ 1 & 2 & -2 & 5 \\ 2 & -1 & 1 & 11 \end{array}\right)$ d) $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 6 \\ 1 & 2 & 2 & 5 \\ -1 & 2 & 1 & 11 \end{array}\right)$

3.- Si aplicamos el método de Gauss la nueva matriz ampliada obtenida es:

a) $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 6 \\ 0 & 3 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{array}\right)$ b) $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 6 \\ 0 & -3 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 3 & 16 \end{array}\right)$ c) $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 6 \\ 0 & 1 & -3 & -1 \\ 0 & 0 & -10 & -4 \end{array}\right)$ d) $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 6 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 20 \end{array}\right)$

4.- El sistema es:

a) compatible determinado b) compatible indeterminado c) incompatible d) tiene tres soluciones

Dado el siguiente sistema de ecuaciones $\begin{cases} 2x-y=-4y \\ 5+2y+z=3x \end{cases}$

5.- Su forma matricial es:

a) $\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -4y \\ 5 \end{pmatrix}$ b) $\begin{pmatrix} 2 & 3 & 0 \\ -3 & 2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ -5 \end{pmatrix}$ c) $\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ -5 \end{pmatrix}$

6.- Al añadir la ecuación indicada el sistema es compatible determinado

a) $3y+2x=7$ b) $x-y=7$ c) $-x+5y+z=-5$ d) $-3x+2y+z=7$

7.- Al añadir la ecuación indicada el sistema es compatible indeterminado

a) $3y+2x=7$ b) $x-y=7$ c) $-x+5y+z=-5$ d) $-3x+2y+z=7$

8.- Al añadir la ecuación indicada el sistema es incompatible

a) $3y+2x=7$ b) $x-y=7$ c) $-x+5y+z=-5$ d) $x+y+z=7$

9.- Indica la afirmación que es correcta:

a) Los sistemas homogéneos tienen siempre infinitas soluciones.
b) Dos sistemas son equivalentes si coincide alguna de sus soluciones.
c) Un sistema es compatible si y sólo si el rango de la matriz de los coeficientes coincide con el rango de la matriz ampliada.
d) Todos los sistemas se pueden resolver por el método de Cramer.

Autores: Leticia González Pascual y Álvaro Valdés

Apéndice: Problemas de matrices en las P.A.A.U.

(1) Dado el siguiente sistema de ecuaciones: $\begin{cases} x+y+z=6 \\ x-2y+2z=5 \\ 2x-y+z=11 \end{cases}$

a) Obtén su matriz de coeficientes.

b) Calcula el determinante de la matriz anterior.

c) Sin resolver el sistema, razonar si tendrá solución única.

(2) En el primer curso de un centro de la Universidad de Oviedo se han matriculado 352 alumnos divididos en tres titulaciones distintas. En la tercera titulación hay la tercera parte de alumnos que en la primera, y la diferencia de alumnos que hay entre la primera titulación y la segunda es inferior en dos alumnos al doble de los alumnos que hay en la tercera.

a) Establece un sistema de ecuaciones con las condiciones del problema, en función del número de alumnos en cada titulación, y obtenga el número de alumnos que hay en cada titulación.

b) Calcula el determinante de la matriz del sistema.

(3) En un partido de baloncesto femenino, el equipo de la Universidad de Oviedo ganó al de otra universidad española con un marcador 64 a 48. El marcador obtenido por el equipo ganador se consiguió mediante canastas de dos puntos, triples (canastas de tres puntos) y tiros libres (canastas de un punto). El número de tiros libres fue dos más que cinco veces el número de triples. Además, el número de canastas de dos puntos fue dos más que el número de tiros libres.

a) Plantea el sistema de ecuaciones resultante de lo anterior.

b) Escribe la matriz ampliada del sistema obtenido en a).

c) ¿Cuántas canastas de cada tipo metió el equipo de la Universidad de Oviedo?

(4) Cada acción de BBA ha dado una ganancia de 6 euros y cada acción de NKO ha dado una ganancia de m euros. Un inversor había comprado acciones de ambos tipos, lo que le supuso una ganancia total de 800 euros, pero está arrepentido de su inversión, porque si hubiese comprado la mitad de acciones de BBA y el doble de NKO, su ganancia total habría sido de 1150 euros.

a) Plantea un sistema de ecuaciones (en función de m) donde las incógnitas x e y sean el número de acciones compradas de cada tipo. Basándote en un estudio de la compatibilidad del sistema, ¿existe algún valor de m para el que el sistema tenga más de una solución?

b) Si la ganancia por cada acción de NKO fue de 5 euros, ¿cuántas acciones de NKO había comprado?

(5) Una tienda vende bolsas de caramelos a 2 euros cada una y bolsas de gominolas a 4 euros cada una. La recaudación de un determinado día por estos dos conceptos ha ascendido a 200 euros y se sabe que el número de bolsas de caramelos que han vendido ese día es m veces el número de bolsas de gominolas.

a) Plantea un sistema de ecuaciones (en función de m) donde las incógnitas x e y sean el número de bolsas de cada tipo que se han vendido ese día. Basándote en un estudio de compatibilidad del sistema anterior, ¿es posible que se hayan vendido el doble de bolsas de caramelos que de gominolas?

b) Suponiendo que se han vendido el triple de bolsas de caramelos que de gominolas, ¿cuántas bolsas de gominolas se han vendido?

(6) Un tren realiza un viaje directo entre dos capitales. El viaje lo realiza por dos tipos de vías, por la primera circula siempre a 100 Km/h y por la segunda circula siempre a m Km/h. El recorrido total del viaje es de 1240 Km y la duración del mismo es de 11 horas.

a) Plantea un sistema de ecuaciones (en función de m) donde las incógnitas x e y sean el número de horas que circula por cada tipo de vía. Basándote en un estudio de la compatibilidad del sistema anterior, ¿es posible que la velocidad a la que circula por el segundo tipo de vía sea también de 100 Km/h?

b) Suponiendo que la velocidad a la que circula por el segundo tipo de vía es 120 Km/h, ¿cuánto tiempo ha estado circulando por el primer tipo de vía?

(7) Una academia de idiomas da clases de español a un total de m alumnos, entre los de nivel básico y los de nivel avanzado, con los que recauda 3000 euros. Los alumnos de nivel básico pagan m euros al mes, mientras que los de nivel avanzado pagan el doble.

a) Plantea un sistema de ecuaciones (en función de m) donde las incógnitas x e y sean el número de alumnos de cada tipo en las clases de español de la academia. Basándote en un estudio de compatibilidad del sistema anterior, ¿es posible que los alumnos de nivel básico paguen 40 euros al mes?

b) Si los alumnos de nivel básico pagan 50 euros al mes, ¿cuántos alumnos de nivel avanzado hay?

(8) Juan y Luis son dos amigos que en total tienen 10 hijos. Un tercer amigo, Javier, tiene *m* hijos más que Juan y *m* veces los de Luis.

a) Plantea un sistema de ecuaciones (en función de *m*) donde las incógnitas *x* e *y* sean el número de hijos de Juan y Luis. ¿Para qué valores de *m* el sistema anterior tiene solución? En caso de existir solución, ¿es siempre única?

b) Si Javier tiene el doble de hijos que Luis, ¿cuántos hijos tiene Luis?

(9) Un grupo de personas se reúne para ir de excursión, juntándose un total de 20 entre hombres, mujeres y niños. Contando hombres y mujeres juntos, su número resulta ser el triple del número de niños. Además, si hubiera acudido una mujer más, su número igualaría al de hombres.

a) Plantear un sistema para averiguar cuántos hombres, mujeres y niños han ido de excursión.

b) Resolver el problema.

(10) Considere el sistema $\begin{cases} ax - ay + z = 2 \\ 3x + 2y - 2z = a \\ -ax + 3y - z = 2 \end{cases}$

a) Estudie su compatibilidad según los distintos valores del número real a.

b) Resuélvalo, si es posible, en el caso $a = 1$.

(11) Dado el sistema $\begin{cases} (a-1)x + 2y + (a-1)z = 1 + a \\ (a+1)y - (a+1)z = 2 \\ x + y + az = a \end{cases}$

a) Estudie su compatibilidad según los valores de a.

b) Resuélvalo cuando $a = 0$.

(12) La matriz ampliada asociada a cierto sistema de ecuaciones lineales es: $A^* = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 2 & -1 & 4 & 0 \\ -1 & 1 & 2 & 5 \end{pmatrix}$

a) Obtener las ecuaciones del sistema.

b) Calcular el rango de la matriz formada por los coeficientes del sistema.

c) Sin resolver el sistema, deducir razonadamente si admite soluciones y en qué número.

(13) La matriz de los coeficientes de un sistema es $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & a & a \\ 1 & 4a & 1 \end{pmatrix}$ y la de términos independientes $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2a \end{pmatrix}$

a) ¿Para qué valor o valores de a el sistema no tiene solución?

b) Para cierto valor de a un individuo encontró 2 soluciones del sistema. ¿Cuánto valía a? ¿Tenía más soluciones el sistema?

c) Encuentra un valor de a para el que el sistema tenga solución única y, para dicho valor, resuélvelo.

(14) Sean las matrices $A = \begin{pmatrix} x & 1 \\ 2x & -1 \\ -x & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 \\ y \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} z \\ 2z \\ -z \end{pmatrix}$ y $D = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1/3 \end{pmatrix}$ donde x, y, z son desconocidos.

a) Calcular las matrices $(A \cdot B) + C$ y $3D$

b) Sabiendo que $(AB) + C = 3D$, plantear un sistema de ecuaciones para encontrar los valores de x, y, z.

c) Estudiar la compatibilidad del sistema ¿Cuántas soluciones tiene?

d) Encontrar, si es posible, una solución.

(15) Sean las matrices $A = \begin{pmatrix} -1 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 3 & -3 & a \end{pmatrix}$ $B = \begin{pmatrix} 0 \\ a \\ a \end{pmatrix}$ $C = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ donde a es desconocido.

a) Sea el sistema de 3 ecuaciones con tres incógnitas cuya matriz de coeficientes es A y de términos independientes B. ¿Puede para algún valor de a no tener solución este sistema? ¿Para qué valores de a el sistema tiene solución única?

b) Si la matriz de coeficientes es A pero la de términos independientes es C, ¿es posible que para algún valor de a el sistema no tenga solución? Encuentra un valor de a para el que el sistema tenga más de una solución y calcula dos de ellas.

(16) Sean las matrices $A=\begin{pmatrix} x & 2 \\ 0 & m \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 5 \\ y \end{pmatrix}$, $C=\begin{pmatrix} 0 \\ 10x \end{pmatrix}$, $D=10\begin{pmatrix} 1 \\ m \end{pmatrix}$, $E=\begin{pmatrix} 3 & m \end{pmatrix}$

a) Calcula cada uno de los tres productos $A{\cdot}B$, $D{\cdot}E$, $E{\cdot}B$.

b) Si $AB + C = D$ plantea un sistema de 2 ecuaciones y 2 incógnitas (representadas por x, y) en función de m. ¿Para qué valores de m el sistema tiene solución? ¿Es siempre única?

(17) Sean las matrices $A=\begin{pmatrix} x & y \\ 0 & y \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} a \\ 1 \end{pmatrix}$, $C=\begin{pmatrix} y \\ ay \end{pmatrix}$, $D=\begin{pmatrix} 6-ay \\ 1-a \end{pmatrix}$

a) Si $AB - C = D$, plantea un sistema de 2 ecuaciones y 2 incógnitas (representadas por x, y) en función de a.

b) ¿Para qué valores de a el sistema tiene solución? ¿Es siempre única? Encuentra una solución para $a = 1$ con $y \neq 1$

(18) Sean las matrices $A=\begin{pmatrix} a & 1 \\ 1 & a \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ $B=\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ $C=\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ y $D=\begin{pmatrix} z \\ z \\ z \end{pmatrix}$

a) Sabiendo que $AB = 2C - D$, plantea un sistema de 3 ecuaciones y 3 incógnitas (representadas por x, y, z) donde a es cierto valor desconocido.

b) Si se supiera que el sistema tiene solución, ¿podríamos descartar algún valor de a?

c) Si se supiera que el sistema tiene solución única, ¿podríamos descartar algún valor de a?

d) ¿Hay algún valor de a para el que el sistema tenga más de una solución?

(19) Sean las matrices $A=\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} x & 0 & z \\ 0 & y & 0 \end{pmatrix}$, $C=\begin{pmatrix} x & 0 & 0 \\ 0 & -y & -z \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, $D=\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $E=\begin{pmatrix} 0 \\ a \\ a \end{pmatrix}$

a) Sabiendo que $(AB - C)D = 2E$, plantea un sistema de 3 ecuaciones y 3 incógnitas (representadas por x, y, z) en función de a.

b) ¿Para algún valor de a el sistema tiene solución única?

c) Para $a = 0$ encuentra una solución del sistema con $z \neq 0$

(20) Halla todas las soluciones de un sistema lineal de tres ecuaciones con tres incógnitas del que se conoce que $(1,0,0)$, $(0,2,0)$ y $(0,0,3)$ son soluciones y el rango de la matriz de los coeficientes es mayor o igual que uno.

Autores: Leticia González Pascual y Álvaro Valdés

RESUMEN

		Ejemplos
Sistema de ecuaciones lineales	Se denomina sistema de m ecuaciones lineales con n incógnitas al conjunto de relaciones: $\begin{cases} a_{11}x_1 & + & a_{12}x_2 & + & \dots & + & a_{1n}x_n & = & b_1 \\ a_{11}x_1 & + & a_{22}x_2 & + & \dots & + & a_{2n}x_n & = & b_2 \\ \dots & \vdots & \dots & \vdots & \dots & \vdots & \dots & \ddots & \dots \\ a_{11}x_1 & + & a_{m2}x_2 & + & \dots & + & a_{mn}x_n & = & b_m \end{cases}$	$\begin{cases} x+y+z=3 \\ 2x-y+z=2 \\ x+2y-3z=0 \end{cases}$
Sistema homogéneo	Un sistema de ecuaciones lineales se dice que es homogéneo cuando el término independiente de todas las ecuaciones es igual a cero.	$\begin{cases} x+y+z=0 \\ 2x-y+z=0 \\ x+2y-3z=0 \end{cases}$
Sistemas equivalentes	Dos sistemas con el mismo número de incógnitas, aunque no tengan el mismo número de ecuaciones, se dice que son equivalentes si tienen las mismas soluciones, es decir, toda solución del primero es solución del segundo, y viceversa.	$\begin{cases} x+y=3 \\ 2x-y=0 \end{cases}$ y $\begin{cases} x+2y=5 \\ 2x-2y=-2 \\ 3x-y=1 \end{cases}$ Verifican $x = 1$; $y = 2$
Expresión matricial de un sistema	Todo sistema puede expresarse como producto de matrices en la forma $A \cdot X = B$: $\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \ddots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \cdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \cdots \\ b_m \end{pmatrix}$	$\begin{cases} 6x+y=15 \\ 3x+2y=8 \end{cases}$ $A \cdot X = B \Rightarrow$ $\begin{pmatrix} 6 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 15 \\ 8 \end{pmatrix}$
Resolución por inversa	$A \cdot X = B \Rightarrow A^{-1}A \cdot X = A^{-1}B \Rightarrow I \cdot X = A^{-1}B \Rightarrow \; X = A^{-1}B$	
Teorema de Rouchè-Fröbenius	El teorema de Rouchè-Fröbenius dice: "La condición necesaria y suficiente para que un sistema de m ecuaciones y n incógnitas sea compatible (tenga solución) es que el rango de la matriz de los coeficientes sea igual al rango de la matriz ampliada".	$\begin{cases} \mathrm{rg}(A) = \mathrm{rg}(A^*) \Rightarrow \begin{cases} \mathrm{rg}(A) = n & \text{SCD} \\ \mathrm{rg}(A) < n & \text{SCI} \end{cases} \\ \mathrm{rg}(A) < \mathrm{rg}(A^*) \Rightarrow \text{S.I.} \end{cases}$
Regla de Cramer	La solución de un sistema puede calcularse como: $x_i = \dfrac{\Delta_i}{\lvert A \rvert} \quad \text{Si} \lvert A \rvert \neq 0$ Siendo Δ_i el determinante que resulta de sustituir la columna de la incógnita i–ésima por la matriz de términos independientes.	$\begin{pmatrix} 6 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 13 \\ 6 \end{pmatrix} \quad \lvert A \rvert = \begin{vmatrix} 6 & 1 \\ 2 & 2 \end{vmatrix}$ $\Delta_x = \begin{vmatrix} 13 & 1 \\ 6 & 2 \end{vmatrix}, \Delta_y = \begin{vmatrix} 6 & 13 \\ 2 & 6 \end{vmatrix}$ $x = \dfrac{20}{10} = 2 \quad y = \dfrac{10}{10} = 1$

CAPÍTULO 4: PROGRAMACIÓN LINEAL

ACTIVIDADES PROPUESTAS

1. INECUACIONES LINEALES CON DOS INCÓGNITAS

1. Representa la solución gráfica de las inecuaciones siguientes: $x+2y<3 \quad -x+3y>4 \quad 2x-y\le -2 \quad -x-y\ge 0$

Indica en cada caso si el recinto solución es abierto o cerrado.

2. SISTEMAS DE INECUACIONES LINEALES

2. Representa la región factible de los siguientes sistemas de inecuaciones:

$$\begin{cases} x>0 \\ y>0 \\ x+2y\ge 3 \end{cases} \qquad \begin{cases} x<0 \\ y>0 \\ x-y>-1 \end{cases} \qquad \begin{cases} x>0 \\ y<0 \\ 2x+y<1 \end{cases} \qquad \begin{cases} x<0 \\ y<0 \\ x+y>1 \end{cases}$$

Indica en cada caso si la solución es acotada, no acotada o no existe solución.

3. PROGRAMACIÓN LINEAL:

3. Con la misma región factible del ejemplo, optimiza las siguientes funciones objetivo:
   a) $z = 2x + 4y \to \text{Máx}$ b) $z = 4x + 3y \to \text{Mín}$ c) $z = 4x + 3y \to \text{Máx}$
4. Resuelve los siguientes problemas de programación lineal:

f.o. $f(x,y)=2x+3y$ s.a. $\begin{cases} x+y\ge 2 \\ 2x+3y\le 6 \\ x\ge 0 \\ y\ge 0 \end{cases}$

f.o. $f(x,y)=x+3y$ s.a $\begin{cases} 2x+5y\le 300 \\ x+y\le 90 \\ x\ge 0 \\ y\ge 15 \end{cases}$

f.o. $z=x+y$ s.a. $\begin{cases} 2x+3y\le 120 \\ x\ge y \\ 0\le x\le 45 \\ y\ge 0 \end{cases}$

f.o. $z=1{,}5x+2y$ s.a. $\begin{cases} 3x+4y\ge 12 \\ x\ge y \\ 0\le x\le 20 \\ 0\le y\le 10 \end{cases}$

4. PROBLEMAS RESUELTOS

5. Dibuja el recinto que cumple las restricciones: $\begin{cases} x+2y\le 6 \\ 4x+3y\le 12 \\ x,y\ge 0 \end{cases}$ y analiza si los puntos $(0,2)$, $(3,0)$, $(1,1)$ y $(5,6)$ al conjunto de soluciones del sistema anterior.
6. Dibuja el recinto que cumple las restricciones: $\begin{cases} x+3y\le 9 \\ x+y\ge 10 \\ x,y\ge 0 \end{cases}$ y da seis puntos que sean solución del sistema anterior
7. Maximiza la función $f(x,y) = 3x + 2y$ sujeta a las restricciones: $\begin{cases} 2x+3y\le 15 \\ 2x+y\le 9 \\ x,y\ge 0 \end{cases}$ y da seis puntos que sean solución del sistema anterior
8. Sea S la región del plano definida por $y\ge 2x-4 \quad y\le x-1 \quad 2y\ge x \quad x\ge 0 \quad y\ge 0$. a) Representa la región *S* y calcula las coordenadas de sus vértices. b) Obtén los valores máximo y mínimo de la función *f* (*x*,*y*) = *x* – 3*y* en *S* indicando los puntos de *S* en los cuales se alcanzan dichos valores máximo y mínimo.
9. Se consideran la función $f(x;y) = 5x - 2y$ y la región del plano S definida por el siguiente conjunto de restricciones:
   19. $x-2y\le 0 \quad x+y\le 6 \quad x\ge 0 \quad y\le 3$
10. a) Representa la región *S*. b) Calcula las coordenadas de los vértices de la región *S* y obtén los valores máximo y mínimo de la función *f* en *S* indicando los puntos donde se alcanzan.
    - Minimiza *z* = –3*x* – 2*y* sujeta a $-2x+y\le 2 \quad x-2y\le 2 \quad x\ge 0 \quad y\le 3$

a) Mediante la resolución gráfica del problema, discute si existen soluciones factibles y si existe solución óptima.

b) Si se añade la restricción: $x + y \ge 10$, discute si existe solución óptima y en caso afirmativo calcúlala.

11. Un astillero recibe un encargo para reparar barcos de la flota de un armador, compuesta por pesqueros de 500 toneladas y yates de 100 toneladas. Cada pesquero se tarda en reparar 100 horas y cada yate 50 horas. El astillero dispone de 1600 horas para hacer las reparaciones. Por política de empresa, el astillero no acepta encargos de más de 12 pesqueros ni más de 16 yates. Las reparaciones se pagan a 100 euros la tonelada, independientemente del tipo de barco. ¿Cuántos barcos de cada clase debe reparar el astillero para maximizar el ingreso con este encargo? ¿Cuál es dicho ingreso máximo?

EJERCICIOS Y PROBLEMAS.

1. - Encuentra el conjunto de soluciones de las inecuaciones siguientes:

a) $x+y-7\le 0$ b) $2x-y+3\ge 0$ c) $y\ge 3$ d) $x\le 5$ e) $x\ge 0$ f) $y\le 0$

2. - Dibuja las regiones factibles de los siguientes sistemas:

a) $\begin{cases}3x+4y\le 9\\ 2x-y\ge 12\end{cases}$ b) $\begin{cases}y+3x-7\le 0\\ y-6x+11\le 0\end{cases}$ c) $\begin{cases}x-2y\le 10 & x\ge 0\\ x+y\ge 10 & 0\le y\le 5\end{cases}$

3. - Maximizar la función $z=3x+3y$ sujeta a las restricciones: $\begin{cases}x>0\\ y>0\\ x+y>0\\ x-y>0\end{cases}$

4. - Calcula el valor máximo y el mínimo de la función $f(x,y)=x+2y$ sometida a las restricciones

$y\le 4$ $x\le 3$ $x-y\le 3$ $x-y\ge 0$

5. - Se quiere elaborar una dieta diaria para ganado que satisfaga unas condiciones mínimas de contenido vitamínico al día: 2 mg de vitamina A, 3 mg de vitamina B, 30 de la C y 2 de la D. Para ello se mezclan piensos de los tipos P y Q cuyo precio por kilogramo es para ambos de 30 céntimos, y cuyo contenido vitamínico por kilo se recoge en la tabla adjunta.

	A	B	C	D
P	1	1	20	2
Q	1	3	7,5	0

¿Cómo deben mezclarse los piensos para que el gasto sea mínimo? ¿Cuál es este gasto mínimo?

	M_1	M_2	M_3
A	10	15	20
B	15	10	10

Planifica el transporte para que el coste sea mínimo.

7. - Una empresa construye en dos factorías, F1 y F2, tres tipos de barcos deportivos (A, B y C). La factoría F1 construye en un mes: 1 barco del tipo A, 5 del tipo B y 1 del tipo C, siendo su coste de mantenimiento mensual cuarenta mil euros. F2 construye en un mes: 1 barco del tipo A, 1 de tipo B y 2 de tipo C, siendo su coste mensual 20.000 euros. La empresa se ha comprometido a entregar anualmente a un club deportivo 3 barcos tipo A, 15 de tipo B y 12 de tipo C. ¿Cuántos meses deberá trabajar cada factoría, con objeto de que la empresa cumpla su compromiso con el mínimo coste?

8. - En un almacén se guarda aceite de girasol y de oliva. Para atender a los clientes se ha de tener almacenado un mínimo de 20 bidones de aceite de girasol y 40 de aceite de oliva y, además, el número de bidones de aceite de oliva no debe ser inferior a la mitad del número de bidones de aceite de girasol. La capacidad total del almacén es de 150 bidones. Sabiendo que el gasto de almacenaje de un bidón de aceite de oliva es de 1 euro, y el de un bidón de aceite de girasol es de 0,5 euros, ¿cuántos bidones de cada tipo habrá que almacenar para que el gasto sea mínimo? ¿Y para que el gasto sea máximo?

9. - Una empresa elabora dos productos, cada uno de ellos en una cantidad que es múltiplo de 1000. Conoce que la demanda de ambos productos conjuntamente es mayor que 3000 unidades y menor que 6000 unidades. Asimismo, sabe que la cantidad que se demanda de un producto es mayor que la mitad y menor que el doble de la del otro. Si la empresa desea vender toda la producción:

a) ¿De cuántos modos puede organizar la producción?

b) Para obtener los máximos beneficios, ¿cuánto ha de ser la producción de cada uno de los productos si uno se vende a un precio que es triple que el del otro?

10. - Una empresa dedicada a la fabricación de piezas de automóvil tiene dos factorías que producen, respectivamente, 8000 y 15000 piezas mensuales. Estas piezas han de ser transportadas a tres fábricas que necesitan 10000, 7000 y 6000 piezas respectivamente.

	Fáb. 1	Fáb. 2	Fáb. 3
Fact. 1	6	13	2
Fact. 2	4	4	12

Los costes de transporte, en céntimos de euro, por pieza son los que aparecen en el cuadro adjunto. ¿Cómo debe organizarse el transporte para que el coste sea mínimo?

11. - Una persona va a iniciar una dieta y recibe las siguientes recomendaciones:

- Debe tomar una mezcla de dos compuestos D_1 y D_2
- La cantidad total diaria que puede ingerir, una vez mezclados los compuestos, no debe ser superior a 150 gramos ni inferior a 50 gramos.
- En la mezcla debe haber más cantidad de D_1 que de D_2
- La mezcla no debe contener más de 100 gramos de D_1

Se sabe que cada gramo de D_1 aporta 0,3 mg de vitaminas y 4,5 calorías y cada gramo de D_2 aporta 0,2 mg de vitaminas y 1,5 calorías. ¿Cuántos gramos de cada compuesto debe tomar para obtener la máxima cantidad de vitaminas? ¿Cuántos gramos de cada compuesto debe tomar si desea el mínimo posible de calorías?

12. - Una promotora pretende diseñar una urbanización con a lo sumo 15 edificaciones entre chalets y bloques de pisos. Los bloques de pisos no deberían ser más de un 40% de las edificaciones que se construyan. La urbanización tendría como mucho 12 chalets y como poco 2 bloques de pisos.
    a) ¿Qué combinaciones de cada tipo de viviendas son posibles? Plantea el problema y representa gráficamente el conjunto de soluciones.
    b) ¿Qué combinación hace mayor la diferencia entre el número de chalets y de bloques de pisos?
13. - Para dotar mobiliario a cierta zona de una ciudad, se quiere colocar al menos 20 piezas entre farolas y jardineras. Hay 40 farolas y 12 jardineras disponibles. Se pretende que el número de jardineras colocadas no sea superior a una tercera parte del de farolas colocadas, pero de forma que por lo menos un 20% de las piezas que se coloquen sean jardineras.
    a) ¿Qué combinaciones de piezas de cada tipo se pueden colocar? Plantea el problema y representa gráficamente el conjunto de soluciones.
    b) ¿Qué combinación hace que la diferencia entre el número de farolas y de jardineras colocadas sea mayor? ¿Es la combinación donde más piezas de mobiliario se colocan?
14. - Un restaurante quiere adecuar, en parte o en su totalidad, una superficie de 1100 m^2 para aparcamiento y área recreativa infantil. La superficie de área recreativa ha de ser de al menos 150 m^2. El aparcamiento ha de tener como poco 300 m^2 más que el área recreativa, y como mucho 700 m^2 más que la misma. El aparcamiento le cuesta 15 euros por m^2, y el área recreativa 45 euros por m^2.
    a) ¿Qué combinaciones de superficie dedicados a cada tipo de servicio se pueden adecuar? Plantea el problema y representa gráficamente las soluciones.
    b) ¿Cuál es la combinación más cara? ¿Coincide con la que dedica más espacio al aparcamiento?
15. - Una empresa está seleccionando empleados con contrato eventual por un año y con contrato fijo. El sueldo anual (en miles de euros) de cada empleado eventual es 8 y de cada empleado fijo es 15. La empresa tiene un tope de 480 (miles de euros) para pagar los sueldos anuales de los empleados que contrate. Los empleados fijos han de ser por lo menos 10, y no más de 24. Además el número de eventuales no puede superar en más de 14 al de fijos.
    a) ¿Qué combinaciones de empleados fijos y eventuales se puede contratar? Plantea el problema y representa gráficamente el conjunto de soluciones. ¿Podría contratar 24 fijos y ningún eventual?
    b) Si el objetivo es contratar el mayor número total de empleados ¿cuántos ha de contratar de cada tipo? ¿Y si el objetivo es contratar el mayor número de eventuales?
16. - Una empresa de autobuses dispone de un vehículo para cubrir dos líneas (A y B) que puede trabajar en ellas, a lo sumo, 300 horas mensualmente.
    Un servicio en la línea A lleva 2 horas, mientras que en la B supone 5 horas. Por otra parte, en la línea B se deben cubrir al menos 15 servicios mensualmente y, además, el autobús no puede prestar globalmente más de 90 servicios cada mes entre ambas líneas.
    a) ¿Cuántos servicios puede prestar el vehículo al mes en cada una de las líneas? Plantear el problema y representar gráficamente su conjunto de soluciones.
    b) Sabiendo que la empresa obtiene un beneficio con cada servicio prestado de 60 euros y 180 euros en las líneas A y B respectivamente, ¿cuántos servicios le convendrá realizar en cada una para maximizar el beneficio total? ¿Cuál será su importe?
17. - En una fábrica de cajas de cartón para embalaje y regalo se fabrican dos tipos de cajas: la caja A que requiere para su construcción 4 m de papel decorado y 0,25 m de rollo de cartón, que se vende a 8 euros, y la caja B que requiere 2 m de papel decorado y 0,5 m de rollo de cartón y que se vende a 12 euros. En el almacén disponen únicamente de 440 m de papel de regalo y de 65 m de rollo de cartón. Si suponemos que se vende toda la producción de cajas, ¿cuántas de cada tipo deberán de fabricarse para que el importe de las ventas sea máximo? ¿A cuánto ascenderá?
18. - Un fabricante de coches lanza una oferta especial en dos de sus modelos, ofreciendo el modelo A a un precio de 9000 euros y el modelo B a 12000 euros. La oferta está limitada por las existencias, que son 20 coches del modelo A y 10 coches del modelo B, queriendo vender al menos tantas unidades del modelo A como del modelo B. Por otra parte, para cubrir los gastos de esta campaña, los ingresos obtenidos con ella deben ser, al menos, de 36000 euros.
    a) ¿Cuántas unidades de cada modelo se podrán vender? Plantea el problema y representa gráficamente su conjunto de soluciones.
    b) ¿Cuántos coches deberá vender de cada modelo para maximizar sus ingresos? ¿Cuál es su importe?

AUTOEVALUACIÓN

1.- Indica cuál de las inecuaciones siguientes es estricta:

a) $5x+2y<7$; b) $5x+2y\le 7$; c) $5x+2y=7$; d) $5x+2y\ge 7$

2.- Indica cuál de las regiones factibles de los sistemas siguientes es acotado:

a) $\begin{cases} x+y\ge 5 \\ x\ge 0 \\ y>0 \end{cases}$ b) $\begin{cases} x+y\le 5 \\ x\ge 0 \\ y>0 \end{cases}$ c) $\begin{cases} x+y\le -5 \\ x\ge 0 \\ y>0 \end{cases}$ d) $\begin{cases} x+y>8 \\ x\ge 0 \\ y>0 \end{cases}$

3.- Indica cuál de las regiones factibles de los sistemas siguientes no posee solución:

a) $\begin{cases} x+y\ge 5 \\ x\ge 0 \\ y>0 \end{cases}$ b) $\begin{cases} x+y\le 5 \\ x\ge 0 \\ y>0 \end{cases}$ c) $\begin{cases} x+y\le -5 \\ x\ge 0 \\ y>0 \end{cases}$ d) $\begin{cases} x+y>8 \\ x\ge 0 \\ y>0 \end{cases}$

4.- Indica cuál de las afirmaciones siguientes es cierta:

a) La solución de un programa lineal está siempre en un vértice

b) La solución óptima de un programa lineal siempre se encuentra en la frontera de la región factible.

c) La región factible determina la función objetivo.

d) En un programa lineal se optimiza la región factible.

5.- Una nueva granja estudia cuántos patos y gansos puede albergar. Cada pato consume 3 kg de pienso por semana y cada ganso 4 kg de pienso por semana. El presupuesto destinado a pienso permite comprar 700 kg semanales. Además, quieren que el número de patos sea mayor que el de gansos. Denomina x al número de patos e y al de gansos. ¿Cuál es el máximo número de animales que podría albergar la granja?

6.- Para este problema la función objetivo es:

a) $3x+4y\rightarrow$Mín b) $x+y\rightarrow$Máx c) $x+y\rightarrow$Mín d) $3x+4y\rightarrow$Máx

7.- Para este problema las restricciones son:

a) $\begin{cases} 3x+4y\le 700 \\ x\ge 0 \\ y\ge 0 \end{cases}$ b) $\begin{cases} 3x+4y\ge 700 \\ x>0 \\ y>0 \end{cases}$ c) $\begin{cases} 4x+3y\ge 700 \\ x>0 \\ y>0 \end{cases}$ d) $\begin{cases} 3x+4y\le 700 \\ x\ge 0 \\ y\ge 0 \\ x>y \end{cases}$

8.- Resuelve el problema e indica si la solución es:

a) No tiene solución. b) 100 patos y 100 gansos. c) 233 patos y ningún ganso. d) Ningún ganso y 175 patos.

Apéndice: Problemas de Programación lineal en las P.A.A.U.

(1) Una empresa fabrica únicamente tapas y envases. Cada lote de tapas requiere de 1 litro de barniz y 5 minutos en el horno, mientras que cada lote de envases requiere de 2 litros de barniz y 3 minutos en el horno. Semanalmente se dispone de 1000 litros de barniz y 3000 minutos en el horno. Por restricciones de su infraestructura, la producción semanal entre los dos productos es, como mucho, de 650 lotes. a) ¿Cuántos lotes de cada tipo puede fabricar la empresa cada semana? Plantea el problema y representa gráficamente el conjunto de soluciones. ¿Se cumplirían los requisitos si la empresa fabricase 200 lotes de tapas y 100 lotes de envases? b) Si la empresa vende todo lo que fabrica y gana por cada lote de tapas fabricado 3000 euros y por cada lote de envases 4000 euros, ¿cuántos lotes de cada tipo deberá fabricar para maximizar sus ganancias?

(2) Un empresario dispone un determinado día de 3600 euros para fabricar ratones y teclados. Cada ratón le cuesta 30 euros y lo vende a 34 euros. En cuanto a los teclados, cada uno tiene asociado un coste de fabricación de 40 euros y un precio de venta de 45 euros. Por restricciones de la empresa, no se pueden fabricar más de 95 aparatos en total en un día.

a) ¿Cuántos ratones y cuántos teclados puede fabricar en un día? Plantea el problema y representa gráficamente el conjunto de soluciones. ¿Podría fabricar en un día 15 ratones y 20 teclados?

b) Teniendo en cuenta que el beneficio es la diferencia entre el precio de venta y el coste y que la empresa vende todo lo que fabrica, ¿cuántos aparatos de cada tipo debe fabricar en un día para que el beneficio sea máximo?

(3) Una empresa fabrica dos tipos de piezas: *A* y *B*. Cada día debe fabricar al menos 6 piezas, disponiendo para ello de 160 horas de mano de obra. La fabricación de cada pieza tipo *A* necesita 8 horas de mano de obra y la de tipo *B* necesita 16 horas de mano de obra. Existe además la restricción de que no puede fabricar más de 4 piezas de tipo *A*. a) ¿Cuántas piezas de cada tipo puede fabricar en un día? Plantea el problema y representa gráficamente el conjunto de soluciones. b) Si vende todo lo que fabrica y por cada pieza tipo *A* obtiene un beneficio de 120 euros y por cada pieza tipo *B* obtiene un beneficio de 100 euros, ¿cuántas piezas de cada tipo debe fabricar cada día para maximizar su beneficio? ¿A cuánto asciende dicho beneficio?

(4) Una carpintería elabora dos tipos de muebles, A y B. Cada mueble de tipo *A* requiere 6 días de trabajo para su elaboración, mientras que cada mueble de tipo *B* requiere 3 días. Por la estructura organizativa de dicha empresa, cada mes, que consta de 30 días laborables, se puede elaborar, a lo sumo, 4 muebles de tipo *A* y 8 de tipo *B*.

a) ¿Cuántos muebles de cada tipo pueden fabricar en un mes para cumplir con todos los requerimientos anteriores? Plantea el problema y representa gráficamente el conjunto de soluciones.

b) Si venden todo lo que fabrican y el beneficio proporcionado por cada mueble tipo *A* vendido es de 500 euros y por cada mueble de tipo *B* es de 200 euros, ¿cuántos muebles de cada tipo deberían fabricar para maximizar el beneficio? ¿Cuántos tendrían que fabricar para maximizar el número de muebles elaborados?

(5) Una fábrica de cerveza produce cerveza negra y rubia. Para la elaboración de un bidón de cerveza negra son necesarios 2 kg de lúpulo, 4 kg de malta y una hora de trabajo. Para la elaboración de un bidón de cerveza rubia son necesarios 3 kg de lúpulo, 2 kg de malta y una hora de trabajo. Cada día se dispone de 60 kg de lúpulo, 80 kg de malta y 22 horas de trabajo. El beneficio obtenido es de 60 euros por cada bidón de cerveza negra vendido y de 40 euros por cada bidón de cerveza rubia.

a) ¿Cuántos bidones de cerveza de cada tipo pueden producir al día para cumplir con todos los requerimientos anteriores? Plantea el problema y representa gráficamente el conjunto de soluciones. ¿Es posible que en un día cualquiera se hayan producido 15 bidones de cerveza negra y 20 de cerveza rubia?

b) Si vende todo lo que produce, ¿cuántos bidones de cerveza de cada tipo deberían producir para maximizar el beneficio?

(6) Una vagoneta de una empresa está destinada a transportar paquetes de tipo *A* y *B* y soporta como mucho 1000 kg de peso. Se sabe además que cada paquete de tipo *A* pesa 20 kg y cada uno de tipo *B* pesa 25 kg. Por exigencias de la producción, en cada viaje debe transportar al menos 15 paquetes de tipo *A* y al menos 20 paquetes de tipo *B*.

a) ¿Cuántos paquetes de cada tipo se pueden transportar en un viaje? Plantea el problema y representa gráficamente el conjunto de soluciones. ¿Podría transportar en un viaje 17 paquetes de tipo *A* y al menos 20 paquetes de tipo *B*?

b) ¿Cuántos paquetes de cada tipo debería transportar en un viaje para maximizar el número total de paquetes transportados?

(7) Una nueva granja estudia cuántas gallinas y ocas puede albergar. Cada gallina consume 1 kg de pienso por semana y cada oca 5 kg de pienso por semana. El presupuesto destinado a pienso permite comprar 200 kg semanales. Además, quieren que el número de gallinas sea menor o igual que cinco veces el número de ocas.

a) ¿Cuántas gallinas y ocas podrá tener la granja? Plantea el problema y representa gráficamente el conjunto de soluciones. ¿Se cumplirían los requisitos si albergase 40 gallinas y 20 ocas?

b) Según estos requisitos, ¿cuál es el máximo número de animales que podría albergar la granja?

(8) Una fábrica está especializada en dos juguetes: bicicletas y patinetes. Al mes puede fabricar un máximo de 480 bicicletas y 600 patinetes. Para la elaboración de cada bicicleta son necesarias 2 horas de trabajo y para la elaboración de cada patinete es necesaria una hora de trabajo. Se dispone de un máximo de 1000 horas de trabajo al mes.

a) ¿Cuántas bicicletas y patinetes puede fabricar en un mes para cumplir con todos los requerimientos anteriores? Plantea el problema y representa gráficamente el conjunto de soluciones.

b) ¿Cuántas bicicletas y patinetes deberían fabricar para maximizar el número total de juguetes (bicicletas más patinetes) fabricados? ¿Cuántos juguetes fabrica en ese caso?

(9) Una costurera dispone de 36 metros de tela para hacer faldas y pantalones. Necesita 1 metro de tela para hacer una falda y 2 metros de tela para hacer un pantalón. Por exigencias del cliente, tiene que hacer al menos la misma cantidad de faldas que de pantalones y al menos 4 pantalones.

a) ¿Cuántas unidades puede hacer de cada prenda? Plantea el problema y representa gráficamente el conjunto de soluciones.

b) Si le cuesta 3 euros cada falda terminada y 9 euros cada pantalón, ¿cuántas unidades debe producir de cada tipo para minimizar los costes? ¿Cuánto sería en ese caso el coste total?

(10) Una compañía minera extrae dos tipos de carbón, hulla y antracita, de forma que todo el carbón extraído es vendido. Por exigencias gubernamentales, debe extraer diariamente al menos el triple de camiones de hulla que de antracita. Además, por la infraestructura de la compañía, como mucho se pueden extraer 80 camiones de carbón en un día y al menos 10 de ellos deben ser de antracita.

a) ¿Cuántos camiones de cada tipo de carbón se pueden extraer en un día? Plantea el problema y representa gráficamente el conjunto de soluciones. ¿Podría extraer en un día 20 camiones de hulla y 15 de antracita?

b) Si la ganancia por cada camión de hulla es de 4000 € y por cada camión de antracita es de 6000 €, ¿cuántos camiones de cada tipo debería extraer en un día para maximizar sus ganancias?

(11) En cierta quesería producen dos tipos de queso: mezcla y tradicional. Para producir un queso mezcla son necesarios 25 cl de leche de vaca y otros 25 cl de leche de cabra; para producir uno tradicional, sólo hacen falta 50 cl de leche de vaca. La quesería dispone de 3600 cl de leche de vaca y 500 cl de leche de cabra al día. Por otra parte, puesto que los quesos tradicionales gustan más, cada día produce al menos tantos quesos de tipo tradicional como de mezcla.

a) ¿Cuántas unidades de cada tipo podrá producir en un día cualquiera? Plantea el problema y representa gráficamente el conjunto de soluciones.

b) Si la quesería vende todo lo que produce y obtiene un beneficio de 3 euros por cada queso de tipo mezcla y de 4 euros por cada queso de tipo tradicional, ¿cuántas unidades de cada tipo debe producir diariamente para maximizar beneficios? ¿Qué beneficio obtiene en ese caso?

(12) Para que una encuesta sobre política de inmigración sea fiable, se exige que haya al menos 2300 personas entrevistadas, entre españoles y extranjeros, de las cuales como mucho 1000 serán extranjeros y también se exige que los extranjeros sean por lo menos un 10% del total de personas entrevistadas.

a) ¿Cuántos españoles y cuántos extranjeros pueden ser entrevistados? Plantea el problema y representa gráficamente el conjunto de soluciones.

b) Si el coste estimado de cada entrevista es de 6 euros, ¿cuál sería el máximo coste que podría tener la encuesta? ¿a cuántos españoles se habría entrevistado en dicho caso?

(13) Un tenista planea su entrenamiento para la próxima temporada. Dispone de 48 horas semanales en las que puede entrenar y debe repartir ese tiempo entre la preparación física y mejorar su técnica. El entrenador le obliga a dedicar al menos 5 horas semanales a la parte física y al menos 30 horas en total, entre preparación física y técnica. Por otra parte, él quiere dedicar al menos el doble de tiempo a la parte técnica que a la preparación física.

a) ¿Cuántas horas puede dedicar a cada tipo de entrenamiento? Plantea el problema y representa gráficamente el conjunto de soluciones.

b) Si la hora de preparación física le cuesta 50 euros y la de mejora de la técnica 80 euros, ¿cuántas horas debe dedicar a cada tipo de entrenamiento para minimizar el coste? ¿a cuánto ascendería dicho coste?

(14) Para cubrir las nuevas necesidades de un centro hospitalario en los servicios de corta estancia y planta se quiere asignar un máximo de 24 auxiliares de enfermería. En corta estancia debería haber al menos 4. Como poco, tiene que haber 8 auxiliares más en planta que en corta estancia.

a) ¿Qué combinaciones de auxiliares para cada tipo de servicio se pueden asignar? Plantea el problema y representa gráficamente las soluciones.

b) ¿Cuál es la combinación con menos personal? ¿Cuál asigna más auxiliares en corta estancia?

(15) Una empresa de alta confitería elabora tartas y bizcochos especiales, disponiendo de 80 horas cada día para la elaboración de dichos productos. Cada tarta requiere 1 hora para su elaboración y cada bizcocho 2 horas. Además debe abastecer a un restaurante que compra todos los días 20 tartas y 10 bizcochos.

a) ¿Cuántas unidades de cada tipo podrá elaborar en un día para cumplir todos los requisitos anteriores? Plantea el problema y representa gráficamente las soluciones.

b) Si cada tarta le cuesta a la empresa 15 € y cada bizcocho le cuesta 12 €, ¿cuántos productos de cada tipo debe elaborar en un día para minimizar el coste total? ¿Y para maximizar el número de productos elaborados?

(16) *Fabada Móvil* sólo comercializa dos platos: fabada tradicional y *light*. Cada ración de fabada tradicional lleva 100 g de fabes y 100 g de *compangu*, mientras que cada ración de fabada *light* lleva 110 g de fabes y 50 g de *compangu*. Cada día *Fabada Móvil* dispone de 11000 g de fabes y de 6200 g de *compangu*. Tiene un cliente fijo que compra cada día 4 raciones de fabada *light* y que *Fabada Móvil* se ha comprometido a abastecer.

a) ¿Cuántas raciones de cada tipo puede preparar *Fabada Móvil* en un día para cumplir con todos los requerimientos anteriores? Plantea el problema y representa gráficamente el conjunto de soluciones.

b) ¿Cuántas raciones de cada tipo debería preparar para maximizar el número total de raciones de fabada que puede poner a la venta? ¿Cuántas tendría que preparar para maximizar el número de raciones de fabada tradicional que puede poner a la venta?

(17) El aforo máximo de un circo es de 300 personas. Se exige que cada niño vaya acompañado al menos de un adulto. Por otro lado, una subvención recibida obliga a que el número de adultos entre el público sea como mucho el doble que el de niños. El circo gana 30 € por adulto y 15 € por niño.

a) ¿Cuántas entradas de adulto y cuántas de niño se podrán vender en total para la próxima sesión? Plantea el problema y representa gráficamente el conjunto de soluciones.

b) ¿Cuántas entradas de cada tipo debe vender el circo para maximizar sus ganancias? ¿Y para maximizar el número de niños entre el público?

(18) Una mueblería fabrica mesas y sillas. La fabricación de una mesa requiere de 1 hora de corte, 4 horas de ensamble y 3 horas de acabado, generando un beneficio de 100 €. La fabricación de una silla requiere de 2 horas de corte, 4 h de ensamble y 1 h de acabado, generando un beneficio de 50 €. Cada día se dispone de un máximo de 14 horas de corte, 32 h de ensamble y 18 h de acabado.

a) ¿Cuántos artículos de cada tipo puede fabricar cada día esta mueblería? Plantea el problema y representa gráficamente el conjunto de soluciones.

b) Si vende cuanto produce, ¿cuántos artículos de cada tipo debe fabricar diariamente para maximizar el beneficio? ¿A cuánto asciende dicho beneficio?

(19) Una empresa especializada organiza un cumpleaños para 10 niños, en el que se van a servir helados y flanes. Puesto que todos los niños quieren tener postre, el número de helados más el de flanes tiene que ser al menos igual al número de niños en el cumpleaños. El cliente ha exigido que haya al menos 2 helados más que flanes. La empresa dispone como mucho de 14 helados.

a) ¿Cuántas unidades de cada tipo puede servir la empresa para cumplir todos los requisitos anteriores? Plantea el problema y representa gráficamente las soluciones.

b) Si la empresa cobra al cliente por cada helado 3 euros y por cada flan 2 euros, ¿cuántas unidades de cada tipo deberá servir para maximizar sus ingresos? ¿A cuánto ascenderán dichos ingresos?

(20) En una determinada empresa, se elige energía eólica o energía eléctrica al principio de cada día para el funcionamiento de una máquina que fabrica coches y motos de juguete. Los días que está con eólica la máquina fabrica 20 coches y 10 motos. Los días que está con eléctrica fabrica 40 coches y 90 motos. La empresa recibe el pedido de un cliente que desea al menos 360 coches y al menos 600 motos y que tiene que ser abastecido como mucho en 20 días.

a) ¿Cuántos días deberá utilizar cada tipo de energía para abastecer a dicho cliente cumpliendo los plazos establecidos? Plantea el problema y representa gráficamente el conjunto de soluciones.

b) Si a la empresa le cuesta 1000 euros cada día que utiliza la energía eólica y 2500 euros cada día que utiliza la eléctrica, ¿cuántos días debe utilizar cada una para minimizar sus gastos? ¿Y para abastecer al cliente lo antes posible?

(21) Una ONG va a realizar un envío compuesto de lotes de alimentos y de medicamentos. Como mínimo ha de mandar 4 lotes de medicamentos, pero por problemas de caducidad no pueden mandarse más de 8 lotes de estos medicamentos. Para realizar el transporte se emplean 4 contenedores para cada lote de alimentos y 2 para cada lote de medicamentos. El servicio de transporte exige que al menos se envíe un total de 24 contenedores, pero que no se superen los 32.

a) ¿Qué combinaciones de lotes de cada tipo pueden enviarse? Plantea el problema y representa gráficamente las soluciones. ¿Pueden enviarse 4 lotes de alimentos y 5 de medicamentos?

b) Si la ONG quiere maximizar el número de lotes enviados, ¿qué combinación debe elegir?

(22) Una empresa de excavaciones y movimientos de tierra va a realizar un pedido de gasóleo A para sus vehículos de transporte (a un precio de 0,90 euros el litro) y B para la maquinaria (a 0,70 euros el litro). Como poco, se necesitan 1000 litros de gasóleo A, y como mucho 3600 de gasóleo B. En total, entre ambos tipos de gasóleo, no debe pedir más de 5000 litros. Además, se quiere pedir por lo menos 1000 litros más de gasóleo B que de gasóleo A.

a) ¿Cuántos litros de cada tipo de gasóleo se pueden pedir? Plantea el problema y representa gráficamente las soluciones.

b) ¿Cuál es la composición del pedido más barato? ¿Y la del más caro?

(23) En la remodelación de un centro de enseñanza se quiere habilitar un mínimo de 8 nuevas aulas, entre pequeñas (con capacidad para 50 alumnos) y grandes (con capacidad para 120). Como mucho, un 25 % de aulas podrán ser grandes. Además, el centro necesita que se habilite al menos 1 aula grande, y no más de 15 pequeñas.

a) ¿Qué combinaciones de aulas de cada tipo se pueden habilitar? Plantea el problema y representa gráficamente el conjunto de soluciones.

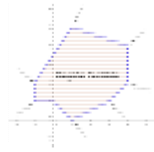
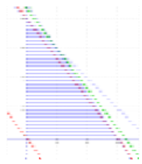
b) ¿Cuál es el conjunto mínimo de aulas pequeñas que se pueden habilitar? Si se quiere que la capacidad total conseguida con las aulas habilitadas sea lo mayor posible ¿cuántas tendría que hacer de cada tipo? ¿Cuántos alumnos cabrían en total?

(24) En una empresa se está discutiendo la composición de un comité para negociar los sueldos con la dirección. En el comité habrá sindicalistas e independientes. El número total de miembros no deberá ser inferior a 10 ni superior a 20. Al menos un 40 % del comité serán sindicalistas. El número de independientes será como poco una cuarta parte del de sindicalistas.

a) ¿Qué combinaciones de miembros de cada tipo puede tener el comité? Plantea el problema y representa gráficamente el conjunto de soluciones. ¿Puede haber 4 sindicalistas y 16 independientes?

b) Si se quiere que el número de independientes sea máximo, ¿cuál será la composición del comité?

RESUMEN

Sistemas de inecuaciones lineales	Un sistema de inecuaciones lineales es el conjunto de dos o más inecuaciones que deben cumplirse a la vez.	$\begin{cases} x+y \le 80 \\ 30x+20y \le 1800 \\ x, y \ge 0 \end{cases}$
Programación lineal	Se llama **programación lineal**, o también programa lineal, a la formulación algebraica que pretende optimizar (maximizar o minimizar) **una función lineal** de varias variables, sujeta a una serie de restricciones, también lineales. La función lineal a optimizar se denomina **función objetivo**, y las restricciones se expresan mediante un sistema de inecuaciones lineales que debemos resolver.	$\text{f.o.: } f(x,y) = a\cdot x + b\cdot y \to \text{Máx o mín}$ $s.a.: \begin{cases} a_1x+b_1y \ne c_1 \\ a_2x+b_2y \ne c_2 \\ \dots \\ a_kx+b_ky \ne c_k \end{cases}$
Teorema fundamental	En un programa lineal con dos variables, si existe una solución única que optimice la función objetivo, ésta se encuentra en un punto extremo (vértice) de la región factible acotada, nunca en el interior de dicha región.	
Método algebraico de resolución	El método algebraico consiste en **evaluar la función objetivo en cada uno de los vértices** (o sea, sustituir las coordenadas de los vértices de la región factible en la función objetivo) y comprobar cuál (o cuáles) de ellos proporciona el máximo o mínimo de la función objetivo.	
Método gráfico de resolución	En este método los vértices de la región factible se hallan gráficamente. Sobre la región factible se representan las rectas de nivel asociadas a la función objetivo ($ax+by=k$) y se ve cuál es la que toma un valor *k* óptimo.	
Tipos de soluciones	- Factibles con solución única. - Factibles con solución múltiple, - Factible no acotada. - No factible.	

CAPÍTULO 5: LÍMITES Y CONTINUIDAD.

EJERCICIOS Y PROBLEMAS.

1. – Calcula los siguientes límites:

a) $\lim\limits_{x\to 0} 2$ b) $\lim\limits_{x\to +\infty} x^{-5}$ c) $\lim\limits_{x\to -3} \frac{1}{x^2}$ d) $\lim\limits_{x\to -\infty} x^5$ e) $\lim\limits_{x\to -\infty} (-7)$ f) $\lim\limits_{x\to 0^+} \frac{1}{x^{10}}$

g) $\lim\limits_{x\to -\infty} \frac{1}{x^{10}}$ h) $\lim\limits_{x\to 0^-} \frac{1}{x^{13}}$ i) $\lim\limits_{x\to +\infty} \frac{1}{x^{13}}$ j) $\lim\limits_{x\to -1} x^6$ k) $\lim\limits_{x\to 0^-} x^3$ l) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{1}{x^6}$

2. – Halla los siguientes límites:

a) $\lim\limits_{x\to +\infty} x^7$ b) $\lim\limits_{x\to -\infty} x^7$ c) $\lim\limits_{x\to +\infty} \sqrt[7]{x}$ d) $\lim\limits_{x\to -\infty} \sqrt[7]{x}$ e) $\lim\limits_{x\to +\infty} \frac{1}{x^7}$ f) $\lim\limits_{x\to -\infty} \frac{1}{x^7}$

g) $\lim\limits_{x\to +\infty} 7^x$ h) $\lim\limits_{x\to -\infty} 7^x$ i) $\lim\limits_{x\to +\infty} \left(\sqrt{7}\right)^x$ j) $\lim\limits_{x\to -\infty} \left(\sqrt{7}\right)^x$ k) $\lim\limits_{x\to +\infty} 7^{\frac{1}{x}}$ l) $\lim\limits_{x\to -\infty} 7^{\frac{1}{x}}$

m) $\lim\limits_{x\to +\infty} x^5$ n) $\lim\limits_{x\to -\infty} x^5$ ñ) $\lim\limits_{x\to +\infty} \sqrt[3]{x^2}$ o) $\lim\limits_{x\to -\infty} \sqrt[3]{x^2}$ p) $\lim\limits_{x\to +\infty} \frac{1}{x^4}$ q) $\lim\limits_{x\to -\infty} \frac{1}{x^4}$

r) $\lim\limits_{x\to +\infty} 5^x$ s) $\lim\limits_{x\to -\infty} 5^x$ t) $\lim\limits_{x\to +\infty} \left(\frac{1}{3}\right)^x$ u) $\lim\limits_{x\to -\infty} \left(\frac{1}{3}\right)^x$ v) $\lim\limits_{x\to +\infty} 4^{x^2}$ w) $\lim\limits_{x\to -\infty} 4^{x^2}$

3. – Halla los siguientes límites:

a) $\lim\limits_{x\to +\infty} \frac{x^2+1}{x-3}$ b) $\lim\limits_{x\to -\infty} \frac{x^2+1}{x-3}$ c) $\lim\limits_{x\to +\infty} \frac{x^2+1}{3x^2}$ d) $\lim\limits_{x\to -\infty} \frac{x^2+1}{3x^2}$

e) $\lim\limits_{x\to +\infty} \frac{1-x^6}{3x^2+2x-1}$ f) $\lim\limits_{x\to -\infty} \frac{1-x^6}{3x^2+2x-1}$ g) $\lim\limits_{x\to +\infty} \frac{1-x^4}{-x^4+2x^2-5}$ h) $\lim\limits_{x\to +\infty} \frac{16}{x-2}$

i) $\lim\limits_{x\to +\infty} \frac{x^2-2x+3}{x^3-3x^2-5}$ j) $\lim\limits_{x\to -\infty} \frac{x^2-2x+3}{x^3-3x^2-5}$ k) $\lim\limits_{x\to +\infty} \frac{1-x^4}{-x^4+2x^2-5}$ l) $\lim\limits_{x\to -\infty} \frac{16}{x-2}$

4. – Determina el límite de estas funciones:

a) $\lim\limits_{x\to +\infty} (3x+1)$ b) $\lim\limits_{x\to -\infty} \frac{5}{x+1}$ c) $\lim\limits_{x\to +\infty} \left(x^2-5x+6\right)$ d) $\lim\limits_{x\to -\infty} \left(3-x+x^2-x^3\right)$

e) $\lim\limits_{x\to +\infty} \left(3-\frac{x-4}{2}\right)$ f) $\lim\limits_{x\to +\infty} 2^{x-1}$ g) $\lim\limits_{x\to -\infty} \left(\frac{3}{5}\right)^{x^2}$ h) $\lim\limits_{x\to +\infty} 3^{\frac{2}{3x-1}}$

i) $\lim\limits_{x\to -\infty} (x+3)(2x-3)$ j) $\lim\limits_{x\to +\infty} \frac{x^2+3x-2}{x}$ k) $\lim\limits_{x\to -\infty} \sqrt[3]{2x^3+1}$ l) $\lim\limits_{x\to +\infty} \left(-x^3+8x^2-x+8\right)$

m) $\lim\limits_{x\to +\infty} \sqrt{x^2-3x-2}$ n) $\lim\limits_{x\to -\infty} \frac{6x-2}{3x^3-7x+1}$ ñ) $\lim\limits_{x\to +\infty} \frac{3x^2-8x+16}{35}$ o) $\lim\limits_{x\to +\infty} \frac{5-2x+3x^2-x^3}{2x^2-5x-4}$

5. – Determina los límites de estas funciones:

a) $\lim\limits_{x\to +\infty} \frac{\sqrt{x^2+3}}{2x+1}$ b) $\lim\limits_{x\to +\infty} \frac{2x^2+x-1}{\sqrt{x^2+3}}$ c) $\lim\limits_{x\to -\infty} \frac{2x^2+x-1}{\sqrt{x^2+3}}$ d) $\lim\limits_{x\to +\infty} \frac{2x^2-12x+9}{\sqrt[3]{x^5+5x-2}}$

e) $\lim\limits_{x\to +\infty} \frac{\sqrt{x}+x}{x}$ f) $\lim\limits_{x\to +\infty} \frac{7x+\sqrt{3x-2}}{2x}$ g) $\lim\limits_{x\to +\infty} \frac{2x-\sqrt{6+x}}{2x+4}$ h) $\lim\limits_{x\to -\infty} \frac{\sqrt{x^2+1}+2x}{6x-3}$

6. – Calcula los siguientes límites:

a) $\lim\limits_{x\to +\infty} x^{-4}$ b) $\lim\limits_{x\to -\infty} 4x^4$ c) $\lim\limits_{x\to 0^+} \left[\frac{3}{x^3}\right]$ d) $\lim\limits_{x\to 0} \left[\frac{x^{-2}}{5}\right]$ e) $\lim\limits_{x\to 0^-} \left[\frac{x^5}{3}\right]$ f) $\lim\limits_{x\to -\infty} \frac{2x^4-3x-1}{x^3+3}$

g) $\lim\limits_{x\to -\infty} \left[\frac{2}{x^5}\right]$ h) $\lim\limits_{x\to +\infty} 3^{-x}$ i) $\lim\limits_{x\to -\infty} 3^{-x}$ j) $\lim\limits_{x\to +\infty} \left[\frac{2}{3}\right]^x$ k) $\lim\limits_{x\to +\infty} \frac{x^3}{\sqrt{x^2-2}}$ l) $\lim\limits_{x\to +\infty} \left[\frac{2}{x^2+1}+\frac{3}{x+2}\right]$

Autores: Leticia González Pascual y Álvaro Valdés

7. – Resuelve los siguientes límites:

a) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{4x^2-1}{5x}\cdot\dfrac{6x}{x^3+1}\right)$ b) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{x^2+5}{1-2x}:\dfrac{5x^3}{x^2+12}\right)$ c) $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\dfrac{2x^2+3}{5x}+\dfrac{6x-x^2}{3x}\right)$

8. – Halla los siguientes límites de funciones:

a) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(x^3-12x\right)$ b) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x}{\sqrt{x}}$ c) $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(x^2-4x\right)$ d) $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(x^3-\dfrac{3}{x^2}\right)$

e) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(x-x^2\right)$ f) $\lim\limits_{x\to+\infty}(2x-3)^x$ g) $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(x^3+5x^2-3\right)$ h) $\lim\limits_{x\to-\infty}\left[\left(x^2+1\right)^2+4x\right]$

9. – Calcula los siguientes límites:

a) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left[2x^3-7x+2\right]$ b) $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{2}{3x^2-5x+2}$ c) $\lim\limits_{x\to-\infty}\left[4x^4-7x+5\right]$

d) $\lim\limits_{x\to-\infty}\left[-3x^5+2x-4\right]$ e) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left[-x^2+3x-2\right]$ f) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{2x^2-7x+5}{-2x^2+4x-3}$

g) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\sqrt{x^2+7}}{2x}$ h) $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{\sqrt[3]{x^4-3x^2+2}}{\sqrt[3]{4x^2+5}}$ i) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\sqrt{x}+3}{\sqrt{2x}-5}$

j) $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{3x^5-2x+1}{7x^4-2x^2}$ k) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{-x^2-5x+1}{2x^3-3}$ l) $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{-2}{1-x^3}$

10. – Calcula los siguientes límites:

a) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{x^2-1}{x}-\dfrac{1+2x^2}{2x-1}\right)$ b) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2-2x}-x\right)$ c) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(2x-\sqrt{1+4x}\right)$

d) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{9x^2+3x}-3x\right)$ e) $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(x-\sqrt{x^2-4x}\right)$ f) $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(x+\sqrt{x^2-4x}\right)$

11. – Calcula los siguientes límites:

a) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^{2x-1}$ b) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(1-\dfrac{3}{x}\right)^{6x+2}$ c) $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(2-\dfrac{4x-1}{4x}\right)^{3x+2}$ d) $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\dfrac{x}{x+3}\right)^{3x+1}$

e) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{x^2+1}{x^2}\right)^{x-1}$ f) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{x^2-x+2}{x^2+1}\right)^{x+6}$ g) $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\dfrac{x^2-1}{x^2+1}\right)^{\frac{1}{2x}}$ h) $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(1-\dfrac{2}{x}\right)^{1-x}$

12. – Calcula los siguientes límites:

a) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left[\sqrt{x^2+2x}-x\right]$ b) $\lim\limits_{x\to-3}\left[\dfrac{x^3+27}{x^2-9}\right]$ c) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left[\dfrac{2}{x^2+1}-\dfrac{3}{x+2}\right]$ d) $\lim\limits_{x\to-\infty}\left[\dfrac{2x^4-3x-1}{x^3+3}\right]$

13. – Calcula los siguientes límites:

a) $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(x+4^x\right)$ b) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{3x^2-5}{3x^2+x}\right)^{x^2-1}$ c) $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(1+\dfrac{2}{x}\right)^{1-x}$ d) $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\dfrac{x^2-2x+2}{2x^2+3x-2}\right)^{x^2-3x}$

e) $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(x+3^{-x}\right)$ f) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\sqrt{x+\sqrt{x}}}{\sqrt{x}+1}$ g) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left[\sqrt{4x^2-5}-(2x-3)\right]$

14. – Calcula los siguientes límites:

a) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left[\dfrac{2}{x+1}\cdot\sqrt{x^2+1}\right]$ b) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left[\sqrt{9x^2+2x-3}-3x\right]$ c) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left[\sqrt{x}\cdot\left(\sqrt{x+3}-\sqrt{x}\right)\right]$

d) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left[\dfrac{x^2+2}{x+1}-\dfrac{x^2+1}{x}\right]$ e) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left[\dfrac{2x^2-6x}{2x^2-x-5}\right]^{\frac{x^2}{2}}$ f) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left[\dfrac{4-3x}{5-3x}\right]^{x-3}$

Autores: Leticia González Pascual y Álvaro Valdés
LibrosMareaVerde.tk

15. – Resuelve los siguientes límites:

a) $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{x+1}{3x+3}$ b) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2x^2+2x}{x^2-3x}$ c) $\lim\limits_{x\to 5}\dfrac{\sqrt{25-x^2}}{x-5}$ d) $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{2x^2-18}{\sqrt{x^2-9}}$

16. – Calcula los siguientes límites:

a) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2-x-2}{2x^2-3x-2}$ b) $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{x^2-x-2}{2x^2-3x-2}$ c) $\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{x^3+5x^2+6x}{x^3+x^2-8x-12}$ d) $\lim\limits_{x\to -3}\dfrac{x^3+5x^2+6x}{x^3+x^2-8x-12}$

17. – Calcula estos límites:

a) $\lim\limits_{x\to 2^-}\dfrac{x^2-2x+1}{x-3}$ b) $\lim\limits_{x\to 2^+}\dfrac{x^2-2x+1}{x-3}$ c) $\lim\limits_{x\to 3^-}\dfrac{x^2-2x+1}{x-3}$ d) $\lim\limits_{x\to 3^+}\dfrac{x^2-2x+1}{x-3}$

e) $\lim\limits_{x\to -1^-}\dfrac{x-3}{(x-1)^2}$ f) $\lim\limits_{x\to -1^+}\dfrac{x-3}{(x-1)^2}$ g) $\lim\limits_{x\to 2^-}\dfrac{x^2+x-6}{x^3-x^2-8x+12}$ h) $\lim\limits_{x\to 2^+}\dfrac{x^2+x-6}{x^3-x^2-8x+12}$

18. – Calcula los siguientes límites:

a) $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x^2-3}{x+2}$ b) $\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{x^2-3}{x+2}$ c) $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{2}}\dfrac{1}{\operatorname{sen} x}$ d) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{\operatorname{sen} x}$

19. – Calcula los siguientes límites:

a) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^3-1}{x^3+2x^2-3x}$ b) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2+x}{x^3-2x^2+x}$ c) $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x^2-9}{5x^2-13x-6}$ d) $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{x^4-1}{x^3+1}$

e) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^4-3x^2}{x^2+x}$ f) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2-5x+6}{x^2-4x+4}$ g) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1-x}}{2x}$ h) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2-1}{\sqrt{x}-1}$

i) $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{\sqrt{x}-\sqrt{3}}{x^2-9}$ j) $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{3-\sqrt{5+x}}{2-\sqrt{8-x}}$ k) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{2-x}-\sqrt{2+x}}{x^2+x}$ l) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{\sqrt{x+2}-2}{\sqrt{2x}-2}$

m) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{x+9}-3}{\sqrt{x+16}-4}$ n) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt{x-1}+\sqrt{x+1}}{\sqrt{x+1}-\sqrt{x-1}}$ o) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{\sqrt{x^2+5}-3}{\sqrt{x+7}-3}$

20. – Calcula los siguientes límites:

a) $\lim\limits_{x\to -3}\left[\dfrac{x^3+27}{x^2-9}\right]$ b) $\lim\limits_{x\to 1^-}\left[\dfrac{2x^2-2}{x^2-2x+1}\right]$ c) $\lim\limits_{x\to 2}\left[\dfrac{x^2-4}{x+1}\cdot\dfrac{x^2+4}{x^2-2x}\right]$ d) $\lim\limits_{x\to 1^-}\dfrac{2x^2-2}{x^2-2x+1}$

21. – Calcula los siguientes límites:

a) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2+1}{x-1}$ b) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2+x}{x^2}$ c) $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x+5}{|x-3|}$ d) $\lim\limits_{x\to 2}[x-1]^{\frac{3}{x-2}}$

e) $\lim\limits_{x\to 1}\left[\dfrac{x^2+4}{x+4}\right]^{\frac{x}{x-1}}$ f) $\lim\limits_{x\to 1}\left[\dfrac{x+2}{x-1}-\dfrac{x-2}{x^2-1}\right]$ g) $\lim\limits_{x\to 2^+}\dfrac{\sqrt{2x-4}}{x-2}$ h) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2-1}{\sqrt{x+3}-2}$

i) $\lim\limits_{x\to 0}\left[\dfrac{2}{x^3}\cdot\dfrac{x^2+2x}{3}\right]$ j) $\lim\limits_{x\to +\infty}\left[\dfrac{5x-2}{5x+3}\right]^{3x}$ k) $\lim\limits_{x\to 0}\left[\dfrac{1}{x^2}\left(\dfrac{1}{x+2}-\dfrac{1}{x^2+2}\right)\right]$

22. – Calcula los siguientes límites: a) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt{1-x^3}}{\sqrt{1-x^2}}$ b) $\lim\limits_{x\to 1^+}\left(\dfrac{2+\ln x}{3+\ln x^2}\right)^{\frac{-3}{x-1}}$

23. – Calcula los límites laterales y el límite, cuando exista, de las siguientes funciones en los puntos que se indican:

a) $f(x)=\begin{cases}2x-2 & \text{si } x<3\\ 2x & \text{si } 3\le x\end{cases}$ en $x=3$ b) $f(x)=\begin{cases}x^2+3x-1 & \text{si } x<1\\ x+2 & \text{si } 1\le x\end{cases}$ en $x=1$

24. – Halla el valor de los siguientes límites:

a) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{3^{3/x}-2}{2^{1/x}+2}$ b) $\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{3^{1/x}-4x}{4^{1/x}+3x-2}$ c) $\lim\limits_{x\to0^-}\dfrac{4^{2/x}+3x^2+1}{5^{3/x}-3+2x}$ d) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{2^{4/x}-2x^2+3}{3^{1/x}-3-2x}$

25. – Calcula el valor de los siguientes límites: a) $\lim\limits_{x\to3}\dfrac{\sqrt{x^2+7}-4}{2-x+1}$ b) $\lim\limits_{x\to2}\dfrac{2^x-4}{2^{2x}-5\cdot2^x+4}$

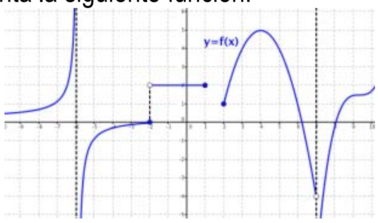
26. – Dada la función $f(x)=\begin{cases}3x-1 & si \quad x<0\\ 0 & si \quad x=0\\ 2x+5 & si \quad x>0\end{cases}$ calcula: a) $\lim\limits_{x\to2}f(x)$ b) $\lim\limits_{x\to-3}f(x)$ c) $\lim\limits_{x\to0^-}f(x)$ d) $\lim\limits_{x\to0^+}f(x)$.

¿Tiene alguna discontinuidad?

27. – Estudia la continuidad de las siguientes funciones:

a) $f(x)=\begin{cases}x^2-1 & \text{si} \quad x\le2\\ x+2 & \text{si} \quad x>2\end{cases}$ b) $f(x)=\begin{cases}x^2+1 & \text{si} \quad x<2\\ 2x-1 & \text{si} \quad 2\le x<4\\ 5 & \text{si} \quad x\ge4\end{cases}$

28. – Clasifica las discontinuidades que presenta la siguiente función:



29. – Estudia la continuidad de las siguientes funciones:

a) $f(x)=\begin{cases}x^2-4 & \text{si} \quad x<2\\ x-2 & \text{si} \quad 2\le x\le4\\ 5 & \text{si} \quad x>4\end{cases}$ b) $g(x)=\begin{cases}\dfrac{5}{x-5} & \text{si} \quad x\le0\\ \sqrt{x+1} & \text{si} \quad 0<x\le3\\ \dfrac{10}{x+2} & \text{si} \quad x>3\end{cases}$

30. – Estudia la continuidad de las funciones:

a) $f(x)=\dfrac{x+1}{x^2+x}$ b) $f(x)=\begin{cases}1 & \text{si} \quad x\in\mathbb{Z}\\ 0 & \text{si} \quad x\notin\mathbb{Z}\end{cases}$ c) $f(x)=|x-3|$

d) $f(x)=\begin{cases}3^{\frac{1}{x}} & si \quad x\in\mathbb{R}^*\\ 0 & si \quad x=0\end{cases}$ e) $f(x)=\begin{cases}x^2-1 & \text{si} \quad x\le2\\ x+1 & \text{si} \quad x>2\end{cases}$

31. – Estudia la continuidad de la función $f(x)=\dfrac{1}{x}$ en el intervalo $(2,5)$.

32. – Estudia la continuidad de las funciones:

a) $f(x)=\begin{cases}x+1 & \text{si} \quad x\le-1\\ x^2-3 & \text{si} \quad x>-1\end{cases}$ b) $f(x)=\begin{cases}3x-2 & \text{si} \quad x<-1\\ x^2+4x-1 & \text{si} \quad -1\le x\le2\\ x+11 & \text{si} \quad x>2\end{cases}$

c) $f(x)=\begin{cases}\dfrac{4}{x-4} & \text{si} \quad x<0\\ x-1 & \text{si} \quad 0<x\le3\\ \dfrac{1}{x-3} & \text{si} \quad x>3\end{cases}$ d) $f(x)=\begin{cases}-2 & \text{si} \quad x<-2\\ -x^2+4 & \text{si} \quad -2\le x\le2\\ 2 & \text{si} \quad x>2\end{cases}$

e) $f(x)=\begin{cases}\dfrac{x^2-9}{x-3} & \text{si} \quad x\ne3\\ 6 & \text{si} \quad x=3\end{cases}$ f) $f(x)=\begin{cases}-5-\dfrac{|x|}{x} & \text{si} \quad x\ne0\\ 5 & \text{si} \quad x=0\end{cases}$

g) $f(x)=|x^2-6x+5|$ h) $f(x)=\begin{cases}|3-x| & si \quad x\le5\\ \ln e^2 & si \quad x>5\end{cases}$

Autores: Leticia González Pascual y Álvaro Valdés

33. – Determina el valor de a para que esta función sea continua en todo $\mathbb{R}$: $f(x)=\begin{cases} \dfrac{x+1}{x} & \text{si} \quad x \le -2 \\ -x^2+a & \text{si} \quad x > -2 \end{cases}$

34. – Determina el valor del parámetro b para que la función $f(x)=\begin{cases} 2x-3 & \text{si} \quad x \le 3 \\ x+b & \text{si} \quad x > 3 \end{cases}$ sea continua en todo su dominio.

35. – Halla el valor de k para que la función $f(x)=\begin{cases} \dfrac{x^2-4}{x+2} & \text{si} \quad x \ne -2 \\ k & \text{si} \quad x = -2 \end{cases}$ sea continua en $x=-2$.

36. – Calcula m, n, p y q para que la siguiente función sea continua en todo $\mathbb{R}$:

$$f(x)=\begin{cases} \dfrac{3}{x} & \text{si} \quad x<-8 \\ -2m+3 & \text{si} \quad -8 \le x < -4 \\ x-\dfrac{1}{n} & \text{si} \quad -4 \le x < 2 \\ px & \text{si} \quad 2 \le x \end{cases}$$

37. – Calcula k, en cada caso, de modo que las siguientes funciones sean continuas en todo $\mathbb{R}$.

a) $f(x)=\begin{cases} kx-3 & \text{si} \quad x<4 \\ -x^2+10x-13 & \text{si} \quad x \ge 4 \end{cases}$

b) $f(x)=\begin{cases} 1+|x| & \text{si} \quad x<0 \\ k & \text{si} \quad x=0 \\ \dfrac{3}{2}x+1 & \text{si} \quad x>0 \end{cases}$

38. – El espacio recorrido por un móvil en función del tiempo viene dado por la siguiente función:

$$e(t)=\begin{cases} 3t^2 & \text{si} \quad 0 \le t < 2 \\ 3t+a & \text{si} \quad 2 \le t \le 5 \\ -t^2+13t+b & \text{si} \quad 5<t \end{cases}$$

Determina los valores de a y b, para que la función sea continua en $t=2$ y $t=5$.

39. – Un comerciante quiere vender un determinado producto, y para ello cobra 6 € por cada unidad. No obstante, si se le encargan más de 10 unidades, disminuye el precio por unidad, y por cada x unidades cobra:

$$\mathrm{C(x)}=\begin{cases} 6x & \text{si} \quad 0<x \le 10 \\ \sqrt{600+ax^2} & \text{si} \quad x>10 \end{cases}$$

a) Halla el valor de a de forma que el precio varíe de forma continua al variar el número de unidades que se compran.
b) ¿A cuánto tiende el precio de una unidad cuando se compran "muchísimas" unidades?

40. – Dada la función: $$f(\mathrm{x})=\begin{cases} 3a+3^{\frac{2}{x}} & \text{si} \quad x<0 \\ \dfrac{4}{2+2^x} & \text{si} \quad 0 \le x \le 1 \\ \dfrac{3}{b-2^{-x}} & \text{si} \quad x>1 \end{cases}$$

a) Halla a y b para que la función sea continua.
b) Calcula: $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$, $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ y $\lim\limits_{x\to 0,5} f(x)$
c) Si $a=0$ y $b=1/8$, estudia las discontinuidades.

41. – La función $f(x)=\begin{cases} 2x+3 & \text{si} \quad x \le 0 \\ -x^2-1 & \text{si} \quad x>0 \end{cases}$ toma valores de signo contrario en los extremos del intervalo $[-1,2]$ y, sin embargo, no tiene ninguna raíz en dicho intervalo. ¿Contradice esto el teorema de Bolzano?

42. – Comprueba que la función $f(x)=-x^3+x^2+2$ tiene al menos una raíz en el intervalo $[1,2]$.

43. – Demuestra que la función $f(x)=-2x^3+3x-8$ corta al eje de abscisas en el intervalo $[-2,2]$. ¿Se podría decir lo mismo de la función $g(x)=\dfrac{x^3-2x^2-4}{x+1}$?

44. – Si $f(x)$ es continua en el intervalo $[-3,2]$, donde $f(-3)<0$ y $f(2)=5$. ¿Se puede asegurar que la función $g(x)=f(x)-2$ tiene al menos un cero en el intervalo $[-3,2]$?

45. – Dibuja la gráfica de una función que se ajuste a las siguientes condiciones:

Continua en $\mathbb{R}-\{-3,1,5,7\}$ $\lim_{x\to -3} f(x)=+\infty$, $\lim_{x\to 1} f(x)=-2$, $f(1)=0$

Discontinuidad de salto finito en $x=5$ y de salto infinito en $x=7$ $f(-2)=0$

46. – Dibuja la gráfica de una función $f(x)$ tal que:

- $\mathrm{Dom} f(x)=\{x\in R / x\geq -4\}$
- $f(-4)=2$, $f(0)=1$, $f(5)=0$, $f(7)=-5$
- $\begin{cases} \lim_{x\to -3^-} f(x)=-3 & \lim_{x\to -3^+} f(x)=0 & \lim_{x\to 0^-} f(x)=4 & \lim_{x\to 0^+} f(x)=-1 \\ \lim_{x\to 5^-} f(x)=+\infty & \lim_{x\to 5^+} f(x)=-2 & \lim_{x\to 7} f(x)=0 & \lim_{x\to +\infty} f(x)=-\infty \end{cases}$

AUTOEVALUACIÓN

1. Los límites de la función $f(x)=\begin{cases} x^2-3x+2 & si\ x<0 \\ x^3-7x^2+3 & si\ x>0 \end{cases}$ a la izquierda de 0 y a la derecha de 0 valen:

a) 0, 0 b) 3, 7 c) 2, 3 d) No existen pues $f(x)$ no está definida en 0

2. El límite $\lim_{x\to\infty}\left(\dfrac{3^x-3^2}{3^{x+1}}\right)$ vale:

a) 0 b) 1 c) +∞ d) 1/3.

3. El límite $\lim_{x\to\infty}\left(\dfrac{3x^2+x-5}{x-x^2+2}\right)$ vale:

a) –3 b) 3 c) ∞ d) –5/2

4. El límite $\lim_{x\to\infty}\left(\sqrt{x+5}-\sqrt{x-2}\right)$ vale:

a) 0 b) 3 c) ∞ d) 7

5. El límite $\lim_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{4-x}-\sqrt{4}}{x}$ vale:

a) 0 b) 4 c) ∞ d) –1/4

6. Para que la función $f(x)=\begin{cases} x^3-3x^2+a & \text{si} & x<3 \\ 2x^2-1 & \text{si} & x\geq 3 \end{cases}$ sea continua a debe valer:

a) 3 b) –1 c) 17 d) 1/2

7. Indica cuál de las siguientes funciones tiene una asíntota vertical en x = 2.

a) $f(x)=\log(x-2)$ b) $f(x)=\dfrac{x^2-4}{x-2}$ c) $f(x)=\sqrt{x-2}$ d) $f(x)=sen(\cos(x-2))$

8. Indica cuál de las siguientes funciones tiene una asíntota horizontal y = 2.

a) $f(x)=\log(x-2)$ b) $f(x)=\dfrac{2x^2-4}{x^2-2}$ c) $f(x)=\sqrt{x-2}$ d) $f(x)=tag(\cos(x-2))$

9. Indica cuál de los siguientes límites NO vale 0.

a) $\lim_{x\to+\infty}\dfrac{x^{27}+5}{e^x}$ b) $\lim_{x\to+\infty}\dfrac{5}{\sqrt{x-3}+\sqrt{x+2}}$ c) $\lim_{x\to+\infty}\dfrac{\sqrt{x-1}-\sqrt{x+3}}{x}$ d) $\lim_{x\to+\infty}\dfrac{e^x+3}{e^x-5}$

10. Los puntos de discontinuidad de la función $g(x)=\left|x^2-9\right|$ son:

a) 0 y 3 b) 3 y –3 c) Ninguno d) 0, 3 y 9

Apéndice: Problemas de límites en las P.A.A.U.

1.- Calcula: $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{2^n-8}{2^{n+1}}\right)$ $\quad \lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{x^4+1}-1}{x^4}$ $\quad \lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{x^2+1}-1}{x^2}$ $\quad \lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{9+x}-\sqrt{9-x}}{9x}$

2.- Dado $a \in \mathbb{R}$, se considera la función $f(x)=\begin{cases}\frac{2x^2-3ax-6}{x-3} & \text{si } x<3\\ x^2-1 & \text{si } x\geq 3\end{cases}$. Determina los valores de a para los que la función es continua.

3.- Dada la función $F(x)=\begin{cases}x+1 & \text{si } x\leq 1\\ 3-ax^2 & \text{si } x>1\end{cases}$, responde razonadamente a las siguientes cuestiones. a) ¿Para qué valores de a la función $F(x)$ es continua en $x = 1$? b) Si $F(x)$ es continua cuando $x\to x_0$ entonces no existe $\lim_{x\to x_0}F(x)$, ¿es cierto?

4.- Se ha investigado el tiempo (T, en minutos) que se tarda en realizar cierta prueba de atletismo en función del tiempo de entrenamiento de los deportistas (x, en días), obteniéndose que: $T(x)=\begin{cases}\frac{300}{x+30} & \text{si } 0\leq x\leq 30\\ \frac{1125}{(x-5)\cdot(x-15)}+2 & \text{si } x>30\end{cases}$

a) Justifica que la función T es continua en todo su dominio.

b) Por mucho que se entrene un deportista, ¿será capaz de hacer la prueba en menos de 1 minuto? ¿y en menos de 2?

5.- El rendimiento de un estudiante en un examen de una hora de duración viene dado por la siguiente expresión ($f(x)$ representa el rendimiento, en tanto por ciento, en el instante x, medido en horas): $f(x)=\begin{cases}300x(1-x) & \text{si } 0\leq x\leq 0{,}6\\ 180(1-x) & \text{si } 0{,}6<x\leq 1\end{cases}$

a) ¿Es el rendimiento una función continua del tiempo?

b) ¿En qué momentos aumenta y en qué momentos disminuye el rendimiento? ¿Cuándo obtiene el mayor rendimiento y cuál es ese rendimiento?

6.- La energía que produce una placa solar viene descrita por la siguiente curva en función del tiempo transcurrido desde que amanece ($f(x)$ es la energía producida a las x horas de haber amanecido): $f(x)=\begin{cases}10x-x^2 & \text{si } 0\leq x\leq 8\\ \frac{1024}{x^2} & \text{si } 8<x\leq 12\end{cases}$

a) Estudia la continuidad de la función f en su dominio.

b) ¿En qué momento del día la placa produce más energía? ¿Cuánto produce en ese momento?

7.- El tiempo que un empleado tarda en realizar una tarea varía durante los cuatro primeros meses de contrato según su experiencia. Así, la función que relaciona el tiempo empleado en realizar la tarea con la experiencia del operario es ($f(x)$ representa el tiempo, en horas, que tarda en realizar la tarea un empleado que lleva contratado un tiempo x, medido en meses): $f(x)=\begin{cases}12-x^2 & \text{si } 0<x\leq 2\\ (x-4)^2+4 & \text{si } 2<x\leq 4\end{cases}$

a) Representa gráficamente la función f. ¿Es el tiempo necesario para realizar la tarea una función continua del tiempo de experiencia?

b) ¿En qué momento el tiempo necesario para realizar la tarea es mínimo? ¿Cuánto tiempo le lleva finalizar la tarea en ese instante? ¿Consigue el empleado finalizar la tarea en menos de 3 horas en algún momento durante los primeros cuatro meses de contrato?

8.- Un proveedor cobra el aceite según el volumen del pedido. Así, la función que relaciona el importe del pedido con el volumen del mismo es $f(x)$ (en euros), de un pedido de x litros de aceite): $f(x)=\begin{cases}3x & \text{si } 0<x<30\\ 2x+30 & \text{si } 30\leq x\end{cases}$

a) ¿Es el importe una función continua del volumen del pedido?

b) Estudia los intervalos de crecimiento y decrecimiento de la función y represéntala gráficamente.

9.- La velocidad de un coche de carreras viene dada por la siguiente expresión: $f(x)=\begin{cases}110+12x+6x^2 & \text{si } 1\leq x\leq 3\\ 350-\frac{450}{x} & \text{si } x>3\end{cases}$

donde x representa el tiempo, en segundos, y $f(x)$ representa la velocidad del coche, en km/h.

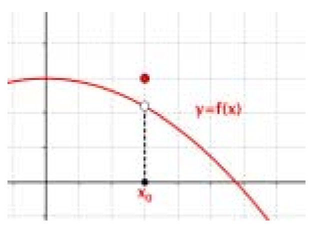
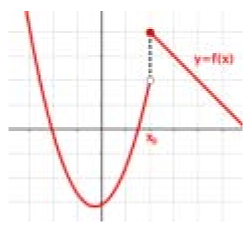
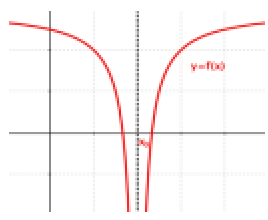
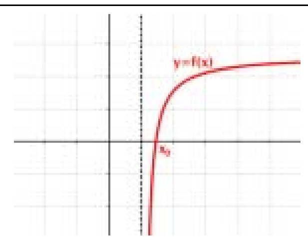
a) ¿Es la velocidad una función continua del tiempo?

b) ¿Disminuye la velocidad del coche en algún instante?, ¿se podrían alcanzar los 350 km/h de velocidad con este coche?

RESUMEN

		Ejemplos
Entorno de un punto	Entorno de centro a y radio δ, $E(a,\delta)$, es el intervalo abierto $(a-\delta, a+\delta)$: $E(a,\delta)=\{x\in\mathbb{R};\ \lvert x-a\rvert<\delta\}$	
Límite de una función en un punto	$\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=L \Leftrightarrow \forall E(L,\varepsilon), \exists E(x_0,\delta);\ \forall x\in E(x_0,\delta)\Rightarrow f(x)\in E(L,\varepsilon)$ o también: $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=L \Leftrightarrow \forall\varepsilon>0, \exists\delta>0;\ \text{si } 0<\lvert x-x_0\rvert<\delta \Rightarrow \lvert f(x)-L\rvert<\varepsilon$	
Límite lateral de una función en un punto	Límite por la izquierda: $\lim\limits_{x\to x_0^-} f(x)=L \Leftrightarrow \forall\varepsilon>0, \exists\delta>0;\ \text{si } 0<x_0-\delta<x<x_0 \Rightarrow \lvert f(x)-L\rvert<\varepsilon$ Límite por la derecha: $\lim\limits_{x\to x_0^+} f(x)=L \Leftrightarrow \forall\varepsilon>0, \exists\delta>0;\ \text{si } 0<x_0<x<x_0+\delta \Rightarrow \lvert f(x)-L\rvert<\varepsilon$	
Operaciones con límites	$\lim\limits_{x\to x_0}[f\pm g](x)=\lim\limits_{x\to x_0} f(x)\pm\lim\limits_{x\to x_0} g(x)=L\pm M$ $\lim\limits_{x\to x_0}[f\cdot g](x)=\lim\limits_{x\to x_0} f(x)\cdot\lim\limits_{x\to x_0} g(x)=L\cdot M$ $\lim\limits_{x\to x_0}\sqrt[n]{f(x)}=\sqrt[n]{\lim\limits_{x\to x_0} f(x)}=\sqrt[n]{L}$	$\lim\limits_{x\to x_0}[k\cdot f](x)=k\cdot\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=k\cdot L \quad \forall k\in\mathbb{R}$ $\lim\limits_{x\to x_0}\left[\dfrac{f}{g}\right](x)=\dfrac{\lim\limits_{x\to x_0} f(x)}{\lim\limits_{x\to x_0} g(x)}=\dfrac{L}{M}$ si $\lim\limits_{x\to x_0} g(x)\neq 0$ $\lim\limits_{x\to x_0}[f(x)]^{g(x)}=\left[\lim\limits_{x\to x_0} f(x)\right]^{\lim\limits_{x\to x_0} g(x)}=L^M$ si $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)\neq 0$ y $\lim\limits_{x\to x_0} g(x)\neq 0$
Indeterminaciones	Un límite indeterminado es aquél que implica operaciones cuyo resultado no se puede precisar.	$\dfrac{\infty}{\infty}$, $\dfrac{0}{0}$, $0\cdot\infty$, $\infty-\infty$, $1^{\pm\infty}$, ∞^0 y 0^0
Continuidad	Una función $y=f(x)$ es continua en un punto $x=x_0$ si: 1. Existe $f(x_0)$, es decir, $x_0\in \mathrm{Dom} f(x)$ 2. Existe $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$, es decir, $\lim\limits_{x\to x_0^-} f(x)=\lim\limits_{x\to x_0^+} f(x)$ 3. Los dos valores anteriores coinciden. $f(x_0)=\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$	

Tipos de discontinuidad

DISCONTINUIDAD EVITABLE	DISCONTINUIDAD NO EVITABLE		
	1ª ESPECIE		2ª ESPECIE
	Salto finito	Salto infinito	
			

CAPÍTULO 6: DERIVADAS

ACTIVIDADES PROPUESTAS

1. CONCEPTO DE DERIVADA

1. $C(x) = x^2 + 5x + 1$ es la función de costes donde $C(x)$ indica el coste de fabricación de x unidades. Calcula la tasa de variación media entre 0 y 500 unidades, y la tasa de variación media entre 200 y 800 unidades.
2. La función de beneficios de una cierta empresa viene dada por: $B(x) = x^2 + 3x + 2\sqrt{x}$, donde $B(x)$ indica el beneficio que obtiene la empresa cuando fabrica x unidades. Calcula la tasa de variación media de los beneficios entre 10 y 50 unidades, y la tasa de variación media de los beneficios entre 100 y 400 unidades.
3. Una empresa determina que los costes de producción por trabajador contratado son $C(x) = 2x + \sqrt{x}$, y que los ingresos por ventas también por trabajador contratado vienen dados por $I(x) = 3x + x^2$. Por tanto los beneficios $B(x)$ por trabajador contratado son ingresos menos costes. (Observa que estas funciones no son continuas, no se pueden contratar 3'7 trabajadores, es una función escalonada, pero vamos a trabajar con ellas como si fueran continuas). Determina la tasa de variación media si se contratan entre 400 y 4000 trabajadores.
4. Calcula la derivada de la función $f(x) = |x|$ en $x = 0$ teniendo en cuenta la definición de dicha función: $f(x) = |x| = \begin{cases} x & si\ x \geq 0 \\ -x & si\ x < 0 \end{cases}$ y comprueba que no es derivable.
5. Utilizando la definición de derivada comprueba que las derivadas de las siguientes funciones en los puntos indicados es el valor dado:
   a) $f(x) = x^3$ en $x = 2 \Rightarrow f'(2) = 12$.　　　$g(x) = x + 2$ en $x = a \Rightarrow g'(a) = 1$.
6. Estudia la derivabilidad en $x = 0$ de $f(x) = |x^3|$. (Selectividad Junio 1995)
7. Dada la función $f(x) = 6x^2 - x^3$. Halla un valor $a > 0$ tal que la recta tangente a la gráfica de f en el punto $(a, f(a))$ sea paralela a la recta $y = -15x$. Selectividad. Curso 06/07.
8. Se considera la función $f(x) = x^2 + m$, donde $m > 0$ es una constante.

a) Para cada valor de m halla el valor $a > 0$ tal que la recta tangente a la gráfica de f en el punto $(a, f(a))$ pase por el origen de coordenadas.

b) Halla el valor de m para que la recta $y = x$ sea tangente a la gráfica de $f(x)$. Selectividad. Junio 07.

9. Comprueba que la derivada n-ésima de las siguientes funciones es la indicada:

$f(x) = \dfrac{1}{x+a} \Rightarrow f^{n)}(x) = \dfrac{(-1)^n n!}{(x+a)^{n+1}}$	$f(x) = \dfrac{1+x}{1-x} \Rightarrow f^{n)}(x) = \dfrac{2 \cdot n!}{(1-x)^{n+1}}$

2. CÁLCULO DE DERIVADAS

10. Si f y g son dos funciones derivables en todo punto, y se sabe que $f(1) = 2$, $f(2) = 5$, $g(1) = 1$, $g(2) = 6$, $f'(1) = 3$, $f'(2) = 6$, $f'(6) = 4$, $g'(1) = 1$, $g'(2) = 3$, $g'(5) = 1$. Determina el valor de: a) $(f \circ g)'(2)$; b) $(g \circ f)'(1)$; c) $(g \circ f)'(2)$; d) $(f \circ f)'(1)$.
11. Sean $u(x)$ y $v(x)$ dos funciones derivables en un punto x. Pruébese que su producto $u(x)\cdot v(x)$ es derivable obteniendo la expresión de su derivada: $D[u(x)\cdot v(x)] = u'(x)\cdot v(x) + u(x)\cdot v'(x)$

(Selectividad Septiembre 1995)

12. Calcula las derivadas de las siguientes funciones:

a) $y = log(x^5 - 7x^3)^{12}$　b) $y = log_2(3x^3 - 5x^2)^7$　c) $y = \ln\sqrt{\dfrac{(4x^5 - 8x^3)^5}{3x - 2}}$　d) $y = \ln\sqrt[3]{(2x^2 + 4x^7)^4}$

13. Calcula las derivadas de las siguientes funciones:

a) $y = \sqrt[6]{5x^{11}}$;　b) $y = \dfrac{\sqrt[4]{3x^2}\cdot\sqrt{x}}{3x^3 + 7}$;　c) $y = \dfrac{(3x^4 - 4)\cdot\sqrt{x}}{\sqrt[3]{7x^5}}$;　d) $y = \dfrac{\sqrt[3]{x^7}}{2x + 5}$.

14. Calcula las derivadas de las siguientes funciones:

a) $y=\sqrt{\dfrac{2x^3-7x^9}{4x^5+6}\left(3x^7-5x^5\right)^3}$ b) $y=\sqrt{\dfrac{(x^3+5x)(4x^3-6x)}{2x^4-5x}}$

c) $y=\sqrt{\left(\dfrac{3x^4+5x^2}{4x^2-6x^5}\right)^4}$ d) $y=\sqrt[3]{5+\sqrt{5x-\dfrac{5}{x^5}}}$

15. Calcula las derivadas de las siguientes funciones:

a) $f(x)=\log\dfrac{1+e^{3x}}{1-e^{3x}}$ b) $f(x)=(2-3x)\log(2-3x)$

c) $f(x)=\log\dfrac{\sqrt{4-9senx}}{3+2\cos x}$ d) $f(x)=\dfrac{senx-x\cos x}{\cos x+xsenx}$

16. Utiliza derivación logarítmica para calcular las derivadas de las siguientes funciones:

a) $y=(3x)^{x5-9x^3}$ b) $y=((2x+7)^{5x^3-6x^2})$ c) $y=(x+\mathrm{e})^{(4x5-8x^3)5}$ d) $f(x)=(x^x)^x$

17. Calcula las derivadas de las siguientes funciones:

a) $y=\log_2\sqrt{\dfrac{4+senx}{4-senx}}$ b) $y=e^{\sqrt{6x+8}}$ c) $y=sen\left(\ln\dfrac{7x}{\sqrt{1-2x^2}}\right)$ d) $y=\ln\dfrac{5x}{\sqrt{16-x^2}}$

3. APLICACIONES DE LA DERIVADA

18. a) Determina los intervalos de crecimiento y decrecimiento de la función: $y = x^3 + 27x$. b) Determina los intervalos de crecimiento y decrecimiento de la función: $y = x^3 - 27x$. c) ¿Cómo son en $x = 0$? d) ¿Y en $x = 3$? ¿Y en $x = -3$?

19. Una empresa determina que los costes de producción por trabajador contratado son $C(x) = x + \sqrt{x}$, y que los ingresos por ventas, también por trabajador contratado, vienen dados por $I(x) = 3x + x^2$. Por tanto los beneficios $B(x)$ por trabajador contratado son ingresos menos costes. La función beneficios $B(x)$ respecto del número de trabajadores contratados, ¿es creciente o decreciente?

20. Calcula los máximos y mínimos de las funciones siguientes:

a) $y = x^4 - 1$; b) $y = 3x^3 + 9$; c) $y = 4x^4 - 2x^2 + 5$; d) $y = 9x^3 - 3x^2$.

21. Demuestra que la suma de dos sumandos positivos, cuyo producto es constante, es mínima cuando estos son iguales.

22. Calcula los máximos y mínimos relativos y absolutos de la función: $f(x) = 2x^3 - 3x^2 + 72x$, en el intervalo [–5, 5] y en el intervalo [1, 4].

23. Determina los máximos y mínimos de las funciones siguientes:

a) $y = |x - 9|$; b) $y = |x + 2| + |x - 3|$.

24. Determina los máximos y mínimos, absolutos y relativos, de la función $f(x) = |x + 2|$ en el intervalo [–4, 4].

25. Se considera la función: $$f(x)=\begin{cases} e^{-x}-1 & \text{si } x\le 0 \\ x^2+x & \text{si } x>0 \end{cases}$$

Contesta, razonadamente, a las siguientes preguntas:

a) ¿Es continua en el punto $x = 0$?

b) ¿Es derivable en el punto $x = 0$?

c) ¿Alcanza algún extremo? (Prueba previa Selectividad 1999)

26. Sabiendo que una función $f(x)$ tiene como derivada $f'(x) = (x - 4)^2(x^2 - 8x + 7)$,

a) Halla los intervalos de crecimiento y decrecimiento de f

b) Halla los máximos y mínimos relativos de f

c) ¿Es el punto $x = 4$ un punto de inflexión de f? Justifica razonadamente la respuesta.

Septiembre 04. Opción A

27. Determina los máximos, mínimos y puntos de inflexión de las funciones siguientes:

a) $y = x^3 - 3x^2 + 6x + 11$; b) $y = x^3 - 7x + 8$; c) $y = x^5 + 2$; d) $y = x^4 - 3$.

28. Determina el dominio de las siguientes funciones:

a) $f(x) = 3x^3 - 2x^2 + 5$, b) $f(x) = \operatorname{cotg} x$, c) $f(x) = \dfrac{x-3}{x^2-4}$,

d) $f(x) = \sqrt{x+5}$ e) $f(x) = 2^{\frac{x+2}{x-3}}$, f) $f(x) = \log(x+1)$.

29. Determina el conjunto imagen (o recorrido) de las siguientes funciones:

a) $f(x) = x^2 + 2x - 3$, b) $f(x) = 3x^3 - 2x^2 + 5$, c) $f(x) = \sqrt{x-1}$.

30. Analiza la simetría de las siguientes funciones:

a) $f(x) = x^2$, b) $f(x) = x^3$, c) $f(x) = x^2 - 6x + 5$.

31. Estudia las asíntotas y el comportamiento en el infinito de las siguientes funciones.

a) $f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{x} \text{ si } x \neq 0 \\ 0 \text{ si } x = 0 \end{cases}$, b) $f(x) = \dfrac{x^2+2}{x-2}$, c) $f(x) = \sqrt{\dfrac{x^2+2}{x-2}}$

32. Estudia los intervalos de crecimiento y decrecimiento, máximos y mínimos y la concavidad de:

a) $f(x) = 2x^3 - 9x^2 + 12x + 5$, b) $f(x) = x^3$, c) $f(x) = \dfrac{x-3}{x^2-4}$

33. Se considera la función $f(x) = \dfrac{1}{4-x^2}$

a) Indicar el dominio de definición de la función f y sus asíntotas

b) Hallar los extremos relativos de la función f y sus intervalos de concavidad y convexidad.

c) Dibujar la gráfica de f y hallar su máximo y su mínimo absoluto en el intervalo [–1, 1]. Selectividad. Opción A

34. Sea la función $f(x) = 2x\,|4 - x|$

a) Estudia su continuidad y derivabilidad

b) Dibuja su gráfica. Selectividad. Septiembre 03. Opción B

35. Se considera la función $f(x) = \dfrac{(2x-1)^2}{4x^2+1}$. Calcula las asíntotas, el máximo y el mínimo absolutos de la función $f(x)$.

Selectividad Junio 04. Opción A

36. Se desea fabricar envases con forma de ortoedro de base cuadrada de forma que el volumen sea de dos litros y la superficie empleada sea mínima.

37. Determina las dimensiones de un cono de volumen mínimo inscrito en una esfera de radio R = 5 cm. (*Ayuda*: La altura del cono es igual a $R + x$, y el radio de la base $r^2 = R^2 - x^2$).

38. Calcula la base y la altura del triángulo isósceles de perímetro 8 y área máxima. (Selectividad)

EJERCICIOS Y PROBLEMAS.

Concepto de derivada

1. Piensa en un ejemplo de función no derivable y que sí sea continua.
2. Utiliza la definición de derivada para calcular la derivada de la función $y = \sqrt{x}$ en x = 1, 4, 5... ¿Puedes obtener la derivada en x = 0? Razona la respuesta.
3. Se considera la función $f(x) = \begin{cases} (x-1)^2 & \text{si } x \le 1 \\ 2 & \text{si } x > 1 \end{cases}$, indica cuál o cuáles de las siguientes afirmaciones son ciertas, razonando la respuesta.
   a) f es derivable en x = 1, pues las derivadas laterales se anulan en dicho punto.
   b) f ni es continua en x = 1 ni derivable en dicho punto (Selectividad Septiembre 1994)
4. ¿Cuántos puntos hay en la función $f(x) = |x^2 + 6x + 8|$ que no tengan derivada? Justifica la respuesta. (Selec. Junio 1995)
5. Determina la ecuación de la recta tangente a la gráfica de la función $y = 5x^2 + 3x - 2$ en el punto x = 5.
6. Un vehículo espacial despega de un planeta con una trayectoria dada por: $y = 30x - 0'5x^2$ (x e y en km). La dirección del vehículo nos la proporciona la recta tangente en cada punto. Determina la dirección del vehículo cuando está a 4 km de distancia sobre el horizonte.
7. Calcula las rectas tangentes de las gráficas de las funciones siguientes en los puntos indicados:
   a) $y = x^3 + 5$ en $x = 2$.
   b) $y = 3x^2 + 7x - 2$ en $x = 1$.
   c) $y = 2x^3 - 5x^2 + 4$ en $x = 0$.
8. Determina las coordenadas de los puntos de la gráfica $y = x^3 - 3x + 2$ en los que su tangente sea paralela: a) a la recta $y = 0$; b) a la recta $y = 2x$.
9. Determina la recta tangente de la gráfica de la función $y = \sqrt[2]{4x^3}$ en x = 0.
10. Determina las rectas tangentes a la función $f(x) = 4x^3 - 12x$ en los puntos en los que la pendiente es 12. ¿Cuál es el menor valor que puede tener la pendiente a esta curva? ¿En qué puntos se alcanza?
11. Determina los coeficientes a, b y c de la función $f(x) = ax^3 + bx + c$, que pasa por el punto $A(1, 2)$ y es tangente a la recta $y = x$ en el punto $O(0, 0)$.
12. Determina los coeficientes a, b y c para que las funciones $f(x) = x^3 + bx + c$ y $g(x) = cx - x^2$ tengan la misma recta tangente en el punto A(1, 0).
13. Determina el coeficiente a, para que la función $f(x) = x^2 + a$, sea tangente a la recta $y = x$.

Cálculo de derivadas

14. Calcula las derivadas de las siguientes funciones:
    a) $y = 3x^2 + 5x - 7$ b) $y = 5x^3 - 4x^2 + 3x + 2$ c) $y = 6x^2 - 4x + 7$ d) $y = 9x^7 - 4x^6 - 2x^3$
15. Calcula:
    a) $D(3x^2 + 6x^4 - 9x)$ b) $D(7x^5 - 5x^2 + 3x + 2x^3)$ c) $D(5x^5 - 4x^4 + 3x^3)$ d) $\frac{dy}{dx}(7x^3 - 8x^6 - 9x^8)$
16. Calcula las derivadas de las siguientes funciones:
    a) $y = 5x^2 + 4x - 3/x$ b) $y = 7x^3 - 5x^2 + 4\sqrt{x}$ c) $y = \frac{6\sqrt{x}}{(x+2)\cdot(x^2-3x+1)}$ d) $y = \frac{\sqrt{x}\cdot(x+3)}{(x^2-3)}$
17. Calcula las derivadas de las siguientes funciones:
    a) $y = \frac{(x-3)\cdot(2x-4)}{x+5}$ b) $y = \frac{(2x^2+5)\cdot(7x-3)}{5x-8}$
    c) $y = \frac{(2x+3x^2)\cdot(4x^5-5)}{6x+7}$ d) $y = \frac{5(x+2)\cdot(4x-6)}{2(x+5)\cdot(6x+3)}$
18. Calcula las derivadas de las siguientes funciones:
    a) $y = (x^3 + 5)\cdot(8x^6 - 7)$; b) $y = (9x^3 - 3)\cdot(7x^4 + 6)$; c)
19. Calcula las derivadas de las siguientes funciones:
    a) $y = \frac{x-2}{x+2}$; b) $y = \sqrt{x-2}\cdot(6x^3 - 3x)$; c) $y = \frac{4x^3 - 7x^2}{8x^4 - 4x^3}$; d) $y = \frac{2\sqrt{x^3}}{3x+4}$

20. Calcula las derivadas de las siguientes funciones:

a) $y = (x^6 - 5x^2)^9$ b) $y = (2x^4 - 7x^6)^5$ c) $y = \sqrt{\left(2x^7 - 6x^5\right)^3}$ d) $y = \sqrt[5]{\left(3x^4 + 6x^9\right)^7}$

21. Calcula las derivadas de las siguientes funciones:

a) $y = \sqrt{2x^3 + 3} \cdot (4x^7 + 6x^2)^6$ b) $y = \dfrac{\sqrt[3]{5x^3 + 7x^2 - 2}}{3x + 4}$

c) $y = (7x^3 + 3)^5 \cdot (4x^5 - 8x^8)$ d) $y = \dfrac{\left(5x^3 - 7x^2\right)^9}{\left(9x^4 - 3x^3\right)^2}$

22. Utiliza derivación logarítmica para calcular las derivadas de las funciones siguientes:

a) $y = (5x)^{x^5 - 3x^3}$ b) $y = (3x+6)^{(4x^3 + 2x^2)}$

c) $y = e^{(3x^5 - 6x^3)^5}$ d) $y = \sqrt[3]{(5x+1)^{\left(3x^4 - 4x^5\right)^3}}$

23. Calcula las derivadas de las siguientes funciones:

a) $y = e^{x^5 + 7x^3}$ b) $y = (e^{3x^3 - 5x^2})^7$ c) $y = e^{(4x^5 + 8x^3)^5}$ d) $y = \sqrt[3]{e^{\left(5x^5 - 3x^8\right)^2}}$

24. Calcula las derivadas de las siguientes funciones:

a) $y = ln((5x^5 - 3x^3)^{12} (3x + 1))$ b) $y = \ln \sqrt{\left(2x^3 + 5x^2\right)^3}$

c) $y = \ln \sqrt{\dfrac{7x^5 - 5x}{2x - 3}}$ d) $y = \ln \sqrt[3]{\left(3x^4 - 5x^5\right)^2}$

25. Calcula las derivadas de las siguientes funciones:

a) $f(x) = \ln \dfrac{5 + 3e^{3x}}{5 - 3e^{3x}}$ b) $f(x) = (2x - 3x^2) \ln(5x - 7x^2)$

c) $f(x) = \ln \dfrac{\sqrt{16 - 9senx}}{4 + 3x}$ d) $y = \sqrt{\ln(5x)}$

26. Calcula las derivadas de las siguientes funciones:

a) $y = \sqrt{\ln(\arccos 5x)}$ b) $y = \ln(7e^{2x-3})$ c) $f(x) = 5\ln\dfrac{3senx + 5}{5 - 3senx}$ d) $y = \ln(\ln \sqrt[3]{4x - 5})$

27. Calcula las derivadas de las siguientes funciones:

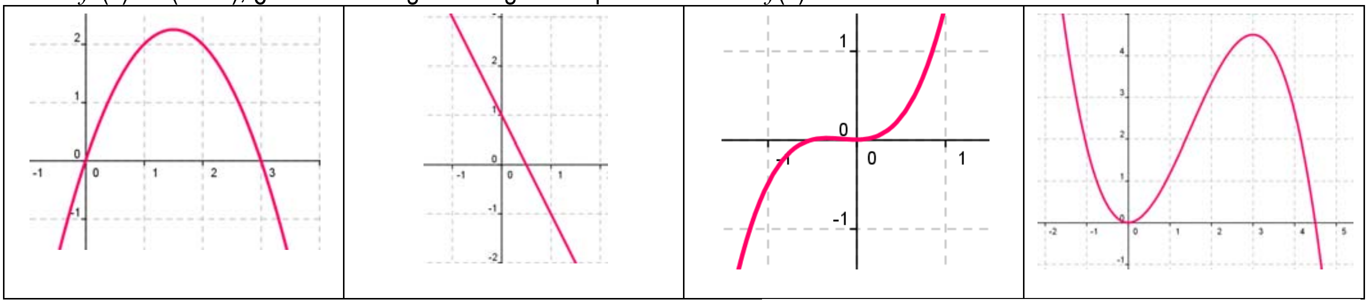
a) $y = log(x^3 - 5x^5)^8$ b) $y = log_2(8x^2 - 3x^3)^2$

c) $y = \ln \sqrt{\dfrac{\left(3x^6 - 7x^2\right)^4}{2x - 1}}$ d) $y = \ln \sqrt[4]{\left(3x^3 + 5x^9\right)^7}$

Aplicaciones de la derivada

28. Determina los intervalos de crecimiento y decrecimiento de $f(x) = 1/(x - 2)^2$.
29. Determina los intervalos de crecimiento y decrecimiento de $f(x) = (x + 3)/(x - 4)$.
30. Determina los intervalos de crecimiento y decrecimiento de $f(x) = 2x^3 - 3x^2 + 5$. Calcula sus máximos y mínimos y haz un esbozo de su gráfica.
31. Determina los intervalos de crecimiento y decrecimiento de $f(x) = 2x^3 - 3x^2 + 3$. Calcula sus máximos y mínimos. Haz un esbozo de su gráfica.

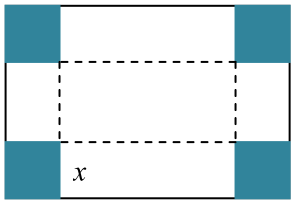
32. Si $f'(x) = x(3 - x)$, ¿cuál de las siguientes gráficas podría ser la de $f(x)$?



33. Determina los intervalos de crecimiento y decrecimiento de $f(x) = x^3 - 6x$. Calcula sus máximos y mínimos. Haz un esbozo de su gráfica.
34. Calcula los máximos y mínimos relativos y absolutos de la función $f(x) = 4x^3 - 6x^2 + 72x$ en el intervalo [–5, 3] y en el intervalo [1, 5].
35. Determina los máximos y mínimos, absolutos y relativos, de la función $f(x) = |x + 4|$ en el intervalo [–4, 4].

Problemas

36. El espacio recorrido, en metros, por un vehículo a los t segundos de pasar por un control de radar, viene dado por: $y = 8t + 0'3t^2$. ¿Qué velocidad llevaba al pasar por el control? ¿Y a los 3 segundos? Si continúa así, ¿en qué momento pasará de los 120 km/h?
37. La distancia, d, en metros, recorrida por un objeto en caída libre en la Tierra a los t segundos, viene dada aproximadamente por $d = 5t^2$. Si se cae un tornillo desde la primera plataforma de la Torre Eiffel, (que está a 57 m de altura), ¿a qué velocidad llegaría al suelo? ¿Y si cayera desde la segunda plataforma (que está a 115m)? ¿Y desde la tercera plataforma (que está a 274 m)?
38. Un depósito cilíndrico de 10 metros de diámetro se llena de agua a 0'3 m³ por minuto. ¿A qué velocidad varía la altura de agua a los 2 minutos? ¿Y a los 5 minutos?
39. Queremos construir cajas usando cartulinas rectangulares de 20 cm por 25 cm. Para ello se corta en cada esquina un cuadrado de lado x, y se dobla. ¿Qué valor debe tener el lado del cuadrado, x, recortado para que las cajas contengan un volumen máximo? *Ayuda:* Tendrás que escribir el volumen de las cajas en función de x.



40. Unos barriles para almacenar aceite son cilíndricos y tienen una capacidad de 200 litros. Si se desea construirlos de forma que su superficie total sea mínima, ¿cuánto debe medir su altura y el radio de su base?

AUTOEVALUACIÓN

1. La tasa de variación media de la función $y = 3x^3 + 3x^2 - x + 5$ en el intervalo [0, 3] es:

a) 15 b) 70 c) 35 d) –35

2. La derivada de la función $f(x) = \dfrac{Lx}{x}$ en $x = 1$

a) no existe b) 0 c) –1 d) 1

3. La derivada de la función $f(x) = \dfrac{e^x}{\sqrt{x}}$ en $x = 1$ es

a) $e/2$ b) no existe c) $-e/2$ d) e

4. La función $\begin{cases} -bx & x \le 1 \\ 3x^2 + d & x > 1 \end{cases}$ es continua y derivable en toda la recta real si:

a) $b = -6$, $d = 3$ b) $b = 3$, $d = -1$ c) $b = 6$, $d = -3$ d) $b = -3$, $d = 2$

5. La ecuación de la recta tangente a la gráfica de la función $y = x^2 - 2x^3$ en $x = 0$ es:

a) $y = 2x$ b) $y = x - 6$ c) $y = 0$ d) $y = 2 + 6x$

6. La función $y = -7x^3 + 3x^2 - x + 5$ en $x = 0$ es:

a) cóncava b) tiene un punto de inflexión de tangente horizontal
c) convexa d) tiene un punto de inflexión de tangente oblicua

7. La función $y = 3x^3 + 3x^2 - x + 5$ en $x = 0$ es:

a) creciente b) decreciente c) alcanza un mínimo d) alcanza un máximo

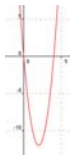
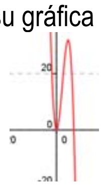
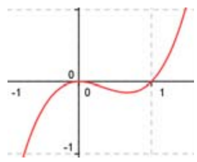
8. Si la derivada de una cierta función es: $y' = (x - 4)(x + 2)$ entonces los intervalos de crecimiento y decrecimiento de dicha función son:

a) $x < -2$, decreciente; $-2 < x < 4$, decreciente; $x > 4$, creciente b) $x < -2$, decreciente; $-2 < x < 4$, creciente; $x > 4$, decreciente
c) $x < -2$, creciente; $-2 < x < 4$, creciente; $x > 4$, decreciente d) $x < -2$, creciente; $-2 < x < 4$, decreciente; $x > 4$, creciente

9. La función $y = 3x^2 - 2x^3$ tiene un punto de inflexión en:

a) $x = 1/2$ b) $x = -1/2$ c) $x = 1$ d) $x = 0$

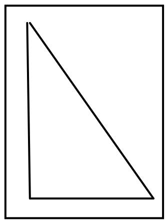
10. Si la derivada de una cierta función es: $y' = 3(x - 4)x$ entonces su gráfica puede ser:

a)  b)  c)  d) 

PROBLEMAS DE SELECTIVIDAD.

1. La rampa de un tobogán, de esos que descienden los niños en los parques infantiles, está fabricado empalmando dos tramos, dos piezas metálicas. ¿Qué precaución hay que tomar al empalmar las dos piezas para que el descenso no ofrezca dificultad a los niños?

   Se sabe que un tal tobogán tiene un tramo recto en su parte alta y un segundo tramo curvo. El tramo recto es el segmento AB, donde $A(-3, 4)$ y $B(0, 1)$. El tramo curvo empieza en B y desciende hasta el suelo ($y = 0$) al que llega con tangente horizontal. Si este tramo curvo es una parábola $y = ax^2 + bx + c$, hallar ésta. (Prueba previa selectividad 1994)
2. Demuéstrese que si $f(x)$ es una función derivable en un punto $x = a$, entonces también es derivable en a la función $F(x) = f(x)^2$, y su derivada es $F'(a) = 2f(a)\cdot f'(a)$. (Se pide una demostración directa, no deberá recurrirse a resultados similares, como la derivada de un producto) (Prueba previa selectividad 1994)
3. Se sabe que $y = f(x)$ e $y = g(x)$ son dos curvas crecientes en $x = a$. Analícese si la curva $y = f(x) - g(x)$ ha de ser entonces creciente en $x = a$. (Si la respuesta es afirmativa, justifíquese; en caso contrario, dese un contraejemplo que lo confirme). (Selectividad Junio 1994)
4. Defina derivada de una función f en un punto a. Aplicando la definición de derivada, demostrar que si f es derivable y periódica, de periodo T, entonces su derivada f' también es periódica de periodo T. (Selectividad Junio 1994)
5. En la figura se representa una escalera AB, cuyo extremo inferior A recorre el suelo (recta OA) y cuyo extremo superior B recorre una pared vertical (recta OB). La longitud de la escalera es $AB = 1$. El punto A se aleja de O con velocidad constante c. Se pide:



a) Sin hacer ningún cálculo, indicar cuánto vale la velocidad de B en el momento en el que $OA = OB$.
b) Hallar la velocidad v del punto B en función de la distancia x (OA)
c) La velocidad con la que B llega al punto O.

(Prueba previa selectividad 1995)

6. Dibújese la gráfica de una función de $\Re$ en $\Re$, que cumpla las siguientes condiciones:

   $f'(0) = 0$ $\quad$ $f'(x) > 0$ para $-1 < x < 0$ $\quad$ $f'(x) > 0$ para $0 < x < ½$

   Señálense otras propiedades de la curva que se dibuje. (Prueba previa selectividad 1995)
7. Dos líneas férreas se cortan perpendicularmente. Por cada línea avanza una locomotora (de longitud despreciable) dirigiéndose ambas al punto de corte; sus velocidades son 60 km/h y 120 km/h y han salido simultáneamente de estaciones situadas, respectivamente a 40 y 30 km del punto de corte.

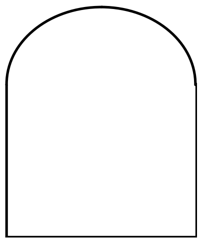
   a) Hallar la distancia a la que se encuentran las locomotoras, en función del tiempo que pasa desde que inician su recorrido. b) Hallar el valor mínimo de dicha distancia. (Selectividad Junio 1995)
8. Hallar los máximos y los mínimos de la función $y = e^{x^2}$. (Selectividad Septiembre 1995)
9. La aceleración de un móvil que describe una trayectoria rectilínea es (formulada en función del tiempo t)

   $a(t) = 4 - \dfrac{t}{8}$. Se sabe que para $t = 0$ el móvil está parado en la posición $x = 5$

   a) ¿Para qué valores de t es 0 la velocidad del móvil?
   b) Hallar la variación de la velocidad en el intervalo de tiempo [4, 8] y el espacio recorrido en ese intervalo
   c) Hallar la función de posición de este móvil. (Selectividad Septiembre 1995)
10. Sea $f(x)$ la función definida por las expresiones $f(x) = \begin{cases} 3\,\text{sen}\,x - \cos x & \text{si } x \geq 0 \\ mx + n & \text{si } x < 0 \end{cases}$

    a) Calcular n para que $f(x)$ sea continua en el punto $x = 0$.
    b) Calcular m y n para que $f(x)$ sea derivable en el punto $x = 0$. Prueba previa Selectividad 1996
11. Se considera una caja sin tapadera (consta de cuatro caras laterales y el fondo). Sabiendo que el fondo es un cuadrado y conociendo que el área total (de las cinco caras) es de 12 cm^2, hallar sus dimensiones para que tenga la mayor capacidad posible. Prueba previa Selectividad 1996
12. Se considera una ventana como la que se indica en la figura (La parte inferior es rectangular, la superior una semicircunferencia). El perímetro de la ventana mide 6 m. Hallar las dimensiones x e y para que la superficie de la ventana sea máxima.

    Y



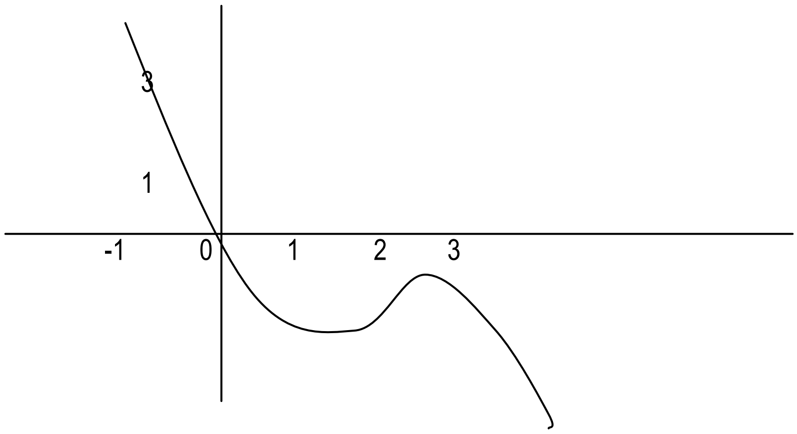
    (Expresar los resultados en función de π)

    Selectividad Septiembre 1996
13. Sea la función $f(x) = (x - 1)e^x$. Representar la gráfica de la función $f(x)$ indicando monotonía, extremos, puntos de inflexión y ramas asintóticas. Prueba previa Selectividad 1998
14. Sea la función $f(x) = x\,|x - 1|$ Se pide:

    a) Hacer un dibujo aproximado de la función. Estudiar la derivabilidad de la función en $x = 1$. Selectividad Septiembre 1997

15. La gráfica de la figura corresponde a la primera derivada de una función $f(x)$. ¿Qué puede decirse sobre los posibles máximos y mínimos relativos de la función $f(x)$? Razonar la respuesta.

Selectividad Septiembre 1996



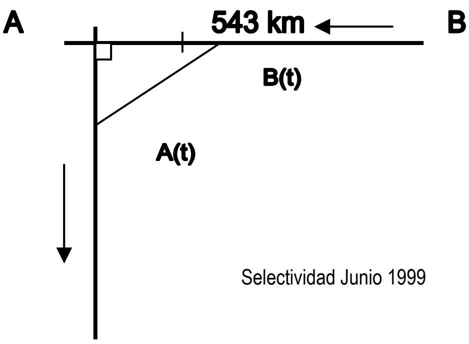
16. Estudiar la derivabilidad de la función $f(x) = |x^2 - 5x + 6|$. Prueba previa selectividad 1997

17. Sea la función $f(x) = \dfrac{Lx}{x}$. Estudiar el dominio, las asíntotas, los posibles puntos de máximo y mínimo y hacer un dibujo aproximado de la gráfica de la función. Prueba previa selectividad 1997.

18. Sea $f: \Re \to \Re$ una función derivable en $\Re$; sean a y b dos raíces de la derivada $f'(x)$ tales que entre ellas no hay ninguna otra raíz de $f'(x)$. Razonar debidamente si puede ocurrir cada una de las siguientes posibilidades:
1.- Entre a y b no existe ninguna raíz de $f(x)$. 2.- Entre a y b existe una sola raíz de $f(x)$. 3.- Entre a y b existen dos o más raíces de $f(x)$. Selectividad Junio 1997

19. Calcular la base y la altura del triángulo isósceles de área máxima que puede inscribirse en una circunferencia de 12 cm de diámetro. Prueba previa Selectividad 1998

20. Dos avionetas se encuentran situadas a las 9 de la mañana a una distancia de 543 kilómetros, en las posiciones que se indican en la figura. La avioneta A se mueve hacia el sur a una velocidad de 270 km/h, mientras que la avioneta B se dirige hacia el oeste (en dirección a A), a 300 km/h.
a) (1 punto) Escribir las funciones que indican las posiciones de A y B en cada instante, así como la distancia entre ambas.
b) (1 punto) ¿A qué hora será mínima dicha distancia)



Selectividad Junio 1999

21. Se considera un triángulo isósceles cuya base (el lado desigual) mide 10 cm y cuya altura mide 6 cm. En él se inscribe un rectángulo, cuya base está situada sobre la base del triángulo.
a) Expresar al área A de dicho rectángulo en función de la longitud x de su base.
b) Escribir el dominio de la función $A(x)$ y dibujar su gráfica.
c) Hallar el valor máximo de dicha función. Selectividad Septiembre 1999

22. Se desea construir una caja cerrada de base cuadrada cuya capacidad sea 8 dm³. Averiguar las dimensiones de la caja para que la superficie exterior sea mínima. Selectividad Septiembre 1999

23. Sea $f(x) = \begin{cases} \dfrac{senx}{x} + 2 & \text{si } x \neq 0 \\ k & \text{si } x = 0 \end{cases}$

a) ¿Hay algún valor de k para el cual $f(x)$ sea continua en $x = 0$? b) ¿Hay algún valor de k para el cual $f(x)$ sea derivable en $x = 0$? c) Determinar sus asíntotas. Prueba previa de selectividad 2000

24. Dados tres números cualesquiera r_1, r_2 y r_3, hallar el número real x que minimiza la función

$$D(x) = (r_1 - x)^2 + (r_2 - x)^2 + (r_3 - x)^2$$

Selectividad Septiembre 2000

25. Sea $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ un polinomio que cumple $f(1) = 0$, $f'(0) = 2$, y tiene dos extremos relativos para $x = 1$ y $x = 2$.
a) Determinar a, b, c y d. b) ¿Son máximos o mínimos los extremos relativos? Selectividad Junio 2000

26. a) Si es posible, dibujar de forma clara la gráfica de una función continua en el intervalo [0, 4] que tenga al menos un máximo relativo en el punto (2, 3) y un mínimo relativo en el punto (3, 4)
b) Si la función fuese polinómica, ¿cuál ha de ser como mínimo su grado? Selectividad Junio 2000

27. Sea la función $f(x) = 2x + \operatorname{sen}x$. a) Determinar si tiene asíntotas de algún tipo. b) Estudiar su monotonía y la existencia de extremos relativos
Selectividad Septiembre 2000

28. Sea la función $f(x) = x^4 - 4x^3 + x^2 + 6x$. a) Determinar los puntos de corte de su gráfica con los ejes y los intervalos de crecimiento y decrecimiento. b) Esbozar la gráfica de la función
Selectividad Septiembre 2000

29. Sea la función real de variable real definida por

$$f(x) = \begin{cases} (2-x)^3 & si \quad x \le 1 \\ x^2 & si \quad x > 1 \end{cases}$$

a) Razonar si la función es continua en toda la recta real.
b) Razonar si f es derivable en toda la recta real.
Selectividad: Junio 01. Opción B

30. a) Determinar los extremos relativos de la función $f(x) = x^2 - 4x + 2$. Dibujar su gráfica. b) Hallar las ecuaciones de las dos rectas tangentes a la gráfica de f que pasan por el punto $P(3,-5)$.
Selectividad: Junio 01. Opción B

31. Sea $P(x)$ un polinomio de grado 4 tal que:
    i) $P(x)$ es una función par.
    ii) Dos de sus raíces son $x = 1$, $x = \sqrt{5}$
    iii) $P(0) = 5$

Se pide: Hallar sus puntos de inflexión. Dibujar su gráfica.
Selectividad: Septiembre 01. Opción B

32. Se considera la función real de variable real definida por: $f(x) = \dfrac{1}{x^2+3}$
a) Hallar la ecuación cartesiana de la recta tangente en el punto de inflexión de abscisa positiva de la gráfica de f.
Selectividad: Junio 02. Opción A

33. Se considera la función real de variable real definida por:

$$f(x) = \begin{cases} \sqrt[3]{x-2} & si \quad x \ge 2 \\ x(x-2) & si \quad x < 2 \end{cases}$$

a) Estudiar su continuidad y su derivabilidad
b) Hallar la ecuación cartesiana de la recta tangente a la gráfica de f en el punto (3,1)
Selectividad: Septiembre 02. Opción A

34. Sea $f(x)$ una función real de variable real, derivable y con derivada continua en todos sus puntos y tal que: $f(0) = 1$; $f(1) = 2$; $f'(0) = 3$; $f'(1) = 4$. Se pide:
a) Calcular $g'(0)$, siendo $g(x) = f(x+f(0))$
b) Calcular $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{2(f(x))^2 - f(x+1)}{e^x - 1}$.
Selectividad: Septiembre 02. Opción B

35. Determinar los valores de las constantes A, B, C y D para los cuales la gráfica de la función real de variable real $f(x) = A \operatorname{sen}x + B x^2 + C x + D$ tiene tangente horizontal en el punto (0, 4) y además su derivada segunda es $f''(x) = 3 \operatorname{sen}x - 10$.
Selectividad: Curso 02/03. Modelo opción A

36. Se considera la función real de variable real definida por:
$f(x) = \sqrt[3]{x+1} - \sqrt[3]{x}$. Se pide:
a) Hallar sus máximos y mínimos relativos y sus asíntotas
b) Hallar los puntos donde la gráfica de f tiene tangente horizontal
c) Representar gráficamente la función
Selectividad: Curso 02/03. Modelo opción B

Nota: Para obtener las asíntotas puede utilizarse la igualdad: $A - B = \dfrac{A^3 - B^3}{A^2 + AB + B^2}$

37. a) Dibujar la gráfica de la función $g(x) = e^x - x$

b) Calcular el dominio de definición de $f(x) = \dfrac{1}{e^x - x}$ y su comportamiento cuando x tiende a ∞ y cuando tiende a $-\infty$.

c) Determinar (si existen) los máximos y mínimos absolutos de $f(x)$ en su dominio de definición.
Selectividad: Junio 03. Opción B

38. Dada la función $f(x) = 1 - x^2$, se pide:
a) Halla la ecuación de la recta tangente a la gráfica de f en el punto $P(a, f(a))$, donde $0<a<1$.
b) Halla los puntos A y B en la que la recta hallada en el apartado a) corta a los ejes vertical y horizontal respectivamente.
c) Determina el valor de $a \in (0, 1)$ para el cual la distancia entre el punto A y el punto $P(a, f(a))$ es el doble de la distancia entre el punto B y el punto $P(a, f(a))$
Selectividad: Junio 04. Opción B

39. Sea la función $f(x) = \dfrac{2x+1}{(x^2+x+1)^2}$

a) Halla sus máximos y mínimos relativos y sus asíntotas.

b) Dibuja la gráfica de la función utilizando la información obtenida en el apartado anterior, teniendo en cuenta, además que f tiene exactamente tres puntos de inflexión cuyas abscisas son $x_1 = \dfrac{-1-\sqrt{3}}{2}$, $x_2 = \dfrac{-1}{2}$, $x_3 = \dfrac{-1+\sqrt{3}}{2}$, respectivamente. Selectividad: Septiembre 04. Opción B

40. Se considera la función $f(x) = \ln(1 + x^2)$, donde ln significa Logaritmo Neperiano. Determina los intervalos de crecimiento y decrecimiento y los intervalos de concavidad y convexidad. Dibuja la gráfica de f. Calcula las ecuaciones de las rectas tangentes a la gráfica de f en sus puntos de inflexión. Selectividad: Curso 04/05. Modelo opción B

41. Dada la función $f(x) = \dfrac{1}{x}$ se pide: Halla la ecuación de la recta tangente a su gráfica en el punto $(a, f(a))$. Halla los puntos de corte de la recta tangente del apartado a) con los ejes de coordenadas. Halla el valor de $a > 0$ que hace que la distancia entre los dos puntos hallados en el apartado b) sea mínima. Selectividad: Septiembre 05. Opción A

42. Se considera la función $f(x) = \dfrac{e^x}{(1+e^x)^2}$. Calcula los extremos locales y globales de la función $f(x)$.

Selectividad: Septiembre 05. Opción B

43. Dada la función: $f(x) = \dfrac{-4x}{(1+x^2)^2}$. Halla sus máximos y mínimos locales y/o globales. Selectividad:

44. a) Halla el punto P en el que se cortan las gráficas de las funciones: $f(x) = \dfrac{2}{x}$ $g(x) = +\sqrt{x^2-3}$. b) Halla las ecuaciones de las rectas tangentes en el punto P a cada una de las curvas anteriores y demuestra que son perpendiculares. Selectividad: Curso 05/06. Modelo. Opción B

45. Dibuja la gráfica de la función $f(x) = \dfrac{2x}{x+1}$ indicando su dominio, intervalos de crecimiento y decrecimiento y asíntotas.

Selectividad: Junio 06. Opción A

46. Estudia y representa gráficamente la función $f(x) = \dfrac{1}{(x-2)^2}$ Selectividad: Junio 06. Opción B

47. Calcular los valores de a y b para que la función: $f(x) = \begin{cases} 3x+2 & si\ x<0 \\ x^2+2a\cos x & si\ 0 \le x < \pi \\ ax^2+b & si\ x \ge \pi \end{cases}$ sea continua para todo valor de x.

Estudia la derivabilidad de $f(x)$ para los valores de a y b obtenidos en el apartado anterior.

Selectividad: Septiembre 06. Opción A

48. Dada la función $f(x) = xe^{2x}$, se pide dibujar su gráfica indicando su dominio, asíntotas, intervalos de crecimiento y decrecimiento, máximos y mínimos relativos, intervalos de concavidad y convexidad y puntos de inflexión. Selectividad: Septiembre 06. Opción B

49. Dibuja la gráfica de la función $f(x) = \dfrac{|x|}{2-x}$ indicando su dominio, intervalos de crecimiento y decrecimiento y asíntotas.

Selectividad: Junio 07. Opción B

50. Halla los máximos y mínimos relativos y los puntos de inflexión de la función: $f(x) = \dfrac{3x^2+x+3}{x^2+1}$.

Selectividad Septiembre 07. Opción A

51. Sea $g(x)$ una función continua y derivable para todo valor real de x, de la que se conoce la siguiente información: i) $g'(x) > 0$ para todo $x \in (-\infty, 0) \cup (2, +\infty)$, mientras que $g'(x) < 0$ para todo $x \in (0, 2)$. ii) $g''(x) > 0$ para todo $x \in (1, 3)$ y $g''(x) < 0$ para todo $x \in (-\infty, 1) \cup (3, +\infty)$. iii) $g(-1) = 0$, $g(0) = 2$, $g(2) = 1$. iv) $\lim_{x\to-\infty} g(x) = -\infty$ y $\lim_{x\to+\infty} g(x) = 3$.

Teniendo en cuenta estos datos se pide:

a) Analiza razonadamente la posible existencia o no existencia de asíntotas verticales, horizontales u oblicuas.

b) Dibuja de manera esquemática la gráfica de la función $g(x)$. Selectividad: Septiembre 07. Opción B

52. Se considera la función $f(x) = \frac{x}{e^x}$. a) Halla sus asíntotas y sus extremos locales. b) Calcula los puntos de inflexión de $f(x)$ y dibuja la gráfica de $f(x)$. Selectividad: Curso 07/08. Modelo. Opción A

53. Se considera la función

$f(x) = \begin{cases} ax^2 + b & si \quad |x| < 2 \\ \frac{1}{x^2} & si \quad |x| \geq 2 \end{cases}$ Se pide: Calcula a y b para que f sea continua y derivable en todo R. Selectividad: Curso 07/08

54. Obtén los máximos y mínimos relativos y los puntos de inflexión de la función: $f(x) = x\,(\ln(x))^2$, siendo $\ln(x)$ el logaritmo neperiano de x. Selectividad: Junio 08. Opción A

55. Dada la función $f(x) = e^{-x}(x^2 + 1)$. Se pide: Dibuja la gráfica de f, estudiando el crecimiento, decrecimiento, puntos de inflexión y asíntotas. Selectividad: Septiembre 08. Opción A

56. Sea: $f(x) = \begin{cases} 1 - \frac{x^2}{4} & si\ x < \frac{3}{2} \\ \frac{7}{12}(1-(x-2)^2) & si\ x \geq \frac{3}{2} \end{cases}$. Estudia la continuidad y derivabilidad de $f(x)$. Halla los máximos y mínimos locales de $f(x)$. Dibuja la gráfica de $f(x)$. Selectividad: Curso 08/09. Modelo. Opción A

57. Si la derivada de la función $f(x)$ es: $f'(x) = (x - 1)^3(x - 5)$, obtén: a) Los intervalos de crecimiento y decrecimiento de f. b) Los valores de x en los cuales f tiene máximos relativos, mínimos relativos, o puntos de inflexión. c) La función f sabiendo que $f(0) = 0$. Selectividad: Junio 09. Opción B

58. Dada la función: $f(x) = \begin{cases} \frac{\ln(1+ax) - bx}{x^2} & si \quad 1 + ax > 0 \quad y \quad x \neq 0 \\ -\frac{1}{2} & si\ x = 0 \end{cases}$ se pide: a) Halla los valores de los parámetros a y b para los cuales la función f es continua en $x = 0$. b) Para $a = b = 1$, estudia si la función f es derivable en $x = 0$ aplicando la definición de derivada. Selectividad: Septiembre 09. Opción A

59. a) Dada la función $f(x) = \frac{x}{1-x^2}$, halla el punto o los puntos de la gráfica de $f(x)$ en los que la pendiente de la recta tangente sea 1. b) Halla la ecuación de la recta tangente a la gráfica de $f(x)$ en el punto $x = 0$. c) Sea g una función derivable con derivada continua en toda la recta real, y tal que $g(0) = 0$, $g(2) = 2$. Demuestra que existe al menos un punto c en el intervalo (0, 2) tal que $g'(c) = 1$. Selectividad: Septiembre 09. Opción B

60. Dada la función: $f(x) = x^3 - x$
   a) Halla la ecuación de la recta tangente a la gráfica en el punto $(-1, f(-1))$
   b) Determina los puntos de intersección de la recta hallada en el apartado anterior con la gráfica de f Selectividad: Curso 09/10. Model

61. Dada la función $f(x) = e^x + a\,e^{-x}$, siendo a un número real, estudia los siguientes apartados en función de a:
a) Halla los extremos relativos y los intervalos de crecimiento y decrecimiento de f.
b) Estudia para qué valor, o valores, de a la función tiene alguna asíntota horizontal.
Selectividad: Curso 09/10. Modelo. Opción A

62. Dada la función $f(x) = \frac{x^2+2}{x^2+1}$. Se pide: a) Estudia los intervalos de crecimiento y decrecimiento de la función $f(x)$. b) Halla los puntos de inflexión de la gráfica de $f(x)$. c) Halla las asíntotas y dibuja la gráfica de $f(x)$. Selectividad: Junio 10

63. Dada la función $f(x) = \begin{cases} \frac{\sqrt{x}\ln x}{2^x} & si \quad x > 0 \\ x + k & si \quad x \leq 0 \end{cases}$ (ln significa logaritmo neperiano de x), se pide: a) Determina el valor de k para que la función sea continua en R. b) Halla los puntos de corte con los ejes de coordenadas. c) Obtén la ecuación de la recta tangente a la gráfica de la función en el punto de abscisa $x = 1$. Selectividad: Junio 10. FG. Opción B

64. Dada la función: $f(x) = \ln(x^2 + 4x - 3)$, donde ln significa logaritmo neperiano de x, se pide:
a) Determina el dominio de definición de $f(x)$ y las asíntotas verticales de su gráfica.
b) Estudia los intervalos de crecimiento y decrecimiento de $f(x)$. Selectividad: Junio 10. FE. Opción A

65. Los puntos P (1, 2, 1), Q (2, 1, 1) y A (a, 0, 0) con $a > 3$, determinan un plano π que corta a los semiejes positivos de OY y OZ en los puntos B y C respectivamente. Calcula el valor de a para que el tetraedro determinado por los puntos A, B, C y el origen de coordenadas tenga volumen mínimo. Selectividad: Septiembre 10. FG. Opción B

66. Dada la función $f(x)=\frac{3x^2+5x-20}{x+5}$, se pide a) Estudia y obtén las asíntotas. b) Estudia los intervalos de concavidad y convexidad. c) Representa gráficamente la función. Selectividad: Septiembre 10. FE. Opción B

67. Dada la función $f(x)=\frac{x-1}{(x+1)^2}$, se pide: Obtén, si existen, los máximos y mínimos relativos y las asíntotas de f. Selectividad: Curso 10/11. Modelo. Opción A

68. Halla los valores mínimo y máximo absolutos de la función $f(x)=\sqrt{12-3x^2}$ Selectividad: Junio 11.1. Opción A

69. Demuestra que la ecuación $4x^5 + 3x + m = 0$ sólo tiene una raíz real cualquiera que sea el número m. Justifica la respuestas indicando qué teoremas usas. Selectividad: Junio 11.1. Opción A

70. Dada la función: $f(x)=\frac{ax^4+1}{x^3}$, se pide: a) Determina el valor de a para el que la función posee un mínimo relativo en $x = 1$. Para ese valor de a, obtén los otros puntos en que f tiene un extremo relativo. b) Obtén las asíntotas de la gráfica de $y = f(x)$ para $a = 1$. c) Esboza la gráfica de la función para $a = 1$. Selectividad: Junio 11.1. Opción B

71. Dada la función $f(x)=\frac{2x^2+x-7}{x+3}$, se pide: a) Halla las asíntotas de la gráfica de la función $y = f(x)$. b) Halla los intervalos donde f crece y aquellos en que f decrece. Determina todos los máximos y mínimos locales. c) Esboza la gráfica de $y = f(x)$ a partir de los resultados obtenidos en los apartados anteriores. Selectividad: Junio 11.2. Opción A

72. Hallar el dominio de definición de la función $f(x) =.\sqrt{x^2-9x+14}$. Hallar el conjunto de puntos en los que la función f tiene derivada Selectividad: Septiembre 11. Opción A

73. Dado el polinomio $P(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$, obtener los valores de a, b y c de modo que se verifiquen las condiciones siguientes: a) El polinomio $P(x)$ tenga extremos relativos en los puntos de abscisas $x = -1/3$, $x = -1$. B) La recta tangente a la gráfica de $P(x)$ en el punto $(0; P(0))$ sea $y = x + 3$. Selectividad: Curso 11/12. Modelo. Opción A

74. Hallar a; b; c de modo que la función $f(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$ alcance en $x = 1$ un máximo relativo de valor 2, y tenga en $x = 3$ un punto de inflexión. Selectividad: Junio 12. Opción A

75. Dadas las funciones $f(x)=\frac{3x+ln(x+1)}{\sqrt{x^2-3}}$, $g(x)=(ln\,x)^x$, $h(x)=sen(\pi-x)$ se pide: a) Hallar el dominio de $f(x)$ y $\lim_{x\to+\infty} f(x)$. b) Calcular $g'(e)$. c) Calcular, en el intervalo $(0; 2\pi)$, las coordenadas de los puntos de corte con el eje de abscisas y las coordenadas de los extremos relativos de $h(x)$. Selectividad: Junio 12. Opción B

76. Dada la función $f(x)=\begin{cases} 3x+A & si\ x\le 3 \\ -4+10x-x^2 & si\ x>3 \end{cases}$, se pide: Halla el valor de A para que $f(x)$ sea continua. ¿Es derivable para ese valor de A? Halla los puntos en los que $f'(x) = 0$.

a) Halla el máximo absoluto y el mínimo absoluto de $f(x)$ en el intervalo [4, 8]

Selectividad: Septiembre 12. Opción A

77. Dada la función $f(x)=x^2 sen\,x$, se pide: a) Determina, justificando tu respuesta, si la ecuación $f(x) = 0$ tiene alguna solución en el intervalo abierto $(\pi/2, \pi)$. b) Obtén la ecuación de la recta normal a la gráfica de $y = f(x)$ en el punto $(\pi, f(\pi))$. Selectividad: Septiembre 12. Opción B

78. Dada la función $f(x)=\begin{cases} \frac{2x^2+3x}{x-1} & si \quad x<0 \\ a & si \quad x=0 \\ e^{-\frac{1}{x}} & si \quad x>0 \end{cases}$; se pide: a) Determinar el valor de a para que f sea continua en $x = 0$.

b) Para ese valor de a, estudiar la derivabilidad de f en $x = 0$.

c) Hallar, si las tiene, las asíntotas de la gráfica $y = f(x)$. Selectividad: Curso 12/13. Modelo. Opción A

79. Dada la función $f(x) = \frac{x^3}{(x-2)^2}$, se pide: a) Halla las asíntotas de su gráfica. b) Halla la ecuación de la recta tangente a la gráfica de $f(x)$ en el punto de abscisa $x = 2$. Selectividad: Junio 13. Opción A

80. Dada la función $f(x) = 2\ cos^2 x$ se pide: a) Determinar los extremos absolutos de $f(x)$ en $\left[\frac{-\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ b) Determinar los puntos de inflexión de $f(x)$ en $\left[\frac{-\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ Selectividad: Junio 13. Opción B

81. Dada la función $f(x) = \frac{4}{x-4} + \frac{27}{2x+2}$, se pide: a) Halla las asíntotas de su gráfica. b) Determina los intervalos de crecimiento y decrecimiento y calcula sus puntos de inflexión. c) Esboza la gráfica de la función. Selectividad: Septiembre 13. Opción A

82. Dada la función $f(x) = \frac{x}{x^2+1}$, se pide: Halla la ecuación de la recta tangente a la gráfica de f en $x = 0$. Selectividad: Septiembre 13

83. Dada la función $f(x) = e^{\frac{1}{x}}$, se pide: a) Calcula $\lim_{x \to +\infty} f(x)$, $\lim_{x \to -\infty} f(x)$ y estudia la existencia de $\lim_{x \to 0} f(x)$.
b) Esboza la gráfica de $y = f(x)$ determinando los intervalos de crecimiento y decrecimiento de $f(x)$ y sus asíntotas.
Septiembre 13. Opción B

84. Dada la función $f(x) = \begin{cases} \frac{2x^2+6}{x-1} & si\ x < 0 \\ \frac{x^2-1}{x+1} & si\ x \geq 0 \end{cases}$, se pide: a) Estudiar su continuidad. b) Estudiar la existencia de asíntotas de su gráfica y, en su caso, calcularlas.
c) Hallar los extremos relativos y esbozar de su gráfica. Selectividad: Curso 13/14. Modelo. Opción B

85. a) Sea f: R → R una función dos veces derivable. Sabiendo que el punto de abscisa $x = -2$ es un punto de inflexión de la gráfica de $f(x)$ y que la recta de ecuación $y = 16x + 16$ es tangente a la gráfica de $f(x)$ en dicho punto, determina: $f(-2)$; $f'(-2)$ y $f''(-2)$: Selectividad: Junio 14. Opción A

86. Dada la función $f(x) = \frac{1}{x+1} + \frac{x}{x+4}$, se pide: a) Determina el dominio de f y sus asíntotas.
b) Calcula $f'(x)$ y determina los extremos relativos de $f(x)$. Selectividad: Septiembre 14. Opción A

87. Dada la función $f(x) = \begin{cases} \frac{5senx}{2x} + \frac{1}{2} & si \quad x < 0 \\ a & si \quad x = 0 \\ xe^x + 3 & si \quad x > 0 \end{cases}$, se pide: a) Hallar, si existe, el valor de a para que $f(x)$ sea continua.
b) Decidir si la función es derivable en $x = 0$ para algún valor de a. Selectividad: Septiembre 14. Opción B

RESUMEN

		Ejemplos
Definición de derivada	$f'(a) = \lim\limits_{x \to a} \dfrac{f(x) - f(a)}{x - a}$ $f'(a) = \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{f(a+h) - f(a)}{h}$	
Recta tangente	$y = f(a) + f'(a)(x - a)$	Tangente a $y = x^3 + 2x$ en el punto (0, 0): $y = 0 + 2(x - 0) = 2x$.
Crecimiento y decrecimiento	Si $f'(a) > 0$ entonces $y = f(x)$ es creciente en $x = a$. Si $f'(a) < 0$ entonces $y = f(x)$ es decreciente en $x = a$.	$y = x^3 - 3x \rightarrow y' = 3x^2 - 3 = 0 \rightarrow$ $x = 1, x = -1$. • Para $x < -1$, $y' > 0 \rightarrow y$ creciente. • Para $-1 < x < 1$, $y' < 0 \rightarrow y$ decreciente • Para $x > 1$, $y' > 0 \rightarrow y$ creciente
Máximos y mínimos	Si $(a, f(a))$ es un máximo o un mínimo de $y = f(x)$ y existe $f'(a)$ entonces $f'(a) = 0$. Si $f'(a) = 0$ entonces $(a, f(a))$ es un punto crítico. Si $f'(a) = 0$ y $f''(a) > 0$ entonces $(a, f(a))$ es un mínimo. Si $f'(a) = 0$ y $f''(a) < 0$ entonces $(a, f(a))$ es un máximo. Si $(a, f(a))$ es un punto de inflexión de $y = f(x)$ y existe $f''(a)$ entonces $f''(a) = 0$. $f''(a) < 0 \Rightarrow$ cóncava. $f''(a) > 0 \Rightarrow$ convexa	$y = x^3 - 3x \rightarrow y' = 3x^2 - 3 \rightarrow y'' = 6x$. $y'(-1) = 0$, $y''(-1) < 0$, luego $(-1, 2)$ es un máximo relativo. $y'(1) = 0$, $y''(1) > 0$, luego $(1, -2)$ es un mínimo relativo. (0, 0) es un punto de inflexión

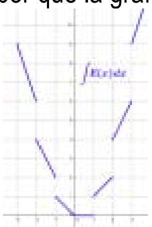
CAPÍTULO 7: INTEGRALES

ACTIVIDADES PROPUESTAS

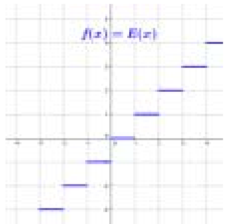
1. Repite los procedimientos anteriores para calcular el área de la región limitada por las funciones $f(x)=a$, $f(x)=a\cdot x$ y $f(x)=a\cdot x+b$ (con a y $b\in\mathbb{R}$) entre el origen de coordenadas y un punto genérico de abscisa x.

1. PRIMITIVA DE UNA FUNCIÓN. LA INTEGRAL INDEFINIDA

2. Calcula las siguientes primitivas: a) $\int 4x^3dx$ b) $\int 3x^2dx$ c) $\int 5x^4dx$ d) $\int\left(5x^4-4x^3+3x^2\right)dx$
3. Dada $f(x)=x^3-3x^2+2x+1$, calcula la primitiva de $f(x)$ que verifica $F(0)=4$.
4. Comprueba si $F(x)=4x^3+2x^2-x+5$ es una primitiva de $f(x)=12x^2+4x+3$. En caso negativo, explica por qué.
5. Determina los valores de a, b, c y d para los que $F(x)=ax^3+bx^2+cx+d$ es una primitiva de la función $f(x)=4x^2-5x+3$.
6. Al resolver una primitiva, Javier y Ricardo han utilizado métodos diferentes y, como era de esperar, han obtenido expresiones distintas. Después de revisarlo muchas veces y no encontrar ningún error en los cálculos, le llevan el problema a la profesora para ver quién tiene bien el ejercicio. Para su sorpresa, la profesora les dice que ambos tienen bien el problema. ¿Cómo es posible?
7. Razona por qué la gráfica siguiente:



es una primitiva de la función "parte entera de x", $E(x)$, (salvo en los puntos de discontinuidad donde no es derivable):



3. MÉTODOS DE INTEGRACIÓN

8. Calcula las siguientes primitivas utilizando el cambio indicado:

a) $\int\frac{\sqrt{x}-\sqrt[3]{x}}{\sqrt[4]{x}}dx$ haciendo $x=t^{12}$. b) $\int\frac{dx}{e^x+e^{-x}}$ haciendo $e^x=t$. c) $\int\frac{5x^4}{\sqrt{1+2x}}dx$ haciendo $1+2x=t^2$

d) $\int\frac{dx}{x+\sqrt{x^2-1}}$ haciendo $x+\sqrt{x^2-1}=t$ e) $\int\left(2\operatorname{sen}^3x+3\operatorname{sen}^2x-\operatorname{sen}x+3\right)\cos x\,dx$ haciendo $\operatorname{sen}\,x=t$

9. Elige el cambio de variable que simplifica las siguientes integrales:

a) $\int\frac{2x^3+1}{\left(x^4+2x\right)^3}dx$ b) $\int\frac{e^{\operatorname{tg}x}}{\cos^2x}dx$ c) $\int\frac{\ln(\ln x)}{x\cdot\ln x}dx$ d) $\int 2x^3\sqrt{x^4-49}\cdot dx$ e) $\int\frac{x+1}{\sqrt[3]{x+1}+2}dx$ f) $\int\frac{x}{\sqrt{1-4x^2}}dx$

10. Determina si las siguientes integrales son inmediatas o no:

a) $\int\left(4x^3+3x^3-\frac{1}{x^2}+\sqrt{x}\right)dx$ b) $\int\frac{\ln x}{x}dx$ c) $\int\operatorname{sen}\,x\cos\,x\,dx$ d) $\int\frac{\ln(x+1)}{x}dx$

e) $\int\frac{x^2-1}{\sqrt{1-x^2}}dx$ f) $\int\frac{x^4-2x^2+1}{x^2-1}dx$ g) $\int x^2\cdot e^{x^2}dx$ h) $\int e^{x^2}dx$

11. Resuelve las siguientes integrales:

a) $\int\left(e^{3x}+e^{2x}+e^x\right)e^xdx$; b) $\int x\cdot\cos e^{x^2}\cdot e^{x^2}dx$; c) $\int\ln(\cos x)\operatorname{tg}x\,dx$; d) $\int\frac{x\,dx}{1+x^4}$; i) $\int\frac{e^xdx}{1+e^{2x}}$; j) $\int(\ln x+2)\frac{dx}{x}$

12. Resuelve las siguientes integrales:

a) $\int\left(x^2+x+1\right)e^xdx$ b) $\int\ln\,x\,dx$ c) $\int x\cos\,x dx$ d) ***Curiosidad – idea feliz***: Resuelve la primitiva $\int\cos\,(\ln\,x)dx$

Para ello, multiplica y divide el integrando por x: $\int\frac{\cos(\ln x)}{x}\cdot x\,dx=\left|\begin{array}{l} u=x\rightarrow du=\ldots \\ dv=\frac{\cos(\ln x)}{x}dx\rightarrow v=\ldots\end{array}\right\rangle$

13. Sea $f(x) = e^{2x} - 2x^2 + 8$, justifica si es primitiva de alguna de las siguientes funciones: $g(x) = e^{2x} - 4x + 8$, $h(x) = 2e^{2x} - 4x$.
14. Dada la función $f(x) = (x+1)\cdot(3x-2)$. a) Calcula una primitiva de $f(x)$. b) Justifica que la función $F(x) = x^3 + 2x^2 + 2$ no es primitiva de $f(x)$.
15. Dada la función $f(x) = (x+a)\cos x$, donde a es una constante, a) Encuentra una primitiva de f. b) Si F es una primitiva de f, ¿puede serlo también $G(x) = F(x) + 2x$?
16. Sea $f(x) = x^2 + bx$ donde b es una constante. Encuentra b, sabiendo que hay una primitiva F de f con $F(0) = 2$ y $F(3) = 20$. Encuentra también la expresión de F.
17. Dada la función $f(x) = 25 - x^2 + \frac{a}{x^2}$ $(x \neq 0)$, donde a es una constante, encuentra una primitiva de f. Posteriormente, encuentra a para que si f' es la derivada de f, entonces $f'(1) = -2$.

4. EL PROBLEMA DEL CÁLCULO DEL ÁREA

18. Resuelve las siguientes integrales definidas:

a) $\int_0^6 \left(x^2 + x + 1\right)dx$; b) $\int_{-1}^1 \left(x^2 + x + 1\right)dx$; c) $\int_0^{\sqrt{3}} x\sqrt{x^2+1}\,dx$; d) $\int_{-1}^1 \frac{x+1}{x^2+2x+2}dx$; e) $\int_0^{\pi} \operatorname{sen} x\,dx$; f) $\int_1^e \ln x\,dx$

19. Halla el valor de c que verifica $\int_0^5 (2x+1)dx = f(c)\cdot(5-0)$ y razona su interpretación geométrica.
20. Sin efectuar el cálculo de la integral indefinida, calcula $f'(x)$ si $f(x) = \int_2^{e^x} \frac{dt}{\ln x}$

Autores: Leticia González Pascual y Álvaro Valdés

EJERCICIOS Y PROBLEMAS.

1. - Sabiendo que $\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C$ y $\int f^n(x) f'(x) dx = \frac{f^{n+1}(x)}{n+1} + C$, calcula:

1) $\int x^5 dx$ 2) $\int \frac{4}{x^5} dx$ 3) $\int \frac{dx}{x^2}$ 4) $\int 37\, dx$ 5) $\int 6x^7 dx$

6) $\int 5x^{1/4} dx$ 7) $\int 5\sqrt{x^3}\, dx$ 8) $\int (3-2x-x^4) dx$ 9) $\int (2x^5 - 5x + 3) dx$

10) $\int (2+3x^3)^2 dx$ 11) $\int 2(x^2+2)^3 dx$ 12) $\int (1-x^3)^2 dx$ 13) $\int \frac{x^3 - x + 2}{x^3} dx$

14) $\int \left(-4x^{\frac{2}{3}} + 2x\right) dx$ 15) $\int \left(3a - \frac{1}{3e^2} + 2x^a\right) dx$ 16) $\int \left(-\frac{3}{x^3} + 2 - \frac{3}{\sqrt{x}}\right) dx$ 17) $\int \left(3x^5 - \frac{4}{3x^2} + 2\sqrt[5]{x^2}\right) dx$

18) $\int (1-x)\sqrt{x}\, dx$ 19) $\int \frac{x^3 + 5x^2 - 4}{x^2} dx$ 20) $\int \left(5e^x + \frac{2x^3 - 3x^2 + 5}{4x^2}\right) dx$ 21) $\int \frac{(1+x)^2}{\sqrt{x}} dx$

22) $\int \left(\sqrt{x} - \frac{1}{2}x + \frac{2}{\sqrt{x}}\right) dx$ 23) $\int \sqrt{x}(x^3+1) dx$ 24) $\int \left(\sqrt{x^5} - \frac{2}{3\sqrt{x}}\right) dx$ 25) $\int \sqrt{x}(3-5x) dx$

26) $\int \frac{(x+1)(x-2)}{\sqrt{x}} dx$ 27) $\int (3x+4)^2 dx$ 28) $\int (3x-7)^4 dx$ 29) $\int x(x^2-4)^3 dx$

30) $\int 3x(x^2+2)^3 dx$ 31) $\int (x^3+2)^2 x^2 dx$ 32) $\int (x^3+3)x^2 dx$ 33) $\int (x-2)^{3/2} dx$

34) $\int (a+x)^3 dx$ 35) $\int \left[(x+2)^3 - (x+2)^2\right] dx$ 36) $\int \sqrt{3x+12}\, dx$ 37) $\int \frac{dx}{\sqrt{x+3}}$

38) $\int \frac{dx}{(x-1)^3}$ 39) $\int (x^2-x)^4 (2x-1) dx$ 40) $\int \frac{1}{\sqrt{x}}(1+\sqrt{x})^2 dx$ 41) $\int \frac{x^3}{(x^4-1)^2} dx$

42) $\int \frac{x\, dx}{(x^2+4)^3}$ 43) $\int x\sqrt{x^2-7}\, dx$ 44) $\int (x-1)(x^2-2x+3)^4 dx$ 45) $\int \frac{3x}{\sqrt{1+7x^2}} dx$

46) $\int \frac{8x^2}{(x^3+2)^2} dx$ 47) $\int \frac{3x dx}{\sqrt[3]{x^2+3}}$ 48) $\int x \cdot \sqrt[3]{1-x^2}\, dx$ 49) $\int \frac{x^2}{\sqrt[4]{x^3+5}} dx$

50) $\int x^2 (x^3-1)^{3/5} dx$ 51) $\int \sqrt{x^2 - 2x^4}\, dx$ 52) $\int (e^x+1)^3 e^x dx$ 53) $\int \operatorname{sen}^3 x \cos x\, dx$

54) $\int x \cos^4 x^2 \operatorname{sen} x^2 dx$ 55) $\int \frac{x \ln(x^2+3)}{x^2+3} dx$ 56) $\int \frac{\operatorname{sen} x}{\cos^3 x} dx$

57) $\int \frac{e^x}{2e^x - 3} dx$ 58) $\int \operatorname{tg}^5 x \cdot \sec^2 x\, dx$ 59) $\int \frac{\sec^2 3x}{\operatorname{tg} 3x} dx$ 60) $\int \frac{\ln x}{3x} dx$

2. - Sabiendo que $\int \frac{1}{x} dx = \ln|x| + C$ y $\int \frac{f'(x)}{f(x)} dx = \ln|f(x)| + C$, calcula:

1) $\int \frac{dx}{x+2}$ 2) $\int \frac{dx}{2x-3}$ 3) $\int \frac{dx}{x-1}$ 4) $\int \frac{x\, dx}{x^2-1}$ 5) $\int \frac{x^2}{1-2x^3} dx$ 6) $\int \frac{x^2}{1-x^3} dx$

7) $\int \frac{3x\, dx}{x^2+2}$ 8) $\int \frac{4}{3x+5} dx$ 9) $\int \frac{x+1}{x^2+2x+2} dx$ 10) $\int \left(\sqrt{x} + \frac{1}{x}\right) dx$

11) $\int \left(\frac{3}{x^2} + \frac{2}{x} + \sqrt{x}\right) dx$ 12) $\int \frac{dx}{x \ln x}$ 13) $\int \frac{dx}{\sqrt{x}(1-\sqrt{x})}$ 14) $\int \left(\frac{1}{2x-1} - \frac{1}{2x+1}\right) dx$

15) $\int \frac{e^x}{e^x+1} dx$ 16) $\int \frac{e^{2x}}{e^{2x}+3} dx$ 17) $\int \operatorname{tg} x\, dx$ 18) $\int \operatorname{cotg} x\, dx$ 19) $\int \frac{5}{x \ln x} dx$

Autores: Leticia González Pascual y Álvaro Valdés
LibrosMareaVerde.tk

20) $\int \dfrac{\text{sen } x + \cos x}{\cos x}$ 21) $\int \dfrac{2\,\text{sen } x \cos x}{1 + \text{sen}^2 x} dx$ 22) $\int \dfrac{\text{sen } x - \cos x}{\text{sen } x + \cos x}$ 23) $\int x \cot g\ x^2 dx$

3. - Si $\int e^x dx = e^x + C$, $\int e^{f(x)} f'(x)\, dx = e^{f(x)} + C$, $\int a^x dx = \dfrac{a^x}{\ln a} + C$ y $\int a^{f(x)} f''(x)\, dx = \dfrac{a^{f(x)}}{\ln a} + C$, calcula:

1) $\int 3^x dx$ 2) $\int a^{4x} dx$ 3) $\int e^{-x} dx$ 4) $\int 4e^{3x} dx$ 5) $\int 3x^2 e^{x^3+2} dx$

6) $\int 4e^{4-x} dx$ 7) $\int x^2 e^{x^3} dx$ 8) $\int \left(e^x + 1\right)^2 dx$ 9) $\int \left(e^x + \dfrac{1}{e^x}\right)^2 dx$ 10) $\int \left(e^x + x^6\right)^2 dx$

11) $\int e^{-x^2+2} x\, dx$ 12) $\int \dfrac{e^{\ln x}}{x} dx$ 13) $\int \dfrac{e^{\frac{1}{x^2}}}{x^3} dx$ 14) $\int x\, e^{\text{sen } x^2} \cos x^2 dx$ 15) $\int e^{3\cos 2x} \cdot \text{sen } 2x\, dx$

16) $\int \dfrac{e^{\sqrt{x}}}{5\sqrt{x}} dx$ 17) $\int e^{\cos x} \cdot \text{sen } x\, dx$ 18) $\int \left(\dfrac{\sqrt{1+e^2}}{2e} - e^{x+3}\right) dx$

19) $\int e^{tg 2x} \sec^2 2x\, dx$ 20) $\int \dfrac{2x}{3} \cdot 3^{3+5x^2} dx$ 21) $\int \dfrac{x}{2} \cdot 2^{3-5x^2} dx$

4. - Sabiendo que $\int \text{sen } x\, dx = -\cos x + C$, $\int f'(x) \cdot \text{sen } f(x) dx = -\cos f(x) + C$, $\int \cos x\, dx = \text{sen } x + C$ y $\int \cos f(x) f'(x) dx = \text{sen } f(x) + C$ calcula:

1) $\int \text{sen}(2x+8) dx$ 2) $\int \text{sen} \dfrac{x}{2} dx$ 3) $\int \cos 3x\, dx$

4) $\int x\, \text{sen}\, x^2 dx$ 5) $\int \left(\dfrac{3\,\text{sen}\, x - 2\cos x}{4}\right) dx$ 6) $\int \text{sen } 2x\, dx$

7) $\int e^x \cos e^x dx$ 8) $\int x \cos\left(2x^2\right) \cdot \text{sen}\left(2x^2\right) dx$ 9) $\int \dfrac{\text{sen}(\ln x)}{x} dx$

5. – Si $\int \dfrac{1}{\cos^2 x} dx = \int \left(1 + \text{tg}^2 x\right) dx = \text{tg } x + C$ y $\int \dfrac{f'(x)}{\cos^2 f(x)} dx = \int \left[1 + \text{tg}^2 f(x)\right] \cdot f'(x) dx = \text{tg } f(x) + C$, calcula:

1) $\int x\left(1 + \text{tg } x^2\right) dx$ 2) $\int (1 + \text{tg } x)^2 dx$ 3) $\int \text{tg}^2 3x\, dx$

6. – Halla el valor de las siguientes integrales, usando un cambio de variable:

1) $\int (2+5x)^4 dx$ 2) $\int (3+4x)^6 dx$ 3) $\int 6x\left(3+x^2\right)^5 dx$ 4) $\int \left[\dfrac{3}{5+4x} + \dfrac{3}{(5+4x)^3}\right] dx$

5) $\int \left(\sqrt{3+2x} + \sqrt[3]{3+2x}\right) dx$ 6) $\int \left(\dfrac{e^x - 4}{e^{2x}}\right) dx$ 7) $\int \text{sen}^3 x \cdot \cos x \cdot dx$ 8) $\int \dfrac{\text{sen } x}{\cos x} dx$

9) $\int \dfrac{\cos x}{\text{sen}^4 x} dx$ 10) $\int x\sqrt{x^2 + 4}\, dx$ 11) $\int \left(\dfrac{e^x + 3}{e^{2x}}\right) dx$ 12) $\int \left(\dfrac{e^{-x} + 2}{e^{3x}}\right) dx$

7. – Halla el valor de las siguientes integrales, usando el método de integración por partes:

1) $\int 3x \cos x\, dx$ 2) $\int x^2 \cdot \text{sen}\, x\, dx$ 3) $\int x^2 \ln x\, dx$ 4) $\int \sqrt{x} \ln x\, dx$ 5) $\int \dfrac{\ln x}{x^2} dx$ 6) $\int 2e^x \cdot \cos x \cdot dx$

8. – Halla el valor de las siguientes integrales definidas:

1) $\int_1^3 \dfrac{dx}{2x}$ 2) $\int_2^3 \dfrac{x}{x^2 - 1} dx$ 3) $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{5\pi}{3}} \text{sen } x\, dx$ 4) $\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}} \text{sen } 3x\, dx$ 5) $\int_{-4}^{4} |\, x \,|\, dx$

6) $\int_{-1}^{1} \left(3x^2 - 2x + \dfrac{1}{2}\right) dx$ 7) $\int_{-1}^{2} \left(\dfrac{2}{x+2} - \dfrac{3}{x-3}\right) dx$ 8) $\int_{-2}^{2} \left(\dfrac{3a}{5} - \dfrac{x}{2}\right) dx$

9. – Halla el valor de b para que se cumpla $\int_{-1}^{b} \left(2bx - 3x^2\right) dx = -12$.

10. – Halla el área entre la función $f(x) = x^2 - 4x$, el eje de abscisas y las rectas $x = 1$ y $x = 6$.

11. – Halla el área de la región limitada por la función $f(x) = x^3 - x^2 - 6x$ y el eje de abscisas.

12. – Halla el área delimitada por las gráficas: a) $y = \frac{1}{2}x^2 - x + 1$ e $y - x - 1 = 0$.

b) $f(x) = \sqrt{x}$ y $g(x) = x^2$; c) $f(x) = x^2 + x + 4$ y $g(x) = -x^2 + 2x + 5$

AUTOEVALUACIÓN

1. Los valores de a, b y c para los que $F(x) = a\,x^3 + b\,e^x + c\,\text{sen}\,x$ es una primitiva de la función $f(x) = 3x^2 - 7\,e^x + 5\cos x$ son:
   a) 1, –7, 5; b) 3, 7, –5; c) 1, –7, –5; d) 3, –7, 5
2. La integral inmediata $\int x\sqrt{2x^2+3}\,dx$ vale:
   a) $\frac{\sqrt{(2x^2+5)^3}}{6}+C$; b) $\frac{\sqrt{(2x^2+3)^3}}{6}+C$ c) $\frac{\sqrt{(2x^2+5)^3}}{4}+C$; d) $\frac{\sqrt{(2x^2+5)^2}}{6}+C$
3. La integral $\int \frac{dx}{1-x^2}$ vale:
   a) $\ln\left|\frac{1+x}{1-x}\right|+C$; b) $\ln\left|\frac{1-x}{1+x}\right|+C$ c) $\frac{1}{2}\cdot\ln\left|\frac{1+x}{1-x}\right|+C$; d) $\frac{1}{2}\cdot\ln\left|\frac{1-x}{1+x}\right|+C$
4. Al integrar por partes $\int x\cdot\text{sen}\,x\cdot dx$ se obtiene:
   a) $x\cdot\text{sen}\,x-\cos x+C$; b) $x\cdot\cos x-\text{sen}\,x+C$ c) $-x\cdot\cos x+\text{sen}\,x+C$; d) $-x\cdot\text{sen}\,x+\cos x+C$
5. La integral $\int(x^2+4x+13)dx$ vale:
   a) $(x^2+4x+13)+C$; b) $x^3+4x^2+13x+C$; c) $\frac{1}{3}x^3+2x^2+13x$; d) $\frac{1}{3}x^3+2x^2+13x+C$
6. La integral $\int e^x\cos e^x dx$ vale:
   a) $\text{sen}\,e^x+C$; b) $-\text{sen}\,e^x+C$ c) $\frac{\text{sen}\,e^x}{e^x}+C$; d) $e^x\cdot\text{sen}\,e^x+C$
7. La integral definida $\int_0^\pi \cos x\,dx$ vale:
   a) 1; b) π c) 0; d) –1
8. El área comprendida entre la gráfica de la función $f(x)=-x^2+4x$, el eje de abscisas y las rectas x = 0 y x = 4 vale:
   a) 128/3; b) 32/3 c) 64/2; d) 64/3
9. El área comprendida entre las gráficas de las funciones $f(x)=-x^2+4x$ y $g(x)=x$ vale:
   a) 9/2; b) 19/3 c) 27/2; d) 3
10. La regla de Barrow sirve para…:
    a) …calcular determinantes de orden 3; b) …resolver sistemas de ecuaciones;
    c) …resolver integrales definidas; d) …calcular la probabilidad de sucesos.

Apéndice: Problemas de integrales en las P.A.U.

(1) Calcula una primitiva de la función $f(x)=\dfrac{x^3-3x+5}{\sqrt[3]{x}}$

(2) Calcula haciendo el cambio de variable $e^x = t$: a) $\int \dfrac{e^x}{e^{2x}-1}dx$ b) $\int \dfrac{e^x-4e^{2x}}{1+e^x}dx$

(3) Calcula $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(e^{2x}+x\cos x\right)dx$

(4) Considera la función $_{-3}$ $y=x^3-3x^2+1$. a) Determina la recta tangente en el punto en que la función alcanza su máximo relativo. b) Dibuja el recinto limitado por la curva y la recta tangente anterior. c) Halla el área del recinto del apartado (b).

(5) Considera la función $f(x)=\dfrac{1}{2}-\operatorname{sen} x$. a) Dibuja el recinto acotado por la gráfica de $f(x)$, el eje *OX* y las rectas $x = 0$ y $x=\frac{\pi}{2}$. b) Calcula el área del recinto anterior.

(6) a) Dibuja el recinto plano limitado por la parábola $y = 4x - x^2$ y las tangentes a la curva en los puntos de intersección con el eje de abscisas. b) Halla el área del recinto dibujado en (a).

(7) Sea la función $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ definida por $f(x)=\begin{cases} 4x+12 & \text{si} \quad x\le -1 \\ x^2-4x+3 & \text{si} \quad x>-1\end{cases}$. a) Haz un dibujo aproximado de la gráfica de la función *f*. b) Calcula el área del recinto limitado por la función *f*, el eje de abscisas y la recta $x = 2$.

(8) Sea la parábola $y=x^2-3x+6$. a) Halla la ecuación de la tangente a la gráfica de esa curva en el punto de abscisa $x = 3$. b) Haz un dibujo aproximado del recinto limitado por la gráfica de la parábola, el eje *OY* y la recta tangente hallada anteriormente. c) Calcula el área del recinto anterior.

(9) Considera las curvas $f(x)=x^2-3x-2$ y $g(x)=x^2-x-2$. a) Encuentra sus puntos de intersección. b) Representa el recinto limitado que encierran entre ellas. c) Encuentra el área del recinto limitado por las dos curvas.

(10) Dada la función $f(x)=(x-a)\cos x$, busca el valor del número real a sabiendo que $\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x)dx=\dfrac{\pi}{2}-2$

(11) Las curvas $y=e^x$, $y=e^{-x}$ y la recta $x=1$ limitan un recinto finito en el plano. a) Dibuja un esquema del recinto. b) Calcula su área.

(12) Se considera la curva de ecuación $y=x^3-2x^2+x$. a) Calcula la ecuación de la recta tangente a la gráfica de esa curva en el origen. b) Dibuja un esquema del recinto limitado por la gráfica de la curva y la recta hallada. c) Calcula el área de ese recinto.

(13) La derivada de una función $f(x)$ es $f'(x)=(x+2)\cdot\left(x^2-9\right)$. a) Calcula los intervalos de crecimiento y decrecimiento y los máximos y mínimos de $f(x)$. b) Determina la función f sabiendo que $f(0)=\dfrac{1}{5}$.

(14) La gráfica de la parábola $y=2x^2$ divide al cuadrado de vértices $A(0,0)$, $B(2,0)$, $C(2,2)$ y $D(0,2)$ en dos recintos planos. a) Dibuja la gráfica de la función y los recintos. b) Calcula el área de cada uno de ellos.

(15) a) Calcula la función $f(x)$ sabiendo que su derivada es $f'(x)=(x-1)e^x$ y que $f(2)=e$.
b) Demuestra que $f(x)$ tiene un extremo relativo en un punto del eje de abscisas y razona si es máximo o mínimo.

(16) Las gráficas de la curva $y=x^3$ y de la parábola $y=x^2+2x$ encierran un recinto plano. a) Dibuja ese recinto. b) Calcula su área.

(17) Sea $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ la función definida por $f(x)=\begin{cases} x^2 & \text{si} \quad x<0 \\ mx+n & \text{si} \quad 0\le x\le 1 \\ 2 & \text{si} \quad 1\le x\end{cases}$. a) Calcula m y n para que *f* sea continua en todo su dominio. b) Para esos valores hallados, calcula el área del recinto limitado por la gráfica de *f* y la recta $y = 1$.

(18) Sea la función $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ definida por $f(x)=\begin{cases} 2x+4 & \text{si} \quad x\le 0 \\ (x-2)^2 & \text{si} \quad x>0\end{cases}$. a) Dibuja la gráfica de la función. b) Halla el área del recinto limitado por la gráfica de *f* y el eje de abscisas.

(19) La curva $y=x^3-3x$ y la recta $y=x$ limitan un recinto finito en el plano. a) Dibuja un esquema del recinto. b) Calcula su área.

(20) La parábola $x=y^2+1$ y la recta $x=3$ limitan un recinto finito en el plano. a) Dibuja un esquema del recinto. b) Calcula su área.

(21) La curva $y=x^2+3$ y la recta $y=2x+3$ limitan un recinto finito en el plano. a) Dibuja un esquema del recinto. b) Calcula su área.

(22) Se considera la parábola $y=6x-x^2$. a) Calcula la ecuación de las rectas tangentes a la gráfica de la parábola en los puntos de corte con el eje OX. b) Dibuja un esquema del recinto limitado por la gráfica de la parábola y las rectas halladas anteriormente. c) Calcula el área de ese recinto.

(23) Se considera la función $f(x)=\begin{cases} 2x-2 & \text{si } x<2 \\ e^{x-2}+k^2 & \text{si } x\geq 2 \end{cases}$. a) Determina el valor de $k > 0$ para que la función sea continua en el intervalo $[0,4]$. b) Suponiendo que $k=1$, halla la recta tangente en $x=3$. c) Suponiendo que $k=1$, halla el área que la función determina con el eje OX, para $x\in[0,4]$.

(24) a) Resuelve por partes la siguiente integral: $\int x(1-\ln x)dx$

b) De todas las primitivas de $f(x)=x(1-\ln x)$ calcula la que pasa por el punto $(1,3)$.

(25) La gráfica de la parábola $y^2=8x$ y la recta $x=2$ encierran un recinto plano. a) Dibuja aproximadamente dicho recinto. b) Calcula el área de ese recinto.

(26) La gráfica de la curva $f(x)=\dfrac{4}{2-x}$ y las rectas $y=4$ y $x=0$ encierran un recinto plano. a) Dibuja aproximadamente dicho recinto. b) Calcula el área de ese recinto.

(27) Esboza la gráfica de la parábola $y=-x^2+x+\frac{7}{4}$ y halla el área de la región del plano determinada por la parábola y la recta que pasa por los puntos $\left(0,\frac{1}{4}\right)$ y $\left(\frac{1}{6},0\right)$.

(28) Se dispone de una chapa de acero que puede representarse por la región del plano determinada por la parábola $y=-x^2+4$ y la recta $y=1$. a) Representa gráficamente la chapa y calcula su área. b) Determina las dimensiones del rectángulo de área máxima que se puede obtener a partir de dicha chapa con la condición de que uno de sus lados esté en la recta $y=1$.

(29) Representa gráficamente las parábolas $y^2-4x=0$ y $x^2-4y=0$ y calcula el área que encierran.

(30) Se considera la función $f(x)=2-\dfrac{x}{x^2+1}$. a) Halla los máximos, mínimos y puntos de inflexión. b) Para $x\in[0,5]$, esboza la gráfica de la función y calcula el área comprendida entre ella y el eje X.

(31) Se considera la función $f(x)=\dfrac{x}{x^2+1}$. a) Halla sus asíntotas, máximos y mínimos. b) Representa gráficamente la función. c) Halla el área delimitada por la función y el eje OX, para $-1\leq x\leq 1$.

(32) Si x representa el volumen de producción de una fábrica, el coste marginal de la misma viene dado por la función $f(x)=3+8x+15x^2$. Se pide: a) Encuentra la función del coste total F, si se sabe que dicha función viene dada por la primitiva F de f que verifica que $F(0)=100$. b) Estudia y representa gráficamente la función f en el intervalo $[0,\infty)$. Calcula el área limitada por la curva y el eje X entre $x=0$ y $x=1$.

(33) La función de costes marginales de una empresa es $f(x)=\dfrac{10}{(x+1)^2}$. Se pide: a) Encuentra la primitiva F de f verificando que $F(4)=0$. b) Estudia y representa gráficamente la función f. Calcula el área limitada por la curva y el eje X entre $x=0$ y $x=1$.

(34) Sea la función $f(x)=5+\dfrac{1}{x^2}$ $(x>0)$. Si f' representa su derivada, a) Calcula $f'(2)$. b) Dibuja la función f. Halla el área limitada por la curva y el eje X entre $x=1$ y $x=2$.

(35) Dada la función $f(x)=\frac{a}{x^2}+x^2 \quad (x>0)$, donde a es una constante, a) Si se supiera que $f'(2)=1$ donde f' es la derivada de f, ¿cuánto valdría a? b) Dibuja la función f si $a = 16$ y halla el área limitada por la curva y el eje X entre $x = 2$ y $x = 3$.

(36) Sea la función $f(x)=3x^2-6x$. Si f' representa su derivada, a) Encuentra una primitiva F de f verificando $F(2)=f'(3)$. b) Dibuja la función f. Calcula el área limitada por la curva y el eje X entre $x=1$ y $x=3$.

(37) Dada la función $f(x)=x^3-81x^2$, A) Si f' representa la derivada de f, encuentra una primitiva F de f tal que $F(4)=f'(4)$. B) Dibuja la función f. Halla el área limitada por la curva y el eje X entre $x = -4$ y $x = 4$.

(38) a) Dada la función $f(x)=25-x^2+\frac{a}{x^2} \quad (x\neq 0)$, donde a es una constante, encuentra una primitiva de f y halla el valor de a para que si f' es la derivada de f, entonces $f'(1)=-2$. b) Dibuja la función $f(x)=25-x^2$, y halla el área limitada por la curva y el eje de abscisas entre los puntos de abscisas $x=1$ y $x = 6$.

(39) Determina la función primitiva y el área bajo la curva en el intervalo $[1,e]$ de la función $f(x)=\ln x$.

(40) Enuncia la regla de Barrow y aplícala a la función $f(x)=e^x(x+1)$ en el intervalo $[0,1]$.

RESUMEN

CUADRO DE PRIMITIVAS	
$\int dx = x + C$; $\int f'(x)\,dx = f(x) + C$; $\int (f(x) \pm g(x) \pm \ldots)\,dx = \int f(x)\,dx \pm \int g(x)\,dx \pm \ldots$ $\int a \cdot f(x)\,dx = a \cdot \int f(x)\,dx$; $\int f^{n}(x) f'(x)\,dx = \frac{1}{n+1}[f(x)]^{n+1} + C,\ n \neq -1$; $\int \frac{f'(x)}{f(x)}\,dx = \ln\lvert f(x)\rvert + C$ $\int e^{f(x)} f'(x)\,dx = e^{f(x)} + C$; $\int a^{f(x)} f'(x)\,dx = \frac{a^{f(x)}}{\ln a} + C,\ a \neq 1,\ a>0$; $\int \cos[f(x)] f'(x)\,dx = \operatorname{sen}[f(x)] + C$ $\int \operatorname{sen}[f(x)] f'(x)\,dx = -\cos[f(x)] + C$; $\int \sec[f(x)] \cdot \operatorname{tg}[f(x)] f'(x)\,dx = \sec[f(x)] + C$ $\int \sec^2[f(x)] f'(x)\,dx = \operatorname{tg}[f(x)] + C$; $\int \operatorname{cosec}^2[f(x)] f'(x)\,dx = -\operatorname{cotg}[f(x)] + C$	
Método de integración por cambio de variable	1. $\int g[f(x)] \cdot f'(x)\,dx \to t = f(x) \Rightarrow dt = f'(x)\,dx$; $\int g(t)\,dt = G(t) + C \Rightarrow F(x) = G[f(x)] + C$ 2. $\int f(x)\,dx \to x = g(t) \Rightarrow dx = g'(t)\,dt$; $\int f[g(t)]\,g'(t)\,dt = G(t) + C \Rightarrow F(x) = G[g^{-1}(x)] + C$
Método de integración por partes	$\int u \cdot dv = u \cdot v - \int v \cdot du$
Regla de Barrow	$\int_a^b f(x)\,dx = (F(x))_a^b = F(b) - F(a)$
Área entre una curva y el eje OX	$A = \int_a^b \lvert f(x)\rvert\,dx$
Área entre dos curvas	$A = \int_a^b \lvert f(x) - g(x)\rvert\,dx$

CAPÍTULO 8: PROBABILIDAD

ACTIVIDADES PROPUESTAS

1. PROBABILIDAD

1. Indica si son, o no, fenómenos aleatorios:
    a) El número de habitantes de las provincias españolas.
    b) El área de un cuadrado del que se conoce el lado.
    c) Tirar tres dados y anotar la suma de los valores obtenidos.
    d) Saber si el próximo año es bisiesto.
2. Escribe el conjunto de posibles resultados del experimento aleatorio: "*Escribir en seis tarjetas cada una de las letras de la palabra MONEDA y sacar una al azar*".
3. Escribe el conjunto de posibles resultados del experimento aleatorio: "*Sacar una bola de una bolsa que tiene bolas negras, rojas y blancas*".
4. Inventa dos sucesos del experimento aleatorio: *Tirar dos dados*.
5. Comprueba, utilizando el ejemplo anterior, que se verifican las 10 propiedades del Álgebra de Sucesos. ***Por ejemplo:*** Vamos a comprobar la Ley de Morgan: $(A \cap B)^C = A^C \cup B^C$:
    $A \cap B = \{6\} \to (A \cap B)^C = \{1, 2, 3, 4, 5\}$.
    $A = \{2, 4, 6\} \to A^C = \{1, 3, 5\}$; $B = \{3, 6\} \to B^C = \{1, 2, 4, 5\}$; $A^C \cup B^C = \{1, 2, 3, 4, 5\}$.
6. Al sacar una carta de una baraja española, llamamos B al suceso sacar un oro y A al suceso sacar un rey. Escribe los sucesos: $A \cup B$, $A \cap B$, $A - B$, A^C, $(A \cup B)^C$, $A^C \cup B^C$.
7. Utiliza un diagrama de *Venn* para escribir a $A \cup B \cup C$ como unión de conjuntos disjuntos.
8. Considera ahora un diagrama de *Venn* con sólo dos conjuntos, y representa en él la siguiente situación: Se sabe que en un grupo de trabajo de 35 personas, hay 15 personas A que toman té, 27 que toman café B y 2 personas que no toman ninguna bebida: $(A \cup B)^C$ A) ¿Suman más de 35? Eso es porque hay personas que toman té y café, ¿cuántas? Escríbelo en función de A y B, y represéntalo en el diagrama de *Venn*. B) ¿Cuántas personas sólo toman té y cuántas toman sólo café? C) Nombra con letras a los conjuntos siguientes e indica de cuántas personas están formados: a) Toman café y té. b) No toman ni café ni té. c) Toman té o bien toman té. d) Toman té y no toman café. D) De entre las personas que toman café, ¿cuántas toman también té? A este conjunto lo nombramos A/B. E) ¿Cuántas personas no toman café? Nómbralo con letras e indícalo en el diagrama. F) ¿Cuántas personas toman al menos una de las dos bebidas? Compara el resultado con el de las personas que no toman ninguna de las dos medidas.
9. Calcula la probabilidad de que al sacar una carta de la baraja sea una espada.
10. Para saber la probabilidad de que un recién nacido sea zurdo, ¿te basarías en el estudio de las frecuencias relativas o la asignarías por simetría?
11. Calcula la probabilidad de, al tirar un dado dos veces, sacar un 6 doble.
12. Al tirar un dado, calcula la probabilidad de salga un múltiplo de 2 o bien un múltiplo de 3.
13. Al tirar un dado, calcula la probabilidad de salga un múltiplo de 2 y además un múltiplo de 3.
14. Al tirar un dado, calcula la probabilidad de salga un número menor que 4 o bien un número mayor que 2.
15. Al tirar un dado, calcula la probabilidad de salga un número menor que 4 y además un número mayor que 2.
16. Tiramos dos dados. Calcula la probabilidad de que la suma de sus caras superiores sea 7.
17. Tiramos dos dados. Calcula la probabilidad de que la suma de sus caras superiores menor que 7.
18. ¿Cuál es la probabilidad de *no* sacar un 6 al tirar un dado? ¿Y de sacar un 7? ¿Y de sacar un número menor que 5 o bien un número mayor que 3?
19. Al tirar una moneda tres veces, ¿cuál es la probabilidad de no sacar ninguna cara? ¿Y de sacar al menos una cara? Observa que sacar al menos una cara es el suceso contrario de no sacar ninguna cara.
20. En tu cuaderno haz un diagrama en árbol similar al anterior con los sucesos A y B: A = *sacar un oro* en la primera extracción, $\overline{A}$ = *no sacar oro*, y B = *sacar un oro* en la segunda extracción, $\overline{B}$ = *no sacar oro en la segunda extracción*. ¿Cuál es la probabilidad de *sacar oro* en la segunda extracción condicionado a *no* haberlo sacado en la primera? ¿Y la de *no sacar oro* en la segunda extracción condicionado a no haberlo sacado en la primera? ¿Cuál es la probabilidad de *sacar dos oros*? ¿Y la de sacar un solo *oro*? ¿Y la de sacar al menos un oro?
21. En el diagrama de árbol anterior indica cual es la probabilidad de "*no salen* 2 *oros*" y la de "*no sale ningún oro*".
22. Al tirar dos veces un dado calcula la probabilidad de sacar al menos un 6. *Ayuda*: Quizás te sea más fácil calcular la probabilidad de *no sacar ningún* 6, y utilizar el suceso contrario.

23. Lanzamos dos dados que no estén trucados y anotamos los números de su cara superior. Consideramos el suceso A que la suma de las dos caras sea 10, y el suceso B que esos números difieran en dos unidades. a) Calcula $P(A)$ y $P(B)$. b) Calcula las probabilidades de: $P(A\cap B)$; $P(A \cup B)$; $P(A \cap \overline{B})$; $P(\overline{A} \cap B)$; $P(\overline{A} \cap \overline{B})$. c) Calcula $P(A/B)$; $P(A/\overline{B})$; $P(\overline{A}/B)$.
24. La probabilidad del suceso A es 2/3, la del suceso B es 3/4 y la de la intersección es 5/8. Halla:
    (a) La probabilidad de que se verifique alguno de los dos.
    (b) La probabilidad de que no ocurra B.
    (c) La probabilidad de que no se verifique ni A ni B.
    (d) La probabilidad de que ocurra A si se ha verificado B. Selectividad. Septiembre 96
25. En un supermercado se ha estudiado el número de clientes que compran tres productos A, B y C. Del estudio se ha obtenido que un 14 % de los clientes compra el producto A y un 12 % compra el producto B. Además, un 4 % compra A y B, un 2 % compra A y C y ningún cliente que compre C compra también B.
    (a) ¿Cuántos clientes compran únicamente el producto B?
    (b) Sabiendo que un cliente ha comprado A, ¿cuál es la probabilidad de que también haya comprado C pero no B? Selectividad. Curso 96/97
26. Sean A y B dos sucesos asociados a un experimento aleatorio. Sabiendo que $P(A)$ = 1/3, $P(B)$ =1/5 y $P(A\cup B)$ = 7/15, hallar:

a) La probabilidad de que se verifique A y B.
b) La probabilidad de que se verifique A y no B.
c) La probabilidad de que no se verifique ni A ni B.
d) La probabilidad de que no se verifique A, si no se ha verificado B. Selectividad. Septiembre 97

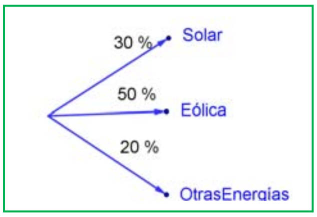
27. Sean A y B dos sucesos aleatorios tales que: $P(A)=\frac{3}{4}, P(B)=\frac{1}{2}, P(\overline{A}\cap\overline{B})=\frac{1}{20}$

Calcular: $P(A\cup B), P(A\cap B), P(\overline{A}/B), P(\overline{B}/A)$. Selectividad. Septiembre 07

28. Se considera dos sucesos A y B tales que: $P(A) = \frac{1}{3}$, $P(B|A) = \frac{1}{4}$, $P(A \cup B) = \frac{1}{2}$.
29. Calcula razonadamente: (a) $P(A \cap B)$. (b) $P(B)$. (c) $P(\overline{B}/A)$ (d) $P(\overline{A}/\overline{B})$ Selectividad. Septiembre 2012

Nota. $\overline{S}$ denota el suceso complementario del suceso S. $P(S/T)$ denota la probabilidad del suceso S condicionada al suceso T.

30. Dibuja en tu cuaderno un diagrama en árbol para tres incendios, y calcula la probabilidad de que al menos uno haya sido por negligencia siendo $P(N)$ = 0'4.



31. Una fábrica de móviles desecha normalmente el 0,02 % de su producción por fallos debidos al azar. Calcula la probabilidad de que: a) Al coger dos móviles al azar haya que desechar ambos. b) Al coger dos móviles al azar haya que desechar sólo uno. c) Al coger dos móviles al azar no haya que desechar ninguno. d) Verificamos 3 móviles, calcula la probabilidad de desechar los tres. e) Calcula la probabilidad de al verificar 3 móviles rechazar sólo el tercero.
32. En una aeronave se han instalado tres dispositivos de seguridad: A, B y C. Si falla A se pone B en funcionamiento, y si también falla B empieza a funcionar C. Las probabilidades de que funcione correctamente cada dispositivo son: $P(A)$ = 0'99; $P(B)$ = 0'96 y $P(C)$ = 0'97. a) Calcula la probabilidad de que fallen los tres dispositivos. b) Calcula la probabilidad de que todo vaya bien.
33. Lanzamos una moneda hasta que aparezca dos veces seguidas del mismo lado. Calcula las probabilidades de que: A) La experiencia termine al segundo lanzamiento. B) Termine al tercer lanzamiento. C) Termine en el cuarto. D) Termine a lo sumo en el cuarto lanzamiento (es decir, que termine en el segundo o en el tercero o en el cuarto lanzamiento).

34. Se ha hecho un estudio estadístico sobre accidentes de tráfico y se han determinado las siguientes probabilidades reflejadas en la tabla de contingencia:

	Accidente en carretera (*C*)	Accidente en zona urbana (*U*)	Totales
Accidente con víctimas (*V*)	0'3		0'4
Accidente con sólo daños materiales (*M*)			
Totales	0'7		1

a) Copia la tabla en tu cuaderno y complétala.

b) Determina las siguientes probabilidades: $P(V \cap C)$; $P(V \cap \mathrm{U})$; $P(M \cap C)$; $P(M \cap U)$; $P(V)$; $P(M)$; $P(C)$ y $P(U)$.

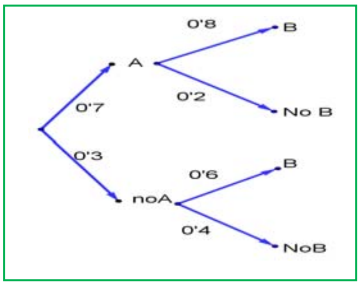
c) Calcula $P(U/V)$; $P(C/V)$; $P(V/U)$; $P(V/C)$. ¿Son dependientes o independientes los sucesos: accidente con víctimas y accidente en carretera?

35. Inventa una tabla de contingencia considerando que los accidentes puedan ser de carretera (C) o urbanos (U), pero que ahora los clasificamos en leves (L), graves (G) o mortales (M). *Observa que* lo fundamental para confeccionar la tabla es que los sucesos sean incompatibles dos a dos.

36. Dada la tabla de contingencia, construye dos diagramas de árbol.

	A	No ***A*** = $\overline{A}$	
B	0'3	0'1	0'4
No ***B*** = $\overline{B}$	0'5	0'1	0'6
	0'8	0'2	1

37. Dado el diagrama de árbol del margen, complétalo calculando las probabilidades de las intersecciones, construye la tabla de contingencia asociada, y después el otro diagrama de árbol.



38. Se sabe que en cierta población, la probabilidad de ser hombre y daltónico es un doceavo y la probabilidad de ser mujer y daltónica es un veinticincoavo. La proporción de personas de ambos sexos es la misma. Se elige una persona al azar.

(a) Si la persona elegida es hombre, hallar la probabilidad de que sea daltónico.

(b) Si la persona elegida es mujer, hallar la probabilidad de que sea daltónica.

(c) ¿Cuál es la probabilidad de que la persona elegida padezca daltonismo? Selectividad Junio 94

39. Una caja de caramelos contiene 7 caramelos de menta y 10 de fresa. Se extrae al azar un caramelo y se sustituye por dos del otro sabor. A continuación se extrae un segundo caramelo. Hállese la probabilidad de que:

a) El segundo caramelo sea de fresa.

b) El segundo caramelo sea del mismo sabor que el primero. Selectividad Septiembre 2013

40. En un avión de línea regular existe clase turista y clase preferente. La clase turista ocupa las dos terceras partes del pasaje y la clase preferente el resto. Se sabe que todos los pasajeros que viajan en la clase preferente saben hablar inglés y que el 40 % de los pasajeros que viajan en clase turista no saben hablar inglés. Se elige un pasajero del avión al azar. a) Calcúlese la probabilidad de que el pasajero elegido sepa hablar inglés. b) Si se observa que el pasajero elegido sabe hablar inglés, ¿cuál es la probabilidad de que viaje en la clase turista? Selectividad Septiembre 2013

41. Una tienda de trajes de caballero trabaja con tres sastres. Un 5 % de los clientes atendidos por el sastre A no queda satisfecho, tampoco el 8 % de los atendidos por el sastre B ni el 10 % de los atendidos por el sastre C. El 55 % de los arreglos se encargan al sastre A, el 30 % al B y el 15 % restante al C. Calcúlese la probabilidad de que:

a) Un cliente no quede satisfecho con el arreglo.

b) Si un cliente no ha quedado satisfecho, le haya hecho el arreglo el sastre A. Selectividad Junio 2013

42. Tenemos dos urnas, A y B. La primera con 10 bolas blancas y 8 bolas negras. La segunda con 5 bolas blancas y 3 bolas negras. Se saca una bola al azar, de una de las dos urnas, también al azar y resulta ser negra. ¿Cuál es la probabilidad de que proceda de la urna A?

43. En un proceso de fabricación de bombillas se detecta que el 1 % salen defectuosas. Se utiliza un dispositivo para detectarlos que resulta que detecta el 95 % de las bombillas defectuosas, pero señala como defectuosas un 2 % que no lo son. A) Calcula la probabilidad de que sea correcta una bombilla que el dispositivo ha calificado como defectuosa. B) Calcula la probabilidad de que sea defectuosa una bombilla que el dispositivo ha calificado como correcta. *Ayuda*: Utiliza primero un diagrama en árbol y luego una tabla de contingencia. Selectividad

44. Se tienen 3 cajas, A, B y C. La caja A tiene 20 bolas de las cuales 5 son negras. La caja B tiene 10 bolas con una bola negra. La caja C tiene 15 bolas con 10 negras. Se coge una caja al azar y de esa caja se saca una bola, también al azar, y es negra. Calcula la probabilidad de que se haya sacado de la caja C.

45. Tenemos una moneda trucada cuya probabilidad de obtener cara es 0'4. Si sale cara se escoge al azar un número del 1 al 10, y si sale cruz, se escoge un número del 1 al 5. Calcula la probabilidad de que el número escogido sea impar. Selectividad

46. Al analizar las actividades de ocio de un grupo de trabajadores fueron clasificados como deportistas o no deportistas y como lectores o no lectores. Se sabe que el 55 % de los trabajadores se clasificaron como deportistas o lectores, el 40 % como deportistas y el 30 % lectores. Se elige un trabajador al azar: Selectividad Junio 2013

a) Calcúlese la probabilidad de sea deportista y no lector.

b) Sabiendo que el trabajador elegido es lector, calcúlese la probabilidad de que sea deportista.

47. Tres máquinas A, B y C fabrican tornillos del mismo tipo. La probabilidad de que un tornillo fabricado en la máquina A sea defectuoso es 0'01, de que lo sea uno fabricado en B es 0'02 y de que lo sea si ha sido manufacturado en C es 0'03 En una caja se mezclan 120 tornillos: 15 de la máquina A, 30 de la B y 75 de la C. Selectividad Curso 2012/13

a) Calcúlese la probabilidad de que un tornillo elegido al azar no sea defectuoso.

b) Elegido un tornillo al azar resulta defectuoso. ¿Cuál es la probabilidad de que haya sido fabricado por la máquina B?

48. Una escuela de natación ofrece cursos de iniciación y perfeccionamiento en las categorías pre-benjamín (7-8 años), benjamín (9-10 años) y alevín (11-12 años). La siguiente tabla contiene la información con el número de nadadores matriculados en cada curso: Selectividad Curso. 2011/12

	Pre-benjamín	Benjamín	Alevín	Total
Iniciación	120	70	10	200
Perfeccionamiento	40	90	150	280
Total	160	160	160	480

Se elige al azar un nadador de la escuela.

a) ¿Cuál es la probabilidad de que esté en el curso de iniciación?

b) ¿Cuál es la probabilidad de que esté en el curso de perfeccionamiento o bien sea alevín?

c) Si el nadador elegido es un benjamín, ¿cuál es la probabilidad de que esté en el curso de perfeccionamiento?

d) Si el nadador elegido está en el curso de iniciación, ¿cuál es la probabilidad de que sea benjamín?

49. En un tribunal de la prueba de acceso a las enseñanzas universitarias oficiales de grado se han examinado 80 alumnos del colegio A, 70 alumnos del colegio B y 50 alumnos del colegio C. La prueba ha sido superada por el 80 % de los alumnos del colegio A, el 90 % de los del colegio B y por el 82 % de los del colegio C. Junio 2012

(a) ¿Cuál es la probabilidad de que un alumno elegido al azar haya superado la prueba?

(b) Un alumno elegido al azar no ha superado la prueba, ¿cuál es la probabilidad de que pertenezca al colegio B?

AUTOEVALUACIÓN

1. Al tirar dos dados, la probabilidad de sacar al menos un 5 es:
   a) 5/6 b) 11/36 c) 25/36 d) 30/36
2. Al tirar 3 monedas, la probabilidad de sacar exactamente dos caras es:
   a) 1/2 b) 3/4 c) 3/8 d) 5/8
3. Al tirar 3 monedas, la probabilidad de sacar al menos dos caras es:
   a) 1/2 b) 3/4 c) 3/8 d) 5/8
4. Sacamos una carta de una baraja de 40 cartas, la probabilidad de que sea un oro o un múltiplo de 2 es:
   a) 22/40 b) 19/40 c) 36/40 d) 3/4
5. Indica cuál de las afirmaciones siguientes es **siempre** correcta:
   a) $P(A) + P(noA) = 1$; $P(A\ y\ B) = P(A) \cdot P(B)$; $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$
6. El enunciado del teorema de *Bayes* es:
   a) $P(A_i / C) = \dfrac{P(C / A_i) \cdot P(A_i)}{P(C)} = \dfrac{P(C / A_i) \cdot P(A_i)}{\sum_{k=1}^{n} P(C / A_k) \cdot P(A_k)}$ b) $P(A_i / B) = \dfrac{P(B / A_2) \cdot P(A_i)}{\sum_{k=1}^{n} P(B / A_k) \cdot P(A_k)}$
   c) $P(A_i / B) = \dfrac{P(B / A_i) \cdot P(A_3)}{P(B)}$ d) $P(A_i / A) = \dfrac{P(B / A_i) \cdot P(A_i)}{P(B)} = \dfrac{P(B / A_i) \cdot P(A_i)}{\sum_{k=1}^{n} P(B / A_k) \cdot P(A_k)}$
7. En una urna hay 3 bolas rojas y 5 bolas negras. Se sacan dos bolas. Llamamos *A* al suceso sacar una bola roja, y *B* a sacar una bola negra. Los sucesos A y B son:
   a) Contrarios b) Incompatibles c) Independientes d) Dependientes
8. Sacamos una carta de una baraja. Llamamos *A* al suceso sacar un rey y *B* a sacar una sota. Los sucesos *A* y *B* son:
   a) Contrarios b) Incompatibles c) Independientes d) Dependientes

EJERCICIOS Y PROBLEMAS. Problemas propuestos en selectividad

1. Junio 94. Opción B (2 puntos)

1. Se lanza dos veces un dado equilibrado con seis caras. Hallar la probabilidad de que la suma de los valores que aparecen en la cara superior sea múltiplo de tres.

2. Curso 94/95. Modelo Opción A (2 puntos)

41. En cierto instituto se ofrece informática y teatro como asignaturas optativas. El grupo *A* consta de 30 estudiantes, y los grupos *B* y *C* tienen 35 cada uno. El 60 por ciento del grupo *A* ha elegido teatro, así como el 20 por ciento del grupo *B* y el. 40 por ciento del resto han elegido informática.

a) Si se pregunta a un estudiante elegido al azar, hallar la probabilidad de que haya optado por informática.

b) Si un estudiante ha elegido teatro, calcular la probabilidad de que pertenezca al, grupo *B*.

3. Curso 94/95. Modelo Opción B (3 puntos)

2. Se sabe que se han eliminado varias cartas de una baraja española que tiene cuarenta. La probabilidad de extraer un as entre las que quedan 0'12, la probabilidad de que salga una copa es 0'08 y la-probabilidad de que no sea ni as ni copa es 0'84. A) Hallar la probabilidad de que la carta extraída sea as o copa. B) Calcular la probabilidad de que la carta sea el as de copas. ¿Se puede afirmar que entre las cartas que no se han eliminado está el as de copas?

4. Junio 95. Opción A. (3 puntos)

3. En una ciudad en la que hay doble número de hombres que de mujeres, hay una epidemia. El 6 % de los hombres y el 11 % de las mujeres están enfermos. Se elige al azar un individuo. Calcular la probabilidad de: a) que sea hombre. b) que esté enfermo. c) que sea hombre, sabiendo que está enfermo.

5. Septiembre 95. Opción B. (3 puntos)

4. Una persona despistada tiene ocho calcetines negros, seis azules y cuatro rojos, todos ellos sueltos. Un día con mucha prisa, elige dos calcetines al azar. Hallar la probabilidad de: a) que los calcetines sean negros. b) que los dos calcetines sean del mismo color. c) que al menos uno de ellos sea rojo. d) que uno sea negro y el otro no.

6. Septiembre 95. Opción B. (2 puntos)

5. Tres personas viajan en un coche. Si se supone que la probabilidad de nacer en cualquier día del año es la misma y sabemos que ninguno ha nacido en un año bisiesto,
   (a) hallar la probabilidad de que solamente una de ellas celebre su cumpleaños ese día.
   (b) calcular la probabilidad de que al menos dos cumplan años ese día.

7. Curso 95/96. Modelo Opción A (3 puntos)

6. En una bolsa *A* hay siete bolas numeradas de 1 al 7, y en otra bolsa *B* hay cinco bolas numeradas del 8 al 12. Se realiza la experiencia compuesta consistente en tomar una bola al azar de *A,* anotar su paridad e introducirla posteriormente en la bolsa *B,* a continuaciones extrae al azar una bola de *B* y se anota también su paridad.
   (a) Calcular la probabilidad de que las dos bolas extraídas tengan la misma paridad.
   (b) Hallar la probabilidad de que la bola extraída de B correspondan a un número impar.

8. Junio 96. Opción A. (3 puntos)

7. Una urna contiene 6 bolas blancas y 4 negras una segunda urna *B* contiene 5 bolas blancas y 2 negras. Se selecciona una urna al azar y de ella se extraen 2 bolas sin reemplazamiento. Calcular la probabilidad de que:
   (a) Las dos bolas sean blancas. (b) Las dos bolas sean del mismo color. (c) Las dos bolas sean de distinto color.

9. Junio 96. Opción B. (2 puntos)

8. De una baraja de 40 cartas se eligen al azar simultáneamente 4 cartas. Hallar: a) Probabilidad de que se halla elegido al menos un rey. b) Probabilidad de que tres de las cuatro cartas sean del mismo palo.

10. Septiembre 96. Opción A. (2 puntos)

9. La cuarta parte de las participantes en un congreso son españolas. La probabilidad de que una congresista desayune té si es española es un octavo y la probabilidad de que tome té si es extranjera, es un tercio. Si se elige una congresista al azar:

a) ¿cuál es la probabilidad de que desayune té? b) ¿cuál es la probabilidad de que no sea española si desayuna té? c) ¿cuál es la probabilidad de que sea española si no desayuna té?

11. Curso 96/97. Modelo Opción A (2,5 puntos)

10. Para realizar un control de calidad de un producto se examinan 3 unidades del producto extraídas al azar y sin reemplazamiento de un lote de 100 unidades. Las unidades pueden tener .defectos de dos tipos, *A* y *B*. Si en el lote de 100 unidades existen 10 unidades con defectos del tipo A únicamente, 8 unidades con defecto del tipo B únicamente, y dos unidades con ambos tipos de defecto, se desea determinar la probabilidad de que en la muestra de tres unidades extraídas se obtengan en total: a) Cero defectos. b) Una unidad con defecto del tipo *A* y otra con defecto del tipo *B*, o bien una unidad con ambos tipos de defecto.

12. Curso 96/97. Modelo Opción A (3 puntos)

11. Se realiza la experiencia compuesta consistente en lanzar al aire un dado y a continuación introducir una nueva bola en una urna que contiene 2 bolas blancas y 4 negras de modo que si el número obtenido en el dado es par, se introduce en la urna una bola blanca, y si es impar, se introduce una bola negra. A) Calcula la probabilidad de obtener, al azar, bolas blancas al realizar dos extracciones sucesivas y sin reemplazamiento de la urna, sabiendo que al lanzar el dado hemos obtenido un número par. B) Si se sacan simultáneamente dos bolas al azar de la urna después de haber lanzado el dado, ¿cuál es la probabilidad de que ambas sean blancas?

13. Septiembre 97. Opción A. (3 puntos)

12. Tras un estudio realizado sobre los taxistas de una ciudad española, se ha observado que el 70 tiene más de 40 años y de estos el 60 % es propietario del vehículo que conduce. También se ha averiguado que el porcentaje de taxistas que no superando los 40 años, es propietario del vehículo que conduce se reduce al 30 %. Se pide: a) La probabilidad de que un taxista, elegido al azar, sea propietario del vehículo que conduce. b) Se elige un taxista al azar, y se comprueba que es propietario del vehículo que conduce, ¿Cuál es la probabilidad de que tenga más de 40 años?

14. Curso 97/98. Modelo Opción A (2 puntos)

13. En dos urnas *A* y *B*, se introducen dos bolas blancas y una negra, y tres bolas negras y una blanca, respectivamente. Se selecciona una urna al azar, y se extrae también una bola de dicha urna. ¿Cuál es la probabilidad de que la urna escogida sea la *A*, si la bola escogida resultó ser blanca?

15. Curso 97/98. Modelo Opción B (2 puntos)

14. Se dispone de dos urnas *A* y *B*, de idéntico aspecto externo. La urna *A* contiene 4 bolas rojas y 2 amarillas, mientras que *B* contiene 5 bolas rojas y 3 amarillas. Un individuo se dirige a una de las urnas y extrae sin reemplazamiento, dos bolas de la misma. Hallar la probabilidad de que: a) Ambas bolas sean rojas. b) Las dos bolas sean del mismo color.

16. Junio 98. Opción A. (2 puntos)

15. Se lanza un dado de seis caras, numeradas del 1 al 6, dos veces consecutivas.

(a) Calcúlese la probabilidad de que la suma de los resultados sea igual a 4.

(b) Calcúlese la probabilidad de que en el primer lanzamiento haya salido un 1, sabiendo que la suma es 4.

17. Septiembre 98. Opción A (3 puntos)

16. En un examen hay 3 temas de máxima dificultad, 5 de dificultad media y 2 de escasa dificultad, de los cuales se elige uno al azar. La probabilidad de que un alumno apruebe el examen si el tema es de máxima dificultad es de 1/3, si es de dificultad media, 2/5, y si es de escasa dificultad, 3/4. A) Hállese la probabilidad de que el alumno apruebe el examen. B) Hállese la probabilidad de que el tema elegido haya sido de máxima dificultad, si el alumno lo aprobó.

18. Curso98/99. Modelo Opción A. (2puntos)

17. De una urna con cinco bolas, dos blanca y tres negras, extraemos dos bolas sin reemplazamiento. Calcula la probabilidad de cada uno de los siguientes sucesos: a) A = Las dos bolas extraídas son del mismo color. b) B = Extraemos al menos una bola blanca.

19. Curso 98/99.Modelo Opción B. (2 puntos)

18. Tomamos cuatro cartas diferentes de una baraja, dos cincos, un seis y un siete. Las cartas se ponen boca abajo sobre una mesa y las mezclamos al azar. Determina la probabilidad de que al darles la vuelta, todas las cartas estén ordenadas en orden creciente, si los dos cincos son indistinguibles.

20. Junio 99. Opción A. (2 puntos)

19. Se escuchan tres discos y se vuelven a guardar al azar ¿Cuál es la probabilidad de que al menos uno de los discos haya sido guardado en el envoltorio que le correspondía?

21. Junio 99. Opción B. (2 puntos)

20. Se considera una célula en el instante $\mathbf{t}$ = 0. En el instante $\mathbf{t}$ = 1 la célula puede: o bien reproducirse, dividiéndose en dos, con probabilidad 3/4; o bien morir, con probabilidad 1/4. Si la célula se divide, entonces, en el tiempo t = 2 cada uno de sus dos descendientes puede también subdividirse o morir, con las mismas probabilidades de antes, independientemente uno de otro.

a) ¿Cuántas células es posible que haya en el tiempo t = 2? b) ¿Con qué probabilidad?

22. Septiembre 99. Opción A. (2 puntos)

21. Se lanzan dos dados. Calcúlese la probabilidad de cada uno de los siguientes sucesos:

(a) A = Se obtiene cinco en alguno de los dados. (b) B = Se obtiene un doble (los dos dados presentan la misma puntuación).
(c) $A \cap B$ (d) $A \cup B$

23. Septiembre 99. Opción B. (2 puntos)

22. Se dispone de tres urnas, la *A* que contiene dos bolas blancas y cuatro rojas, la *B* con tres blancas y tres rojas, y la *C* con una blanca y cinco rojas. (a) Se elige una urna al azar y se extrae una bola de ella, ¿cuál es la probabilidad de que esta bola sea blanca? Si la bola extraída resulta ser blanca, ¿cuál es la probabilidad de que proceda de la urna B?

24. Curso 99/00. Modelo Opción A (2 puntos)

23. Si se escoge un número al azar de cierta ciudad española, la probabilidad de que figure a nombre de un hombre es 0'7 y de que figure a nombre de una mujer es 0'3. En dicha ciudad, la probabilidad de que un hombre trabaje es 0'8 y de que lo haga una mujer es 0'7. Se elige un número de teléfono al azar. A) ¿Cuál es la probabilidad de que corresponda una persona que trabaja? B) ¿Cuál es la probabilidad de que corresponda a un hombre, sabiendo que pertenece a una persona que trabaja?

25. Curso 99/00. Modelo Opción B (2 puntos)

24. Un examen consiste en elegir al azar dos temas de entre los diez del programa y desarrollar uno. A) ¿Qué probabilidad tiene un alumno, que sabe seis temas de aprobar el examen? B) ¿Qué probabilidad tiene el mismo alumno de saberse uno de los dos temas elegidos y el otro no?

26. Junio 00. Opción A. (2 puntos)

25. De una urna con 4 bolas blancas y 2 negras se extraen al azar, sucesivamente y sin reemplazamiento, dos bolas.

(a) ¿Cuál es la probabilidad de que las bolas extraídas sean blancas?

(b) Si la segunda bola ha resultado ser negra, ¿cuál es la probabilidad de que la primera también lo haya sido?

27. Junio 00. Opción B. (2 puntos)

26. Sean A y B dos sucesos de un experimento aleatorio talas que $\boldsymbol{P(A)}$ = 0'6; $\boldsymbol{P(B)}$ = 0'2 y $P(\overline{A}\cup\overline{B})=0{,}7$

(a) Calcúlese $P(A\cap B)$ y razónese si los sucesos A y B son independientes.

(b) Calcúlese $P(A\cup B)$

28. Septiembre 00. Opción A. (2 puntos)

27. La probabilidad de que en un mes dado un cliente de una gran superficie compre un producto *A* es 0'6; la probabilidad de que compre un producto *B* es 0'5. Se sabe también que la probabilidad de que un cliente compre el producto *B* no habiendo comprado el producto *A* es 0'4.

a) ¿Cuál es la probabilidad de que un cliente haya comprado sólo el producto *B*?

b) ¿Cuál es la probabilidad de que un cliente no haya comprado ninguno de los productos?

29. Septiembre 00. Opción B. (2 puntos)

28. Una empresa emplea tres bufetes de abogados para tratar sus casos legales. La probabilidad de que un caso se deba remitir al bufete *A* es 0'3; de que se remita al bufete *B* es 0'5 y de que se remita al bufete *C* es 0'2. La probabilidad de que un caso remitido al bufete *A* sea ganado en los tribunales es 0'6; para el bufete *B* esta probabilidad es 0'8 y para el bufete *C* es 0,7.
    a) Calcúlese la probabilidad de que la empresa gane un caso.
    b) Sabiendo que un caso se ha ganado, determínese la probabilidad de que lo haya llevado el bufete *A*.

30. Curso 00/01. Modelo Opción A. (2 puntos)

29. En una ciudad, la probabilidad de que uno de sus habitantes censados vote al partido *A* es 0'4; la probabilidad de que vote al partido *B* es 0'35 y la probabilidad de que vote al partido *C* es 0'25. Por otro lado, las probabilidades de que un votante de cada partido lea diariamente algún periódico son, respectivamente, 0'4; 0'4 y 0'6. Se elige una persona de la ciudad al azar:

a) Calcúlese la probabilidad de que lea algún periódico.

b) La persona elegida lee algún periódico, ¿cuál es la probabilidad de que sea votante del partido *B*?

31. Curso 00/01. Modelo Opción B. (2 puntos)

30. Una urna contiene 7 bolas blancas, 3 bolas rojas y 2 bolas negras. Se considera el experimento aleatorio consistente en extraer tres bolas de la urna, de forma sucesiva y sin reemplazamiento. Sean los sucesos *B1*: La primera bola es blanca, *B2*: La segunda bola es blanca y *B3*: La tercera bola es blanca. a) Exprésese con ellos el suceso Las bolas extraídas en primer y tercer lugar son blancas, y la extraída en segundo lugar no. b) Calcúlese la probabilidad del suceso Las tres bolas son del mismo color.

32. Junio 01. Opción A. (2 puntos)

31. Una fábrica produce tres modelos de coche: A, B y C. Cada uno de los modelos puede tener motor de gasolina o diesel. Sabemos que el 60 % de los modelos son de tipo A y el 30 % de tipo B. El 30 % de los coches fabricados tienen motor diesel, el 30 % de los coches del modelo A son de tipo diesel y el 20 % de los coches del modelo B tienen motor diesel. Se elige un coche al azar. Se piden las probabilidades de los siguientes sucesos: (a) El coche es del modelo *C*. (b) El coche es del modelo *A*, sabiendo que tiene motor diesel. (c) El coche tiene motor diesel, sabiendo que es del modelo *C*.

33. Junio 01. Opción B. (2 puntos)

32. Tres máquinas A, B y C fabrican tornillos. En una hora, la máquina A fabrica 600 tornillos, la B 300 y la C 100. Las probabilidades de que las máquinas produzcan tornillos defectuosos son, respectivamente, de 0'01 para A, de 0'02 para B y de 0'03 para C. Al finalizar una hora se juntan todos los tornillos producidos y se elige uno al azar. (a) ¿Cuál es la probabilidad de que no sea defectuoso? (b) ¿Cuál es la probabilidad de que lo haya fabricado la máquina *A*, sabiendo que no es defectuoso?

34. Septiembre 01. Opción A. (2 puntos)

33. En un videoclub quedan 8 copias de la película A, 9 de la B y 5 de la C. Entran tres clientes consecutivamente y cada uno elige una copia al azar. Calcúlese la probabilidad de que: (a) Los tres escojan la misma película. (b) Dos escojan la película *A* y el otro la *C*.

35. Septiembre 01. Opción B. (2 puntos)

34. Con el objetivo de recaudar fondos para un viaje, los alumnos de un instituto realizan una rifa con 500 números. Un alumno compra dos números. (a) Si sólo hay un premio, ¿qué probabilidad tiene el alumno de que le toque a él? (b) Si hay dos premios, ¿qué probabilidad tiene el alumno de que le toque al menos uno de ellos?

36. Curso 01/02. Modelo Opción A. (2 puntos)

35. Un proveedor suministra lotes de materia prima y el 5 % de ellos resulta defectuoso. Seleccionando al azar 3 lotes (a) ¿Cuál es la probabilidad de que al menos 2 sean defectuosos? (b) ¿Cuál es la probabilidad de que el máximo de lotes defectuosos sea 2?

37. Curso 01/02. Modelo Opción B. (2 puntos)

36. Una prueba para determinar cierta contaminación en el agua presenta los siguientes resultados en probabilidad: 0'05 de falsos positivos, esto es, casos en los que estando el agua libre de contaminación, el test dice que el agua se encuentra contaminada. Si el agua está contaminada, el test lo detecta con probabilidad 0'99. El agua está libre de contaminación con probabilidad 0'99. Si se realizar una nueva prueba y el test indica que hay contaminación, calcular la probabilidad de que el agua esté libre de contaminación.

38. Junio02. Opción A. (2 puntos)

37. Se tienen tres cajas iguales. La primera contiene 3 bolas blancas, 4 negras; la segunda contiene 5 bolas negras y, la tercera 4 blancas y 3 negras. a) Se elige una caja al azar y luego se extrae una bola, ¿cuál es la probabilidad de que la bola extraída sea negra? b) Si se extrae una bola negra de una de las cajas, ¿cuál es la probabilidad de que proceda de la segunda caja?

39 Junio02. Opción B. (2 puntos)

38. Se lanzan dos dados equilibrados de seis caras tres veces consecutivas: a) Calcular la probabilidad de que en los tres lanzamientos salga el seis doble. b) Calcular la probabilidad de que en los tres lanzamientos salga un doble distinto del seis doble.

40. Septiembre02. Opción A. (2 puntos)

39. Una persona desea jugar en una atracción de feria, donde regala un peluche, si al tirar un dardo se acierta en un blanco. Si solo se permite tirar tres dados y la probabilidad de acertar en cada tirada es 0'3. A) ¿Cuál es la probabilidad de llevarse el peluche? B) ¿Cuál es la probabilidad de llevarse el peluche exactamente en el tercer lanzamiento? C) ¿Y de llevárselo exactamente en el segundo?

41. Septiembre02. Opción B. (2 puntos)

40. Un día determinado, en una tienda de ropa joven, se han realizado 400 ventas pagadas con la tarjeta de crédito V y 350 ventas pagadas con la tarjeta MC. Las ventas restantes del día han sido abonadas en metálico. Se comprueba que 150 de las ventas pagadas con la tarjeta de crédito V superan los 150 euros, mientras que 300 de las compras pagadas con MC superan esa cantidad. Se extrae al azar un comprobante de las ventas del día pagadas con tarjeta de crédito. A) ¿Cuál es la probabilidad de que corresponda a una compra superior a 150 euros? B) Si la compra es inferior a 150 euros, ¿cuál es la probabilidad de que haya sido pagada con la tarjeta MC?

42. Curso 02/03. Opción A. (2 puntos)

41. Un rosal no está en buen estado y, por tanto, si se riega tiene la misma probabilidad de mantenerse que de secarse. La probabilidad de que se mantenga si no se riega es 0'25. La probabilidad de no regar el rosal es 2/3. Si el rosal se ha secado, ¿cuál es la probabilidad de no haberlo regado?

43. Curso 02/03. Opción A. (2 puntos)

42. Sobre los sucesos A y B se conocen las siguientes probabilidades: $P(A)$ = 0'7 $P(B)$ = 0'5, $P(A \cap B) = 0{,}45$. Calcular a) $P(B/A)$, b) $P(A^c \cap B^c) =$ A^c representa el suceso complementario del suceso A.

44. Junio 03. Opción A (2 puntos)

43. El 45 % del censo de cierta ciudad vota al candidato A, el 35 % al candidato B y el resto se abstiene. Se elige al azar tres personas del censo. Calcular la probabilidad de los siguientes sucesos: (a) Las tres personas votan al candidato A. (b) Dos personas votan al candidato A y la otra al candidato B. (c) Al menos una de las tres personas se abstiene.

45. Junio 03. Opción B (2 puntos)

44. De una baraja española de cuarenta cartas se extraen sucesivamente tres cartas al azar. Determinar la probabilidad de obtener: (a) Tres reyes. (b) Una figura con la primera carta, un cinco con la segunda y un seis con la tercera. (c) Un as, un tres y un seis, en cualquier orden.

46. Septiembre 03. Opción A (2 puntos)

45. Un test para detectar una sustancia contaminante en el agua, presenta los siguientes resultados: si el agua no está contaminada, suceso que ocurre con una probabilidad igual a 0'99, el resultado del test es que el agua está contaminada con una probabilidad igual a 0'05. Cuando el agua está contaminada, el test lo detecta con una probabilidad igual a 0'99. Se ha realizado una prueba y el test indica que hay contaminación. Calcular la probabilidad de que el agua no esté realmente contaminada. Interpretar el valor numérico obtenido.

47. Curso 03/04. Opción A (2 puntos)

46. En un I.E.S. hay 156 alumnos matriculados en segundo de Bachillerato, de los cuales 120 utilizan el transporte escolar. De estos últimos, la mitad hace uso del comedor del centro, mientras que sólo 12 de los que no utilizan el transporte escolar acuden al comedor. (a) Se elige al azar un alumno de segundo de bachillerato, ¿cuál es la probabilidad de que no asista al comedor? (b) Si el alumno elegido utiliza el transporte escolar, ¿cuál es la probabilidad de que asista al comedor?

48. Curso 03/04. Opción B (2 puntos)

47. En una clase, el 20% de los alumnos aprueba lengua, el 30% aprueba matemáticas y el 40% aprueba lengua extranjera. Se sabe además que el 12% aprueba matemáticas y lengua extranjera y el 7% aprueba lengua y lengua extranjera. ¿Son independientes los sucesos "aprobar lengua extranjera" y "aprobar lengua'? ¿Son independientes los sucesos "aprobar matemáticas" y "aprobar lengua extranjera"?

49. Junio 04. Opción A (2 puntos)

48. Dos expertos, E_1 y E_2, realizan peritaciones para una cierta compañía de seguros. La probabilidad de que una peritación haya sido realizada por E_1 es 0'55 y por E_2 es 0'45. Si una peritación ha sido realizada por E_1, la probabilidad de que dé lugar al pago de una indemnización es 0'98 y si ha sido realizada por E_2, la probabilidad de que dé lugar al pago de una indemnización es 0'90. Un siniestro ha supuesto a la compañía el pago de una indemnización. Hallar la probabilidad de que la peritación haya sido realizada por E_2.

50. Junio 04. Opción B (2 puntos)

49. En una empresa se producen dos tipos de bombillas: halógenas y de bajo consumo, en una proporción de 3 a 4, respectivamente. La probabilidad de que una bombilla halógena sea defectuosa es 0'02 y de que una de bajo consumo sea defectuosa es 0'09. Se escoge al azar una bombilla y resulta no defectuosa, ¿cuál es la probabilidad de que sea halógena?

51. Septiembre 04. Opción A (2 puntos)

50. Una cierta señalización de seguridad tiene instalados dos indicadores. Ante una emergencia los indicadores se activan de forma independiente. La probabilidad de que se active el primer indicador es 0'95 y de que se active el segundo es 0'90. (a) Hallar la probabilidad de que ante una emergencia se active sólo uno, de los indicadores. (b) Hallar la probabilidad de que ante una emergencia se active al menos uno de los indicadores.

52. Septiembre 04. Opción B (2 puntos)

51. En una poblaci6n, el 40 % son hombres y el 60 % mujeres. En esa poblaci6n el 80 % de los hombres y el 20 % de las mujeres son aficionados al fútbol. (a) Calcular la probabilidad de que una persona elegida al azar sea aficionada al fútbol. (b) Elegida al azar una persona resulta ser aficionada al fútbol, ¿cuál es la probabilidad de que sea mujer?

53. Curso 04/05. Opción B (2 puntos)

52. En un centro de enseñanza hay 240 estudiantes matriculados en 2º curso de Bachillerato. La siguiente tabla recoge su distribución por sexo y por opción que se cursa:

	Chicas	Chicos
Tecnológica	64	52
Humanidades y C. Sociales	74	50

Si se elige un estudiante al azar de entre los que cursan 2º de Bachillerato en ese centro, calcular la probabilidad de que:
(a) No curse la opción Científico-Tecnológica.
(b) Si es chico, curse la opción de Humanidades y Ciencias Sociales.

54. Curso 04/05. Opción A (2 puntos)

53. Un ajedrecista gana una partida con probabilidad 0'6, la empata con probabilidad 0'3 y la pierde con probabilidad 0'1. El jugador juega dos partidas. (a) Describir el espacio muestral y la probabilidad de cada uno de los resultados de este experimento aleatorio. (b) Calcular la probabilidad de que gane al menos una partida.

55. Junio 05. Opción A (2 puntos)

54. Una caja con una docena de huevos contiene dos de ellos rotos. Se extraen al azar sin reemplazamiento (sin devolverlos después y de manera consecutiva) cuatro huevos. (a) Calcular la probabilidad de extraer los cuatro huevos en buen estado. (b) Calcular la probabilidad de extraer de entre los cuatro, exactamente un huevo roto.

56. Junio 05. Opción B (2 puntos)

55. En un experimento aleatorio consistente en lanzar simultáneamente tres dados equilibrados de seis caras, se pide calcular la probabilidad de cada uno de los siguientes sucesos: "Obtener tres uno", "Obtener al menos un dos", "Obtener tres números distintos" y "Obtener una suma de 4".

57. Septiembre 05. Opción A (2 puntos)

56. En un colectivo de inversores bursátiles, el 20 % realiza operaciones vía Internet. De los inversores que realizan operaciones vía Internet, un 80 % consulta InfoBolsaWeb. De los inversores bursátiles que no realizan operaciones vía Internet sólo un 20 % consulta InfoBolsaWeb. Se pide: (a) Obtener la probabilidad de que un inversor bursátil elegido al azar en este colectivo consulte InfoBolsaWeb. (b) Si se elige al azar un inversor bursátil de este colectivo y resulta que consulta InfoBolsaWeb, ¿cuál es la probabilidad de que realice operaciones por Internet?

58. Septiembre 05. Opción B (2 puntos)

57. Sean A y B dos sucesos, tales que $P(A)=\frac{1}{2}$ $\quad P(\overline{B})=\frac{2}{5}$ $\quad P(\overline{A}\cup\overline{B})=\frac{3}{4}$ Calcular:

(a) $P(B/A)$. (b) $P(\overline{A}/B)$ Nota: $\overline{A}$ representa el suceso complementario del suceso A.

59. Curso 05/06. Opción A (2 puntos)

58. Se dispone de la siguiente información relativa a los sucesos A y B: $P(A) = 0'6$ $\quad P(B) = 0'2$ $\quad P(A \cap B) = 0'12$.

(a) Calcular las probabilidades de los sucesos$(A \cup B)$ y $(A/(A \cup B))$. (b) ¿Son incompatibles? ¿Son independientes?

60. Curso 05/06. Opción B (2 puntos)

59. Una urna contiene dos bolas. La urna se llenó tirando una moneda equilibrada al aire dos veces y poniendo una bola blanca por cada cara y una bola negra por cada cruz. Se extrae una bola de la urna y resulta ser blanca. Hallar la probabilidad de que la otra bola de la urna sea también blanca.

61. Junio 06. Opción A (2 puntos)

60. Una persona cuida de su jardín pero es bastante distraída y se olvida de regarlo a veces. La probabilidad de que se olvide de regar el jardín es 2/3. El jardín no está en muy buenas condiciones, así que si se le riega tiene la misma probabilidad de progresar que de estropearse, pero la probabilidad de que progrese si no se le riega es de 0'25. Si el jardín se ha estropeado, ¿cuál es la probabilidad de que la persona olvidara regarlo?

62. Junio 06. Opción B (2 puntos)

61. Se considera el experimento consistente en lanzar una moneda equilibrada y un dado equilibrado. Se pide: a) Describir el espacio muestral de este experimento. b) Determinar la probabilidad del suceso: Obtener una cara en la moneda y un número par en el dado.

63. Septiembre 06. Opción A (2 puntos)

62. Los tigres de cierto país proceden de tres reservas: el 30 % de la primera, el 25 % de la segunda y el 45 % de la tercera. La proporción de tigres albinos de la primera reserva es 0'2 %, mientras que dicha proporción es 0'5 % en la segunda y 0'1 % en la tercera. ¿Cuál es la probabilidad de que un tigre de ese país sea albino?

64. Septiembre 06. Opción B (2 puntos)

63. Una urna contiene 10 bolas blancas y 5 negras. Se extraen dos bolas al azar sin reemplazamiento. ¿Cuál es la probabilidad de que sean del mismo color?

65. Junio 07. Opción A (2 puntos)

64. Según cierto estudio, el 40 % de los hogares europeos tiene contratado el acceso a Internet, el 33 % tiene contratada la televisión por cable, y el 20 % disponen de ambos servicios. Se selecciona un hogar europeo al azar.

(a) ¿Cuál es la probabilidad de que sólo tenga contratada la televisión por cable?

(b) ¿Cuál es la probabilidad de que no tenga contratado ninguno de los dos servicios?

66. Junio 07. Opción B (2 puntos)

65. Los pianistas de Isla Sordina se forman en tres conservatorios, C1, C2 y C3, que forman al 40 %, 35 % y 25 % de los pianistas, respectivamente. Los porcentajes de pianistas virtuosos que producen estos conservatorios son del 5 %, 3 % y 4 %, respectivamente. Se selecciona un pianista al azar. (a) Calcular la probabilidad de que sea virtuoso. (b) El pianista resulta ser virtuoso. Calcular la probabilidad de que se haya formado en el primer conservatorio (C1).

67. Septiembre 07. Opción A (2 puntos)

66. En el departamento de lácteos de un supermercado se encuentran mezclados y a la venta 100 yogures de la marca A, 60 de la marca B y 40 de la marca C. La probabilidad de que un yogur esté caducado es 0'01 para la marca A; 002 para la marca B y 0'03 para la marca C. Un comprador elige un yogur al azar. (a) Calcular la probabilidad de que el yogur esté caducado. (b) Sabiendo que el yogur elegido está caducado, ¿cuál es la probabilidad de que sea de la marca B?

68. Junio 2008-Opción A, 2 puntos

67. En un juego consistente en lanzar dos monedas indistinguibles y equilibradas y un dado de seis caras equilibrado, un jugador gana si obtiene dos caras y un número par en el dado, o bien exactamente una cara y un número mayor o igual que cinco en el dado. a) Calcúlese la probabilidad de que un jugador gane. b) Se sabe que una persona ha ganado. ¿Cuál es la probabilidad de que obtuviera dos caras al lanzar las monedas?

69. Junio 2008-Opción B, 2 puntos

68. Se consideran dos sucesos A y B de un experimento aleatorio, tales que: $P(A) = 1/4$, $P(B) = 1/3$, $P(AUB) = 1/2$

a) ¿Son A y B sucesos independientes? Razónese. b) Calcúlese $P\left(\overline{A} / \overline{B}\right)$.*Nota*.- La notación $\overline{A}$ representa al suceso complementario de A.

70. Septiembre 2008-Opción A, 2 puntos

69. Se consideran dos actividades de ocio: A = ver televisión y B = visitar centros comerciales. En una ciudad, la probabilidad de que un adulto practique A es igual a 0'46; la probabilidad de que practique B es igual a 0'33 y la probabilidad de que practique A y B es igual a 0'15. a) Se selecciona al azar un adulto de dicha ciudad. ¿Cuál es la probabilidad de que no practique ninguna de las dos actividades anteriores? b) Se elige al azar un individuo de entre los que practican alguna de las dos actividades. ¿Cuál es la probabilidad de que practique las dos actividades?

71. Septiembre 2008-Opción B, 2 puntos

70. Se supone que las señales que emite un determinado telégrafo son punto y raya y que el telégrafo envía un punto con probabilidad 3/7 y una raya con probabilidad 4/7. Los errores en la transmisión pueden hacer que cuando se envíe un punto se reciba una raya con probabilidad 1/4 y que cuando se envíe una raya se reciba un punto con probabilidad 1/3. a) Si se recibe una raya, ¿cuál es la probabilidad de que se hubiera enviado realmente una raya? b) Suponiendo que las señales se envían con independencia, ¿cuál es la probabilidad de que si se recibe punto-punto se hubiera enviado raya-raya?

72. Junio 2009 Opción A, 2 puntos

71. Se consideran tres sucesos A, B, C de un experimento aleatorio tales que: $P(A) = 1/2$; $P(B) = 1/3$; $P(C) = 1/4$; $P(A \cup B \cup C) = 2/3$; $P(A \cap B \cap C) = 0$: $P(A/B) = P(C/A) = ½$. (a) Calcúlese $P(C \cap B)$. (b) Calcúlese $P(\overline{A} \cup \overline{B} \cup \overline{C})$.

73. Junio 2009 Opción B, 2 puntos

72. Para la construcción de un luminoso de feriase dispone de un contenedor con 200 bombillas blancas, 120 bombillas azules y 80 rojas. La probabilidad de que una bombilla del contenedor no funcione es igual a 0'01 si la bombilla es blanca, es igual a 0'02 si la bombilla es azul e igual a 0'03 si es roja. Se elige al azar una bombilla del contenedor. (a) Calcúlese la probabilidad de que la bombilla elegida no funcione. (b) Sabiendo que la bombilla elegida no funciona, calcúlese la probabilidad de que dicha bombilla sea azul.

74 Septiembre 2009. Opción A, 2 puntos

73. En un cierto banco el 30 % de los créditos concedidos son para vivienda, el 50 % se destinan a empresas y el 20 % son para consumo. Se sabe además que de los créditos concedidos a vivienda, el 10 % resultan impagados, de los créditos concedidos a empresas son impagados el 20 % y de los créditos concedidos para consumo resultan impagados el 10 %. a) Calcúlese la probabilidad de que un crédito elegido al azar sea pagado. b) ¿Cuál es la probabilidad de que un crédito elegido al azar se haya destinado a consumo, sabiendo que se ha pagado?

75. Septiembre 2009 Opción B, 2 puntos

74. La probabilidad de que a un habitante de un cierto pueblo de la Comunidad de Madrid le guste la música moderna es igual a 0'55; la probabilidad de que le guste la música clásica es igual a 0'40 y la probabilidad de que no le guste ninguna de las dos es igual a 0'25. Se elige al azar un habitante de dicho pueblo. Calcúlese la probabilidad de que le guste: a) Al menos uno de los dos tipos de música. b) La música clásica y también la música moderna. c) Sólo la música clásica. d) Sólo la música moderna.

76. Junio 2010 Fase general. Opción A, 2 puntos

75. Una bolsa contiene diez monedas equilibradas. Cinco de dichas monedas tienen cara y cruz otras tres son monedas con dos caras y las dos restantes son monedas con dos cruces. Se elige al azar una moneda de la bolsa y se lanza. a) Calcúlese la probabilidad de que salga cara en dicho lanzamiento. b) Si en el lanzamiento ha salido cara, ¿cuál es la probabilidad de que la moneda elegida tenga cara y cruz?

77. Junio 2010 Fase general. Opción B, 2 puntos

76. Sean A y B dos sucesos de un experimento aleatorio tales que $P(A)$ = 0'2 y $P(B)$ = 0'4. a) Si A y B son mutuamente excluyentes, determínese $P(A\ B)$. ¿Son además A y B independientes? Razónese. b) Si A y B son independientes, calcúlese $P(A \cap B)$. ¿Son A y B además mutuamente excluyentes? Razónese. c) Si $P(A/B) = 0$, calcúlese $P(A \cap B)$. ¿Son A y B mutuamente excluyentes? ¿Son A y B independientes? Razónese. d) Si $A \subset B$, calcúlese $P(A \cap B)$. ¿Son A y B independientes? Razónese.

78. Junio 2010 Fase específica. Opción A, 2 puntos

77. Sean A y B dos sucesos de un experimento aleatorio tales que $P(A)$ = 0'5; $P(B)$ = 0'4 ; $P(A \cap B)$ = 0'1.

Calcúlense cada una de las siguientes probabilidades: a) $P(A \cup B)$ b) $P(\overline{A} \cup \overline{B})$ c) $P(A/B)$ d) $P(\overline{A} \cap B)$.

Nota. $\overline{A}$ representa al suceso complementario de A.

79. Junio 2010 Fase específica. Opción B, 2 puntos

78. Se dispone de un dado equilibrado de seis caras, que se lanza seis veces con independencia. Calcúlese la probabilidad de cada uno de los sucesos siguientes: a) Obtener al menos un seis en el total de los seis lanzamientos. b) Obtener un seis en el primer y último lanzamientos y en los restantes lanzamientos un número distinto de seis.

80. Septiembre 2010 Fase general. Opción A, 2 puntos

79. Se consideran tres sucesos A, B y C de un experimento aleatorio, tales que: $P(A/C) \geq P(B/C)$, $P(A/\overline{C}) \geq P(B/\overline{C})$. Razónese cuál de las siguientes desigualdades es siempre cierta: a) $P(A) < P(B)$; b) $P(A) \geq P(B)$.

81. Septiembre 2010 Fase general. Opción B, 2 puntos

80. Se consideran los siguientes sucesos: Suceso A: La economía de un cierto país está en recesión. Suceso B: Un indicador económico muestra que la economía de dicho país está en recesión. Se sabe que $P(A)$ = 0'005; $P(B/A)$ = 0'95; $P(\overline{B}/\overline{A})$ = 0'96. a) Calcúlese la probabilidad de que el indicador económico muestre que la economía del país no está en recesión y además la economía del país esté en recesión. b) Calcúlese la probabilidad de que el indicador económico muestre que la economía del país está en recesión.

82. Septiembre 2010 Fase específica Opción A, 2 puntos

81. En una residencia universitaria viven 183 estudiantes, de los cuales 130 utilizan la biblioteca. De estos últimos 70 estudiantes hacen uso de la lavandería, mientras que sólo 20 de los que no usan la biblioteca utilizan la lavandería. Se elige un estudiante de la residencia al azar. a) ¿Cuál es la probabilidad de que utilice la lavandería? b) Si el estudiante elegido no utiliza la lavandería, ¿cuál es la probabilidad de que utilice la biblioteca?

83. Septiembre 2010 Fase específica Opción B, 2 puntos

82. Sean A y B dos sucesos de un experimento aleatorio, tales que $P(A)$ = 0'6. Calcúlese $P(A \cap \overline{B})$ en cada uno de los siguientes casos: a) A y B son mutuamente excluyentes. b) $A \subset B$. c) $B \subset A$ y $P(B)$ = 0'3. d) $P(A \cap B)$ = 0'1.

84. Curso 2010/11. Modelo. Opción A, 2 puntos

83. Sean A y B dos sucesos de un experimento aleatorio tales que la probabilidad de que ambos ocurran simultáneamente es igual a 1/6 y la probabilidad de que no ocurra ninguno de los dos es igual a 7/12. Se sabe además que $P(A/B)$ = 1/2. a) Calcula la probabilidad de que ocurra A o B. b) Calcula la probabilidad de que ocurra A.

85. Curso 2010/11. Modelo. Opción B, 2 puntos

84. En una cierta población, la probabilidad de que un habitante elegido al azar siga una dieta de adelgazamiento es igual a 0'2. Entre los habitantes que siguen dieta de adelgazamiento, la probabilidad de que uno de ellos elegido al azar practique deporte regularmente es igual a 0'6. Entre los habitantes que no siguen dieta de adelgazamiento la probabilidad de que uno de ellos elegido al azar practique deporte regularmente es igual a 0'3. Se elige al azar un habitante de la población. a) Calcula la probabilidad de que practique deporte regularmente. b) Si se sabe que dicho habitante practica deporte regularmente, ¿cuál es la probabilidad de que esté siguiendo una dieta de adelgazamiento?

86. Junio 2011. Opción A, 2 puntos

85. En un edificio inteligente dotado de sistemas de energía solar y eólica, se sabe que la energía suministrada cada día proviene de placas solares con probabilidad 0'4, de molinos eólicos con probabilidad 0'26 y de ambos tipos de instalaciones con probabilidad 0'12. Elegido un día al azar, calcula la probabilidad de que la energía sea suministrada al edificio: a) por alguna de las dos instalaciones, b) solamente por una de las dos.

87. Junio 2011. Opción B, 2 puntos

86. En un cierto punto de una autopista está situado un radar que controla la velocidad de los vehículos que pasan por dicho punto. La probabilidad de que el vehículo que pase por el radar sea un coche es 0'5, de que sea un camión es 0'3 y de que sea una motocicleta es 0'2. La probabilidad de que cada uno de los tres tipos de vehículos supere al pasar por el radar la velocidad máxima permitida es 0'06 para un coche, 0'02 para un camión y 0'12 para una motocicleta. En un momento dado un vehículo pasa por el radar. A) Calcula la probabilidad de que este vehículo supere la velocidad máxima permitida. B) Si el vehículo en cuestión ha superado la velocidad máxima permitida, ¿cuál es la probabilidad de que se trate de una motocicleta.

88. Septiembre 2011. Opción A, 2 puntos

87. Se supone que la probabilidad de que nazca una niña es 0'49 y de nazca un niño es 0'51. Una familia tiene dos hijos: ¿Cuál es la probabilidad de que ambos sean niños, condicionada porque el segundo sea niño? ¿Cuál es la probabilidad de que ambos sean niños, condicionada porque al menos uno sea niño?

89. Septiembre 2011. Opción B, 2 puntos

88. Se disponen de tres urnas A, B y C. La urna A contiene 1 bola blanca y 2 bolas negras, la urna B contiene 2 bolas blancas y 1 bola negra y la urna C contiene 3 bolas blancas y 3 bolas negras. Se lanza un dado equilibrado y si sale 1, 2 o 3 se escoge la urna A, si sale el 4 se escoge la urna B y si sale 5 o 6 se elige la urna C. A continuación, se extrae una bola de la urna elegida. a) ¿Cuál es la probabilidad de que la bola extraída sea blanca? b) Se sabe que la bola extraída ha sido blanca, ¿cuál es la probabilidad de que la bola haya sido extraída de la urna C?

90. Septiembre 2011. Opción A, (Reserva) 2 puntos

89. La probabilidad de que el jugador A de baloncesto consiga una canasta de tres puntos es igual a 7/9, y la probabilidad de que otro jugador B consiga una canasta de tres puntos es 5/7. Cada uno de estos jugadores realiza un lanzamiento de tres puntos. a) Calcúlese la probabilidad de que solamente uno de los dos jugadores consiga un triple. b) Calcúlese la probabilidad de que al menos uno de los dos jugadores consiga un triple.

91. Septiembre 2011. Opción B, (Reserva) 2 puntos

90. Los datos de la tabla siguiente se han extraído de las estadísticas oficiales de la prueba de acceso a estudios universitarios (fase general) de la convocatoria del curso 2009/2010, en el Distrito único de Madrid:

	Chico	Chica
Apto	12109	9863
No apto	1717	1223

Se elige un alumno al azar de entre los que se presentaron a dicha prueba. 1. ¿Cuál es la probabilidad de que el alumno elegido sea chica o haya resultado apto? 2. Si el alumno elegido es chico, ¿Cuál es la probabilidad de que haya resultado no apto?

92.Curso 2011/12. Modelo. Opción A, 2 puntos

91. Una bolsa contiene dos monedas equilibradas. Una de las monedas tiene cara y cruz y la otra tiene dos caras. Se elige al azar una moneda de la bolsa y se lanza dos veces consecutivas con independencia, observándose dos caras. ¿Cuál es la probabilidad de que la moneda elegida sea la moneda de dos caras?

93. Junio 2012. Opción B, 2 puntos

92. Sean A y B dos sucesos de un experimento aleatorio tales que: $P(A \cap B)$ = 0'1 $P(\overline{A} \cap \overline{B}) = 0{,}6$ $P(A|B)$ = 0'5.Calcula: (a) $P(B)$. (b) $P(A \cup B)$. (c) $P(A)$. (d) $P(\overline{B}/\overline{A})$

94. Septiembre 2012. Opción A, 2 puntos.

93. Se disponen de 5 cajas opacas. Una contiene una bola blanca, dos contienen una bola negra y las otras dos están vacías. Un juego consiste en ir seleccionando al azar y secuencialmente una caja no seleccionada previamente hasta obtener una que contenga una bola. Si la bola de la caja seleccionada es blanca, el jugador gana; si es negra, el jugador pierde. (a) Calcula la probabilidad de que el jugador gane. (b) Si el jugador ha perdido, ¿cuál es la probabilidad de que haya seleccionado una sola caja?

95. Curso 2012/13. Modelo. Opción B, 2 puntos

94. Sean A y B dos sucesos aleatorios tales que $P(A)=\frac{1}{2}$ $P(\overline{B})=\frac{3}{4}$ $P(A\cup B)=\frac{2}{3}$. a) Determínese si son compatibles o incompatibles los sucesos A y B. b) Determínese si son dependientes o independientes los sucesos A y B. *Nota:* $\overline{S}$ *denota al suceso complementario del suceso* S.

RESUMEN

Sucesos	Al realizar un experimento aleatorio existen varios posibles resultados o **sucesos posibles**. Un **suceso** es un subconjunto del conjunto de posibles resultados.	Tiramos un dado. Posibles resultados = {1, 2, 3, 4, 5, 6} Suceso *obtener múltiplo de* 3 = {3, 6}
Asignación de probabilidades	Una medida Límite al que tienden las frecuencias relativas. Regla de Laplace: Si los sucesos elementales son equiprobables entonces: p = casos favorables / casos posibles.	P(5) = 1/6. P(sacar múltiplo de 3) = 2/6
Axiomática de Kolmogorov	*1.* $P(E) = 1$. 2. $P(A) \geq 0$, para todo A. *3.* Si $A \cap B = \varnothing$ entonces $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$.	
Propiedades de la Probabilidad	Suceso contrario: $P(X) + P(noX) = 1$. Sucesos dependientes: $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B/A)$. Sucesos compatibles: $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$	P(no 5) = 1 – 1/6 = 5/6. P(5 $\cup$ múl. 3) = 1/6 + 2/6 =3/6 P sacar primero un 5 y luego múltiplo de 3 =1/6·2/6 = 2/36
Teorema de la probabilidad total	$P(B) = \sum_{k=1}^{n} P(B/A_k) \cdot P(A_k)$	
Teorema de Bayes	$P(A_i/B) = \dfrac{P(B/A_i)\cdot P(A_i)}{P(B)} = \dfrac{P(B/A_i)\cdot P(A_i)}{\sum_{k=1}^{n} P(B/A_k)\cdot P(A_k)}$	

Autores: Leticia González Pascual y Álvaro Valdés

CAPÍTULO 9: ESTIMACIÓN. INTERVALOS DE CONFIANZA

ACTIVIDADES PROPUESTAS

1. MUESTREO ESTADÍSTICO

1. Señala en qué caso es más conveniente estudiar la población o una muestra:
   a) El diámetro de los tornillos que fabrica una máquina diariamente.
   b) La altura de un grupo de seis amigos.
2. Se puede leer el siguiente titular en el periódico que publica tu instituto: "*La nota media de los alumnos de 2º de Bachillerato de la Comunidad de Madrid es de* 7'9". ¿Cómo se ha llegado a esta conclusión? ¿Se ha estudiado a toda la población? Si hubieran seleccionado para su cálculo solo a las mujeres, ¿sería representativo su valor?
3. Para estudiar el número de accidentes de una población de mil conductores, de los cuales la mitad tiene carnet de conducir entre 5 y 20 años, la cuarta parte lo tiene más de 20 años y la otra cuarta parte lo tiene menos de 5 años. Se quiere elegir por muestreo aleatorio estratificado proporcional, 50 conductores, ¿cuántos seleccionarías de cada grupo?
4. Los parámetros de una distribución son μ = 20 y desviación típica σ = 3. Se extrae una muestra de 400 individuos. Calcula $P(19'9 < \bar{x} < 20'3)$.
5. Los pesos de las ovejas de una cierta ganadería tienen una media de 50 kg con una desviación típica de 4. Elegimos al azar una muestra aleatoria simple de 100 ovejas. A) Determina la probabilidad de que su media sea superior a 51 kg. B) Sea inferior a 56 kg. C) Sea superior a 48 kg. D) Esté entre 48 kg y 52 kg.
6. Una población tiene una media μ = 400 y una desviación típica σ = 20. Extraemos una muestra de 1000 individuos. Halla el intervalo característico, para una probabilidad de 0'95, de la media muestral. Lo mismo para una probabilidad del 0'99.
7. El peso de una población se estima que tiene de media μ = 70 kg y una desviación típica σ = 10. Se elige una muestra aleatoria simple de 100 individuos y se pesan todos juntos. Calcula la probabilidad de que dicho peso sea superior a 7010 kg.
8. En los exámenes de selectividad la proporción de aprobados es del 98 %. Un centro escolar presenta a 78 estudiantes al examen.
   a) ¿Qué distribución sigue la proporción de aprobados?
   b) Calcula la probabilidad de que en la muestra elegida haya menos de 3 suspensos.
   c) Calcula la probabilidad de que en la muestra elegida haya más de 10 suspensos.
   d) Calcula la probabilidad de que en la muestra elegida no haya ningún suspenso.
9. En una fábrica de bombillas de bajo consumo hay que rechazar por defectos al 2 % de la producción. Se toma una muestra aleatoria simple de 100 bombillas.
   a) ¿Qué distribución sigue la proporción de bombillas defectuosas?
   b) Calcula la probabilidad de que en la muestra elegida haya menos de 5 bombillas defectuosas.

2. INTERVALOS DE CONFIANZA

10. Determina la eficiencia de la media muestral si el tamaño de la muestra es 100 y la desviación típica poblacional es 2.
11. Determina la eficiencia de la proporción muestral si el tamaño de la muestra es 100 y la proporción poblacional es 50 %.
12. Determina un intervalo de confianza con un nivel de confianza del 95 % de una $N(5, 0'01)$. Determina el margen de error.
13. Determina un intervalo de confianza con un nivel de confianza del 99 % de una $N(100, 4)$. Determina el margen de error.
14. Determina un intervalo de confianza para la media poblacional con un nivel de confianza del 95 % de una población de desviación típica conocida, σ = 2, si hemos escogido una muestra aleatoria simple de tamaño 400 y calculado la media muestral que es 50'5.
15. Determina un intervalo de confianza para la media poblacional con un nivel de confianza del 98 % de una población de desviación típica conocida, σ = 2, si hemos escogido una muestra aleatoria simple de tamaño 400 y calculado la media muestral que es 50'5. Compara con el anterior intervalo de confianza.
16. Se ha tomado una muestra aleatoria simple de 16 pacientes y se ha anotado el número de días que han recibido tratamiento para los trastornos del sueño que sufren. Los resultados han sido:
    280; 285; 295; 330; 290; 350; 360; 320; 295; 310; 300; 305; 295; 280; 315; 305.
    Se sabe que la duración, en días, del tratamiento se puede aproximar por una variable aleatoria con distribución normal de media μ desconocida y desviación típica 34'5 días. Determina un intervalo de confianza con un nivel del 95 % para la media poblacional.
17. ¿Qué tamaño mínimo debe tener una muestra para que el error máximo cometido en la estimación de la media sea menor de 0,1 unidades, con un nivel de confianza del 95 %, sabiendo que la desviación típica poblacional es conocida y vale 4?

18. Determina el tamaño muestral mínimo necesario para que el valor absoluto de la diferencia entre la media muestral y la media poblacional sea menor o igual a 0'02 años con un nivel de confianza del 90 % sabiendo que la población se distribuye según una normal de desviación típica 0'4.
19. En el estudio anterior se toma una muestra de 49 individuos. Queremos que el error máximo admisible sea de 0'02. ¿Cuál será el nivel de confianza?
20. Determina el intervalo de confianza para la proporción de árboles enfermos en Madrid con un nivel de confianza del 95 %, si se ha elegido una muestra aleatoria simple de 100 árboles de los que hay 20 enfermos.
21. Se quiere estudiar la proporción de estudiantes que hacen actividades extraescolares. Para ello se ha seleccionado una muestra de 400 estudiantes de los cuales 100 hacen actividades extraescolares. Determina el intervalo de confianza para la proporción con un nivel de confianza del 95 %.
22. ¿Cuántas veces se debe lanzar una moneda para que la proporción de caras no se aparte de la teórica, 1/2, más de una centésima, con un grado de certeza no inferior al 95 %? ¿Cuántas, con el mismo margen de error y una certeza no inferior al 99 %? ¿Lo mismo con 99'9 % de certeza? (*Soluciones*: $n \geq 9504$, $n \geq 16412$, $n \geq 26632$)
23. Rehaz los cálculos de la actividad anterior para un nivel de confianza del 99 %
24. Se investigan los hábitos de consumo de una población de dos millones de personas. Se pasa una encuesta a mil personas y se les pregunta si en su domicilio se cocina con gas, de los que 600 responden afirmativamente. Qué puedes afirmar sobre el número de personas en las que en su domicilio se usa gas con un nivel de confianza del 95 %.

3. CONTRASTE DE HIPÓTESIS

25. Repite los cálculos de la actividad anterior suponiendo que se han obtenido 65 caras. ¿Es una moneda de probabilidad 1/2?
26. Se ha calculado que entre los deportistas que juegan al futbol hay un porcentaje de accidentes del 22 %. Se han estudiado el número de accidentes entre 400 personas que practican la natación y han resultados accidentadas 36 personas. ¿Es la natación igual de peligrosa que el futbol?
27. La tasa de natalidad de una región ha sido del 8'7 por mil habitantes durante un cierto año. Suponemos que la tasa de natalidad es la misma al año siguiente, ¿hasta qué número de nacimientos entre 3000 habitantes estarías dispuesto a confirmar dicha hipótesis?

Autores: Leticia González Pascual y Álvaro Valdés

EJERCICIOS Y PROBLEMAS

1. Utiliza las tablas de la normal estándar y comprueba las probabilidades siguientes:

a) $P(z < 1) = 0'8413$; b) $P(z \leq 0'7) = 0'7580$; c) $P(z > 1) = 1 - 0'8413 = 0'1587$; d) $P(z \geq 1'86) = 0'0314$; e) $P(-1'83 < z < -1) = 0'1251$; f) $P(z > 1'38) = 0'0838$; g) $P(-1'83 \leq z < 0'75) = 0'7398$.

2. Utiliza las tablas de la normal estándar para calcular las probabilidades siguientes:

a) $P(z < 0'72)$; b) $P(z \leq 1'21)$; c) $P(z > 0'93)$; d) $P(z \geq -1'86)$; e) $P(-1{,}02 < z < -0'85)$; f) $P(0'65 < z < 1'42)$; g) $P(1'76 > z > 0'72)$; h) $P(-0'9 > z > -0'51)$.

3. Una variable aleatoria X sigue una distribución normal de media 5 y desviación típica 0'5. Calcula las siguientes probabilidades:

a) $P(X < 6)$; b) $P(X \leq 4)$; c) $P(X > 3)$; d) $P(X \geq 5'5)$; e) $P(-3 < X < -1)$; f) $P(X > 2)$; g) $P(3 \leq X < 7)$; h) $P(6 > X > 2)$.

4. En un centro escolar hay 900 estudiantes, que son 600 de ESO y 300 de Bachillerato. Se quiere tomar una muestra aleatoria por muestreo estratificado proporcional de tamaño 50. ¿Cuántos estudiantes se deben escoger de forma aleatoria de ESO y cuántos de bachillerato?

5. El número de megabytes (Mb) descargados mensualmente por un grupo de clientes de una compañía de telefonía móvil se aproxima por una distribución normal con media 4 Mb y desviación típica igual a 1'5 Mb. Se toma una muestra aleatoria simple de tamaño 64.

a) ¿Cuál es la probabilidad de que la media muestra sea inferior a 3'5 Mb?

b) ¿Sea superior a 4'5 Mb?

c) Se supone ahora que la media poblacional es desconocida y que la media muestra toma el valor 3'7 Mb. Obtén un intervalo de confianza al 95 % para la media de la población. Obtén también un intervalo de confianza al 99 % para la media de la población. ¿Es mayor o menos que el anterior? Explica este resultado

6. La duración en horas de un cierto tipo de bombillas de bajo consumo se puede aproximar por una distribución normal de media μ y desviación típica igual a 3600 horas. Se toma una muestra aleatoria simple.

a) ¿Qué tamaño muestral se necesitaría como mínimo para que, con un nivel de confianza del 95 %, el valor absoluto de la diferencia entre μ y la duración media observada $\overline{X}$ de esas bombillas sea inferior a 100 horas?

b) Si el tamaño de la muestra es 121 y la duración media observada $\overline{X}$ es de 4000 horas, obtén un intervalo de confianza al 95 % para la media poblacional μ.

7. La longitud, en milímetros (mm), de los individuos de una determinada plantación de mejillones se puede aproximar por una variable aleatoria con distribución normal de media desconocida μ y desviación típica igual a 3 mm.

a) Se toma una muestra aleatoria simple de 64 mejillones y se obtiene una media muestral igual a 70 mm. Determina un intervalo de confianza para la media poblacional de la longitud de los mejillones con un nivel de confianza del 99 %. Determina también un intervalo de confianza para la media poblacional de la longitud de los mejillones con un nivel de confianza del 95 %.

b) Determina el tamaño muestral mínimo necesario para que el error máximo cometido en la estimación de μ por la media muestral sea menor o igual que 5 mm con un nivel de confianza del 95 %.

8. El consumo mensual de leche (en litros) de los alumnos de un determinado colegio se puede aproximar por una variable aleatoria con distribución normal de media μ y desviación típica $\sigma = 3$ litros.

a) Se toma una muestra aleatoria simple y se obtiene el intervalo de confianza (16; 20) para estimar μ, con un nivel de confianza del 95 %. Calcula la media muestral y el tamaño de la muestra elegida.

b) Se toma una muestra aleatoria simple de tamaño 81. Calcula el error máximo cometido en la estimación de μ mediante la media muestral con un nivel de confianza del 95 %.

9. El consumo familiar diario de electricidad (en kW) en cierta ciudad se puede aproximar por una variable aleatoria con distribución normal de media $\mu = 6'3$ kW y desviación típica 0'9 kW. Se toma una muestra aleatoria simple de tamaño 100. Calcula:

a) La probabilidad de que la media muestral esté comprendida entre 6 kW y 6'6 kW.

b) El nivel de confianza con el que se ha calculado el intervalo de confianza (6'1; 6'6) para la media del consumo familiar diario.

10. Se ha tomado una muestra aleatoria simple de 9 pacientes y se ha anotado el número de días que han recibido tratamiento para trastornos digestivos que sufren. Los resultados han sido:

100, 98, 75, 103, 84, 95, 105, 82, 107.

Se sabe que la duración, en días, del tratamiento se puede aproximar por una variable aleatoria con distribución normal de media μ desconocida y desviación típica 9 días.

a) Determina un intervalo de confianza con un nivel del 95 % para μ.

b) ¿Qué tamaño mínimo debe tener la muestra para que el error máximo cometido en la estimación de la media sea menor de 5 días, con un nivel de confianza del 95 %?

11. El tiempo de renovación de un teléfono móvil, expresado en años, se puede aproximar mediante una distribución normal con desviación típica 0'2 años.

a) Se toma una muestra aleatoria simple de 81 usuarios y se obtiene una media muestral igual a 1'8 años. Determina un intervalo de confianza al 95 % para el tiempo medio de renovación de un teléfono móvil.

b) Determina el tamaño muestral mínimo necesario para que el valor absoluto de la diferencia entre la media muestral y la media poblacional sea menor o igual a 0'03 años con un nivel de confianza del 95 %.

12. Se considera una variable aleatoria con distribución normal de media μ y desviación típica igual a 1'2. Se toma una muestra aleatoria simple de 100 elementos.

a) Calcula la probabilidad de que el valor absoluto de la diferencia entre la media muestral y μ sea mayor o igual que 4.

b) Determina un intervalo de confianza del 90 % para μ; si la media muestral es igual a 50.

13. La estatura en centímetros (cm) de los varones mayores de edad de una determinada población se puede aproximar por una variable aleatoria con distribución normal de media μ y desviación típica σ = 15 cm.

a) Se toma una muestra aleatoria simple de 100 individuos obteniéndose una media muestral $\bar{x}$ = 174 cm. Determina un intervalo de confianza al 95 % para μ.

b) ¿Cuál es el mínimo tamaño muestral necesario para que el error máximo cometido en la estimación de μ por la media muestral sea menor que 5 cm, con un nivel de confianza del 90 %?

14. El mínimo tamaño muestral necesario para estimar la media de una determinada característica de una población que puede aproximarse por una variable aleatoria con distribución normal de desviación típica σ, con un error máximo de 2'27 y un nivel de confianza del 90 %, supera en 1000 unidades al que se necesitaría si el nivel de confianza fuera del 95 % y el error máximo fuera de 5'23. Expresa los tamaños muestrales en función de la desviación típica σ y calcula la desviación típica de la población y los tamaños muestrales respectivos.

AUTOEVALUACIÓN

1. Indica cuál de los siguientes motivos no es por el que se recurre a una muestra:
   a) El proceso de medición es destructivo
   b) La población es muy numerosa
   c) La población es imposible o difícil de controlar
   d) La población tiene mal carácter
2. Una ganadería tiene diez mil ovejas de diferentes razas. Queremos extraer una muestra de 100 ovejas. Indica el tipo de muestreo más adecuado:
   a) muestreo aleatorio sistemático   b) muestreo aleatorio estratificado
   c) muestreo no aleatorio   d) muestreo aleatorio por conglomerados
3. Indica cuál de las siguientes afirmaciones es falsa en una distribución $N(0, 1)$:
   a) $P(z < 0) = 1$ b) $P(z < 0) = 0'5$ c) $P(z = \sigma) = 0$ d) $P(z > 0) = 0'5$.
4. De una población de media 69 y desviación típica 8 se toma una muestra de tamaño 12. La probabilidad de que un individuo de la muestra tenga un valor mayor que 93 es:
   a) $P(x > 93) = 0'9987$ b) $P(x > 93) = 0'6501$ c) $P(x > 93) = 0'1293$ d) $P(x > 93) = 0'0013$.
5. Los parámetros de una distribución son $\mu = 10$ y desviación típica $\sigma = 20$. Se extrae una muestra de 100 individuos. El valor de $P(8 < \bar{x} < 12)$ es:
   a) $P(z < 1) = 0'8416$ b) 0'6838   c) 0'3168   d) 0'1584.
6. En el control de calidad de una fábrica de chocolate, se embasan tabletas de 100 gramos con una desviación típica de 2 gramos. Se toma una muestra de 50 tabletas. Calcula la probabilidad de que el peso medio de las tabletas sea menor que 99 gramos:
   a) 0'0002   b) 0'9998   c) 0'3541   d) 0'0023.
7. En el control de calidad de una envasadora de estuches de jamón, se envasan en estuches de 100 gramos con una desviación típica de 2 gramos. La probabilidad de que un lote de 400 estuches pese más de 40100 gramos es de:
   a) 0'9938   b) 0'0062   c) 0'0002   d) 0,9998
8. Determina un intervalo de confianza con un nivel de confianza del 0'95 de una $N(2, 0'1)$:
   a) $P(1'8 < X < 2'2) = 0'95$ b) $P(1'9 < X < 2'1) = 0'95$ c) $P(1'8 < X < 2'2) = 0'99$ d) $P(1 < X < 2) = 0'90$
9. Se ha elegido una muestra aleatoria simple de 1000 componentes y en ella se ha obtenido que la proporción de defectuosos es del 3'7 %. Determina el intervalo de confianza al 99 % para la proporción de componentes defectuosos que se producen en una fábrica:
   a) (0'0371, 0'0375)   b) (0'0258, 0'0351)   c) (0'0216, 0'0524)   d) (0'0111, 0'0222)
10. ¿Cuál debe ser el tamaño de la muestra en una población de 8 millones de votantes para conocer si tienen la intención de votar a un determinado partido político con una probabilidad de acierto del 0'95 y un margen de error inferior a 0'02?:
   a) 2401   b) 1959   c)2502   d) 3026

ÁREAS BAJO LA DISTRIBUCIÓN DE PROBABILIDAD NORMAL ESTÁNDAR, N(0, 1)

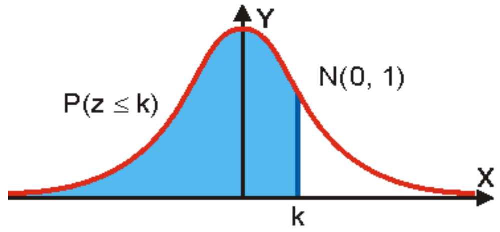


Tabla de la uam: Universidad Autónoma de Madrid

z	0	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07	0,08	0,09
0,0	0,5000	0,5040	0,5080	0,5120	0,5160	0,5199	0,5239	0,5279	0,5319	0,5359
0,1	0,5398	0,5438	0,5478	0,5517	0,5557	0,5596	0,5636	0,5675	0,5714	0,5753
0,2	0,5793	0,5832	0,5871	0,5910	0,5948	0,5987	0,6026	0,6064	0,6103	0,6141
0,3	0,6179	0,6217	0,6255	0,6293	0,6331	0,6368	0,6406	0,6443	0,6480	0,6517
0,4	0,6554	0,6591	0,6628	0,6664	0,6700	0,6736	0,6772	0,6808	0,6844	0,6879
0,5	0,6915	0,6950	0,6985	0,7019	0,7054	0,7088	0,7123	0,7157	0,7190	0,7224
0,6	0,7257	0,7291	0,7324	0,7357	0,7389	0,7422	0,7454	0,7486	0,7517	0,7549
0,7	0,7580	0,7611	0,7642	0,7673	0,7704	0,7734	0,7764	0,7794	0,7823	0,7852
0,8	0,7881	0,7910	0,7939	0,7967	0,7995	0,8023	0,8051	0,8078	0,8106	0,8133
0,9	0,8159	0,8186	0,8212	0,8238	0,8264	0,8289	0,8315	0,8340	0,8365	0,8389
1,0	0,8413	0,8438	0,8461	0,8485	0,8508	0,8531	0,8554	0,8577	0,8599	0,8621
1,1	0,8643	0,8665	0,8686	0,8708	0,8729	0,8749	0,8770	0,8790	0,8810	0,8830
1,2	0,8849	0,8869	0,8888	0,8907	0,8925	0,8944	0,8962	0,8980	0,8997	0,9015
1,3	0,9032	0,9049	0,9066	0,9082	0,9099	0,9115	0,9131	0,9147	0,9162	0,9177
1,4	0,9192	0,9207	0,9222	0,9236	0,9251	0,9265	0,9279	0,9292	0,9306	0,9319
1,5	0,9332	0,9345	0,9357	0,9370	0,9382	0,9394	0,9406	0,9418	0,9429	0,9441
1,6	0,9452	0,9463	0,9474	0,9484	0,9495	0,9505	0,9515	0,9525	0,9535	0,9545
1,7	0,9554	0,9564	0,9573	0,9582	0,9591	0,9599	0,9608	0,9616	0,9625	0,9633
1,8	0,9641	0,9649	0,9656	0,9664	0,9671	0,9678	0,9686	0,9693	0,9699	0,9706
1,9	0,9713	0,9719	0,9726	0,9732	0,9738	0,9744	0,9750	0,9756	0,9761	0,9767
2,0	0,9772	0,9778	0,9783	0,9788	0,9793	0,9798	0,9803	0,9808	0,9812	0,9817
2,1	0,9821	0,9826	0,9830	0,9834	0,9838	0,9842	0,9846	0,9850	0,9854	0,9857
2,2	0,9861	0,9864	0,9868	0,9871	0,9875	0,9878	0,9881	0,9884	0,9887	0,9890
2,3	0,9893	0,9896	0,9898	0,9901	0,9904	0,9906	0,9909	0,9911	0,9913	0,9916
2,4	0,9918	0,9920	0,9922	0,9925	0,9927	0,9929	0,9931	0,9932	0,9934	0,9936
2,5	0,9938	0,9940	0,9941	0,9943	0,9945	0,9946	0,9948	0,9949	0,9951	0,9952
2,6	0,9953	0,9955	0,9956	0,9957	0,9959	0,9960	0,9961	0,9962	0,9963	0,9964
2,7	0,9965	0,9966	0,9967	0,9968	0,9969	0,9970	0,9971	0,9972	0,9973	0,9974
2,8	0,9974	0,9975	0,9976	0,9977	0,9977	0,9978	0,9979	0,9979	0,9980	0,9981
2,9	0,9981	0,9982	0,9982	0,9983	0,9984	0,9984	0,9985	0,9985	0,9986	0,9986
3,0	0,9987	0,9987	0,9987	0,9988	0,9988	0,9989	0,9989	0,9989	0,9990	0,9990
3,1	0,9990	0,9991	0,9991	0,9991	0,9992	0,9992	0,9992	0,9992	0,9993	0,9993
3,2	0,9993	0,9993	0,9994	0,9994	0,9994	0,9994	0,9994	0,9995	0,9995	0,9995
3,3	0,9995	0,9995	0,9995	0,9996	0,9996	0,9996	0,9996	0,9996	0,9996	0,9997
3,4	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9998
3,5	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998
3,6	0,9998	0,9998	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999
3,7	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999
3,8	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999
3,9	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000
4,0	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000

Apéndice: Problemas propuestos en selectividad

1. El número de megabytes (Mb) descargados mensualmente por un grupo de clientes de una compañía de telefonía móvil con la tarifa AA se puede aproximar por una distribución normal con media 3'5 Mb y desviación típica igual a 1'5 Mb. Se toma una muestra aleatoria simple de tamaño 49. A) ¿Cuál es la probabilidad de que la media muestra sea inferior a 3'37 Mb? B) Supóngase ahora que la media poblacional es desconocida y que la media muestra toma el valor 3'42 Mb. Obténgase un intervalo de confianza al 95 % para la media de la población.
2. La duración en horas de un cierto tipo de bombillas se puede aproximar por una distribución normal de media μ y desviación típica igual a 1940 horas. Se toma una muestra aleatoria simple. A) ¿Qué tamaño muestral se necesitaría como mínimo para que, con un nivel de confianza del 95 %, el valor absoluto de la diferencia entre μ y la duración media observada $\overline{X}$ de esas bombillas sea inferior a 100 horas? B) Si el tamaño de la muestra es 225 y la duración media observada $\overline{X}$ es de 12415 horas, obténgase un intervalo de confianza al 90 % para μ.
3. La longitud, en milímetros (mm), de los individuos de una determinada colonia de gusanos de seda se puede aproximar por una variable aleatoria con distribución normal de media desconocida μ y desviación típica igual a 3 mm. A) Se toma una muestra aleatoria simple de 48 gusanos de seda y se obtiene una media muestral igual a 36 mm. Determínese un intervalo de confianza para la media poblacional de la longitud de los gusanos de seda con un nivel de confianza del 95 %. B) Determínese el tamaño muestral mínimo necesario para que el error máximo cometido en la estimación de μ por la media muestral sea menor o igual que 1 mm con un nivel de confianza del 90 %.
4. El consumo mensual de leche (en litros) de los alumnos de un determinado colegio se puede aproximar por una variable aleatoria con distribución normal de media μ y desviación típica σ = 3 litros. A) Se toma una muestra aleatoria simple y se obtiene el intervalo de confianza (16'33; 19'27) para estimar μ, con un nivel de confianza del 95 %. Calcúlese la media muestral y el tamaño de la muestra elegida. B) Se toma una muestra aleatoria simple de tamaño 64. Calcúlese el error máximo cometido en la estimación de μ mediante la media muestral con un nivel de confianza del 95 %.
5. El consumo familiar diario de electricidad (en kW) en cierta ciudad se puede aproximar por una variable aleatoria con distribución normal de media μ y desviación típica 1'2 kW. Se toma una muestra aleatoria simple de tamaño 50. Calcúlese: a) La probabilidad de que la media muestral esté comprendida entre 6 kW y 6'6 kW, si μ = 6'3 kW. b) El nivel de confianza con el que se ha calculado el intervalo de confianza (6'1; 6'9) para la media del consumo familiar diario.
6. Se ha tomado una muestra aleatoria simple de diez pacientes y se ha anotado el número de días que han recibido tratamiento para los trastornos del sueño que sufren. Los resultados han sido: 290; 275; 290; 325; 285; 365; 375; 310; 290; 300. Se sabe que la duración, en días, del tratamiento se puede aproximar por una variable aleatoria con distribución normal de media μ desconocida y desviación típica 34'5 días. a) Determínese un intervalo de confianza con un nivel del 95 % para μ. b) ¿Qué tamaño mínimo debe tener la muestra para que el error máximo cometido en la estimación de la media sea menor de 10 días, con un nivel de confianza del 95 %?
7. El tiempo de renovación de un teléfono móvil, expresado en años, se puede aproximar mediante una distribución normal con desviación típica 0'4 años. a) Se toma una muestra aleatoria simple de 400 usuarios y se obtiene una media muestral igual a 1'75 años. Determínese un intervalo de confianza al 95 % para el tiempo medio de renovación de un teléfono móvil. b) Determínese el tamaño muestral mínimo necesario para que el valor absoluto de la diferencia entre la media muestral y la media poblacional sea menor o igual a 0'02 años con un nivel de confianza del 90 %.
8. Se considera una variable aleatoria con distribución normal de media μ y desviación típica igual a 210. Se toma una muestra aleatoria simple de 64 elementos. a) Calcúlese la probabilidad de que el valor absoluto de la diferencia entre la media muestral y μ sea mayor o igual que 22. b) Determínese un intervalo de confianza del 99 % para μ; si la media muestral es igual a 1532.
9. La estatura en centímetros (cm) de los varones mayores de edad de una determinada población se puede aproximar por una variable aleatoria con distribución normal de media μ y desviación típica σ = 16 cm. a) Se tomó una muestra aleatoria simple de 625 individuos obteniéndose una media muestral $\overline{x}$ = 169 cm. Hállese un intervalo de confianza al 98 % para μ. b) ¿Cuál es el mínimo tamaño muestral necesario para que el error máximo cometido en la estimación de μ por la media muestral sea menor que 4 cm, con un nivel de confianza del 90 %?
10. El mínimo tamaño muestral necesario para estimar la media de una determinada característica de una población que puede aproximarse por una variable aleatoria con distribución normal de desviación típica σ, con un error máximo de 3'290 y un nivel de confianza del 90 %, supera en 7500 unidades al que se necesitaría si el nivel de confianza fuera del 95 % y el error máximo fuera de 7'840: Exprésense los tamaños muestrales en función de la desviación típica σ y calcúlense la desviación típica de la población y los tamaños muestrales respectivos.

Nota: Utilícese $z_{0;05}$ = 1'645.

RESUMEN

Muestra aleatoria simple	Todos los individuos de la población tienen la misma probabilidad de ser elegidos en la muestra.	Se numera la población y se usan números aleatorios para elegir la muestra.
Teorema central del límite	Si X es una variable aleatoria de una población de media μ finita y desviación típica σ finita. Entonces: La distribución de la media muestral de tamaño n tiene de media μ y desviación típica $\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$ y se aproxima a una distribución normal a medida que crece el tamaño de la muestra	Población $N(10, 2)$ Muestra de tamaño n = 100. $\rightarrow$ Distribución de la media muestral: $N(10, 0'2)$
Media muestral	$N(\bar{x}, \frac{\sigma}{\sqrt{n}})$	$P(8 < \bar{x} < 12) = P(-1 < z < 1) = 2P(z < 1) - 1 = 0'6832$
Proporción muestral	$N(p, \sqrt{\frac{p(1-p)}{n}})$	Proporción: 5 %. Muestra de tamaño n = 100 $\rightarrow N(0'05, 0'03)$
Intervalo de confianza	Intervalo de confianza: Si $P(a < X < b) = 0'95$ tenemos el intervalo de confianza (a, b) Nivel de confianza o coeficiente de confianza: $1 - \alpha = \gamma$, en nuestro ejemplo, 0'95 Nivel de significación o de riesgo: α, en nuestro ejemplo, 0'05 Valor crítico: k_1 y k_2, que dejan a la derecha (o a la izquierda) un área $\alpha/2$. En la $N(0, 1)$ son $-1'96$ y $1'96$ para α = 0'05. **Margen de error:** Diferencia entre los extremos del intervalo de confianza.	
Intervalo de confianza para la media	$\mu \in \left(\bar{x} - z_{1-\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \quad \bar{x} + z_{1-\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \right)$	$N(2, 1)$, $1 - \alpha = \gamma = 0'95$; $P(-1'96 < (X-2)/1 < 1'96) = 0'95$ $\Rightarrow P(1'8 < X < 2'2) = 0'95$
Error máximo admisible. Tamaño mínimo de la muestra	$E = z_{1-\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \Rightarrow n = \left(z_{1-\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma}{E} \right)^2$	$N(2, 1)$, $1 - \alpha = 0'95$; $n = 100$ $E = 1'96 \cdot (1/10) = 0'196$. Si $E = 0'5 \rightarrow n = (1'96 \cdot (1/0'5))^2 \approx 16$
Intervalo de confianza para la proporción	$p \in \left(\hat{p} - z_{1-\alpha/2} \cdot \sqrt{\frac{\hat{p} \cdot (1-\hat{p})}{n}}, \quad \hat{p} + z_{1-\alpha/2} \cdot \sqrt{\frac{\hat{p} \cdot (1-\hat{p})}{n}} \right)_\gamma$	Proporción:1/6. Muestra de tamaño n = 120. $1 - \alpha = 0'95 \rightarrow z_{1-\alpha/2}$ = 1'645; s = 0'034 $\rightarrow$ (0'111, 0'223)
Contraste de hipótesis	Paso 1: Hipótesis H_0: $\mu = \mu_0$, H_1: $\mu \neq \mu_0$. Paso 2: Zona de aceptación. $\mu \in \left(\bar{x} - z_{1-\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \quad \bar{x} + z_{1-\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \right)$ Paso 3: Verificación: Se extrae la muestra y se calcula $\bar{x}$. Paso 4: Decisión: Se acepta o se rechaza la hipótesis.	