Operaciones con matrices

1. Dadas $A=\begin{pmatrix}2 & 3\\ -1 & 7\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}5 & -2\\ 4 & -9\end{pmatrix}$ y $C=\begin{pmatrix}-11 & 12\\ -14 & 41\end{pmatrix}$, halla dos números *a* y *b* para que se verifique que $a\cdot A+b\cdot B=C$.

2. Dadas las matrices $A=\begin{pmatrix}1 & -2\\ 2 & -4\end{pmatrix}$ y $B=\begin{pmatrix}2 & -6\\ 1 & -3\end{pmatrix}$, halla otras dos matrices del mismo orden, *X* e *Y*, que cumplan: $\begin{cases}2X-Y=A\\ X+3Y=2B\end{cases}$.

3. (Propuesto en Selectividad 2011, Canarias)

Dadas las matrices $A=\begin{pmatrix}-1 & 0 & 1\\ 3 & 1 & -1\\ 2 & 1 & 0\end{pmatrix}$ y $B=\begin{pmatrix}2 & -1 & 1\\ 0 & 1 & 3\\ 2 & -2 & 1\end{pmatrix}$. Resuelve el sistema

$$\begin{cases}2X-3Y=A\\ 3X+4Y=B\end{cases}$$

4. Para las matrices $A=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 2 & -1\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}1 & 1\\ 3 & -2\end{pmatrix}$ y $C=\begin{pmatrix}2 & -3\\ 0 & 5\end{pmatrix}$, comprueba que se cumplen las siguientes propiedades:

a) $A+(B+C)=(A+B)+C$

b) $A(B+C)=AB+AC$

c) $(A-B)C=AC-BC$

d) $A(BC)=(AB)C$

5. Calcula, si es posible, los productos *AB* y *BA* para las matrices siguientes:

a) $A=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 2 & -1\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}1 & 1\\ 3 & -2\end{pmatrix}$

b) $A=\begin{pmatrix}3 & -1\\ 2 & 0\\ 4 & -2\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}-2 & 0 & 1\\ 4 & -1 & 3\end{pmatrix}$

c) $A=\begin{pmatrix}1 & -1\\ 2 & -1\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}1 & 1\\ 4 & -1\end{pmatrix}$

d) $A=\begin{pmatrix}2\\ -3\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}3 & -2\\ 4 & 1\end{pmatrix}$

e) $A=\begin{pmatrix}2 & 3 & -1\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}-4\\ 0\\ 3\end{pmatrix}$

f) $A=\begin{pmatrix}1 & -2 & 3\\ 4 & 0 & -1\\ 7 & -3 & 1\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}0 & -2 & 3\\ -1 & 0 & 4\\ 2 & 0 & -3\end{pmatrix}$

6. Dadas las matrices $A=\begin{pmatrix}1 & -2\\ 2 & -4\end{pmatrix}$ y $B=\begin{pmatrix}2 & -6\\ 1 & -3\end{pmatrix}$, halla los productos *AB* y *BA*. Además de que no se cumple la propiedad conmutativa, ¿qué otro comentario puede hacerse?

7. Dadas las matrices $A=\begin{pmatrix}1 & -2\\ 2 & -4\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}-2 & -1\\ -1 & -3\end{pmatrix}$ y $C=\begin{pmatrix}-2 & 5\\ -1 & 0\end{pmatrix}$, comprueba que $AB = AC$, y sin embargo, $B \neq C$.

8. Para la matriz $A=\begin{pmatrix}a & 1\\ 0 & -a\end{pmatrix}$, calcula el valor de a para que $A^2 - A=\begin{pmatrix}12 & -1\\ 0 & 20\end{pmatrix}$.

Potencia de una matriz

9. Sea la matriz $A=\begin{pmatrix}5 & -8\\ 2 & -3\end{pmatrix}$.

a) Demuestra que $A^2 = 2A - I_2$.

b) Aplicando el apartado a) halla la matriz A^6.

10. a) Halla las matrices $A=\begin{pmatrix}0 & a\\ b & 0\end{pmatrix}$ que cumplen que $A^3 = A$.

b) Para esas matrices y para el valor $a = -2$, calcula $A^{10} + A^{11} + A^{12}$.

11. Dada la matriz $A=\begin{pmatrix}1 & a\\ 0 & 1\end{pmatrix}$, encuentra la expresión general de A^n. ¿Cuál es la matriz $A^{10} - 10A$?

12. Dada la matriz $A=\begin{pmatrix}1 & a\\ 0 & -1\end{pmatrix}$, encuentra la expresión general de A^n. ¿Cuál es la matriz $A^{10} - 10A$?

13. Halla la expresión general de A^n en los siguientes casos:

a) $A=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 0\end{pmatrix}$ b) $A=\begin{pmatrix}0 & 1 & 0\\ 1 & 1 & 0\\ 0 & 0 & -1\end{pmatrix}$ c) $A=\begin{pmatrix}1 & 1 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$

14. Dada la matriz $A=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 1 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 0\end{pmatrix}$, comprueba que para todo n natural se cumple que

$A^{2n-1}=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ n & 0 & 1\\ n-1 & 1 & 0\end{pmatrix}$ y $A^{2n}=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ n & 1 & 0\\ n & 0 & 1\end{pmatrix}$.

15. Dada la matriz $A=\begin{pmatrix}1 & 1 & 0\\ 1 & -1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$, comprueba que para todo *n* natural se cumple que

$A^{2n-1}=\begin{pmatrix}2^{n-1} & 2^{n-1} & 0\\ 2^{n-1} & -2^{n-1} & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$ y $A^{2n}=\begin{pmatrix}2^n & 0 & 0\\ 0 & 2^n & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$.

Comprobación de algunas propiedades

16. Halla los valores de *a* para los que la matriz $A=\begin{pmatrix}a & a+1 & -3\\ a^2-1 & 2 & 4a\\ -3 & a^2+4 & -1\end{pmatrix}$ es simétrica.

17. Halla el valor de *a* para que sea ortogonal la matriz $A=\begin{pmatrix}a & 0 & a\\ a & 0 & -a\\ 0 & 1 & 0\end{pmatrix}$.

(Recuerda: Una matriz *A* es ortogonal si $A\cdot A^t=I$).

18. Demuestra que si las matrices *A* y *B* son ortogonales, entonces su producto también es ortogonal.

19. Demuestra que si *P* y *Q* son matrices cuadradas tales que $P\cdot Q=Q^2\cdot P$, entonces $(P\cdot Q)^2=Q^6\cdot P^2$.

20. Dada las matrices $A=(a_{ij})_{n\times m}$ y $B=(b_{ij})_{n\times m}$, demuestra las propiedades:

1) $(A^t)^t=A$ 2) $(A+B)^t=A^t+B^t$ 3) $(kA)^t=kA^t$

21. Comprueba las propiedades anteriores para las matrices $A=\begin{pmatrix}1 & -2\\ 3 & 0\\ 4 & -5\end{pmatrix}$ y $B=\begin{pmatrix}3 & -3\\ -5 & 2\\ 1 & 0\end{pmatrix}$.

22. Dada las matrices $A=(a_{ij})_{n\times m}$ y $B=(b_{rs})_{m\times p}$, demuestra la propiedad 4) $(A\cdot B)^t=B^t\cdot A^t$

23. Comprueba la propiedad anterior para las matrices $A=\begin{pmatrix}1 & -2\\ 3 & 0\\ 4 & -5\end{pmatrix}$ y $B=\begin{pmatrix}2 & -1 & 0\\ -4 & -6 & 3\end{pmatrix}$.

24. (Propuesto en Selectividad 2006, Castilla y León)

Halla las matrices *A* cuadradas de orden 2, que verifican la igualdad: $A\begin{pmatrix}1 & 0\\ 1 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 1 & 1\end{pmatrix}A$.

Rango de una matriz

25. Utilizando transformaciones de Gauss halla el rango de las siguientes matrices:

a) $A=\begin{pmatrix}1 & -2 & 3\\ -2 & 0 & 1\\ 5 & -2 & 1\end{pmatrix}$ b) $B=\begin{pmatrix}1 & 0 & 2\\ 2 & -1 & 1\\ 1 & 2 & 8\end{pmatrix}$ c) $C=\begin{pmatrix}1 & -3 & -1 & -1\\ 2 & -6 & -2 & 0\\ -1 & 3 & 1 & 2\end{pmatrix}$

26. Determina, en función de los valores de *a*, el rango de las matrices:

a) $A=\begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\ 2 & 2 & 1\\ 1 & 1 & a\end{pmatrix}$ b) $A=\begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\ 1 & 2 & 1\\ 1 & 1 & a\end{pmatrix}$ c) $A=\begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\ 0 & 1 & 1\\ 1 & 1 & a^2\end{pmatrix}$

27. Determina, en función de los valores de *a*, *b* y *c*, el rango de la matriz

$$A=\begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\ a & b & c\\ b+c & a+c & a+b\end{pmatrix}.$$

Inversa de una matriz

28. Halla por dos métodos distintos (directamente y aplicando el método de Gaus–Jordan) la inversa de cada una de las siguientes matrices, si existe.

a) $A=\begin{pmatrix}1 & 3\\ 2 & 5\end{pmatrix}$ b) $B=\begin{pmatrix}3 & 1\\ -2 & 2\end{pmatrix}$ c) $C=\begin{pmatrix}1 & 3\\ 2 & 6\end{pmatrix}$

29. Aplicando el método de Gaus–Jordan halla, cuando exista la inversa de cada una de las siguientes matrices.

a) $A=\begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\ 0 & 1 & 1\\ 1 & 1 & 2\end{pmatrix}$ b) $B=\begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\ 1 & 2 & -1\\ 2 & 1 & 0\end{pmatrix}$ c) $C=\begin{pmatrix}1 & -1 & 1\\ -1 & 2 & 1\\ 1 & 0 & 3\end{pmatrix}$

30. Calcula la matriz *A* que haga que $\begin{pmatrix}1 & 3\\ 4 & 2\end{pmatrix}=A\begin{pmatrix}2 & 1\\ 5 & 3\end{pmatrix}$. Halla la solución de dos maneras:

1) Sin calcular la matriz inversa; 2) Calculándola.

31. (Propuesto en Selectividad 1997, Madrid)

Calcula los valores del parámetro λ para que la inversa de la matriz $A=\begin{pmatrix}\lambda & -2\\ 5 & -\lambda\end{pmatrix}$ coincida con su opuesta.

Soluciones

1. $a = 2$; $b = 3$.

2. $X = \begin{pmatrix} 1 & -18/7 \\ 8/7 & -18/7 \end{pmatrix}$; $Y = \begin{pmatrix} 1 & -22/7 \\ 2/7 & -8/7 \end{pmatrix}$.

3. $X = \frac{1}{17} \cdot \begin{pmatrix} 2 & -3 & 7 \\ 12 & 7 & 5 \\ 14 & -2 & 3 \end{pmatrix}$; $Y = \frac{1}{17} \cdot \begin{pmatrix} 7 & -2 & -1 \\ -9 & -1 & 9 \\ -2 & -7 & 2 \end{pmatrix}$.

5. a) $AB = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}$; $BA = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$. b) $AB = \begin{pmatrix} -10 & 1 & 0 \\ -4 & 0 & 2 \\ -16 & 2 & -2 \end{pmatrix}$; $BA = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 22 & -10 \end{pmatrix}$.

c) $AB = \begin{pmatrix} -3 & 2 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}$; $BA = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 2 & -3 \end{pmatrix}$.d) $BA = \begin{pmatrix} 12 \\ 5 \end{pmatrix}$. e) $AB = -11$; $BA = \begin{pmatrix} -8 & -12 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \\ 6 & 9 & -3 \end{pmatrix}$.

f) $AB = \begin{pmatrix} 8 & -2 & -14 \\ -2 & -8 & 15 \\ 5 & -14 & 6 \end{pmatrix}$; $BA = \begin{pmatrix} 13 & -9 & 5 \\ 27 & -10 & 1 \\ -19 & 5 & 3 \end{pmatrix}$.

6. $AB = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$; $BA = \begin{pmatrix} -10 & 20 \\ -5 & 10 \end{pmatrix}$. El producto de dos matrices no nulas da la matriz nula.

7. $AB = \begin{pmatrix} 0 & 5 \\ 0 & 10 \end{pmatrix}$; $AC = \begin{pmatrix} 0 & 5 \\ 0 & 10 \end{pmatrix}$.

8. $a = 4$.

9. $A^6 = \begin{pmatrix} 25 & -48 \\ 12 & -23 \end{pmatrix}$.

10. a) $A = \begin{pmatrix} 0 & a \\ 1/a & 0 \end{pmatrix}$. b) $\begin{pmatrix} 2 & -2 \\ -1/2 & 2 \end{pmatrix}$.

11. $A^n = \begin{pmatrix} 1 & na \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. $\begin{pmatrix} -9 & 0 \\ 0 & -9 \end{pmatrix}$.

12. $A^{2n} = I$ y $A^{2n-1} = A$. $\begin{pmatrix} -9 & -10a \\ 0 & 11 \end{pmatrix}$.

13. a) $A^{2n} = I$ y $A^{2n-1} = A$. b) No puede darse una fórmula para la potencia A^n, pero puede observarse que en los elementos a_{12}, a_{21} y a_{22} aparecen los términos de la sucesión de Fibonacci: 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13… c) $A^n = \begin{pmatrix} 1 & n & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

16. $a = 2$.

17. $a = \pm\frac{1}{\sqrt{2}}$.

24. $A = \begin{pmatrix} a & 0 \\ c & a \end{pmatrix}$.

25. a) 2. b) 2. c) 2.
26. a) 2 para cualquier valor de *a*. b) 2 si *a* = 1; 3 en los demás casos. c) 2 si *a* = ±1; 3 en los demás casos.
27. Si *a*, *b* y *c* son iguales, el rango es 1. Si *a*, *b* y *c* no son iguales, el rango es 2.
28. a) $A^{-1}=\begin{pmatrix}-5 & 3\\ 2 & -1\end{pmatrix}$. b) $B^{-1}=\begin{pmatrix}1/4 & -1/8\\ 1/4 & 3/8\end{pmatrix}$. c) No es invertible.
29. a) $A^{-1}=\begin{pmatrix}1 & -1 & 0\\ 1 & 1 & -1\\ -1 & 0 & 1\end{pmatrix}$. b) $B^{-1}=\begin{pmatrix}-1/4 & -1/4 & 3/4\\ 1/2 & 1/2 & -1/2\\ 3/4 & -1/4 & -1/4\end{pmatrix}$. c) No tiene inversa.
30. $A=\begin{pmatrix}-12 & 5\\ 2 & 0\end{pmatrix}$.
31. $\lambda = \pm 3$.