3 Sistemas de ecuaciones

ACTIVIDADES INICIALES

3.I. Resuelve los siguientes sistemas de ecuaciones:

a) $\begin{cases} 2x+y=5 \\ 4x-2y=-2 \end{cases}$ **b)** $\begin{cases} 2x+y=0 \\ -6x-3y=0 \end{cases}$ **c)** $\begin{cases} 2x+y=5 \\ 4x+2y=7 \end{cases}$ **d)** $\begin{cases} 2x+y=0 \\ 5x-3y=0 \end{cases}$

a) $\begin{cases} 2x+y=5 \\ 4x-2y=-2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 4x+2y=10 \\ 4x-2y=-2 \end{cases} \Rightarrow 8x=8 \Rightarrow x=1,\ y=3$

b) $\begin{cases} 2x+y=0 \\ -6x-3y=0 \end{cases} \Rightarrow x=\lambda,\ y=-2\lambda$, ya que las dos ecuaciones son equivalentes.

c) $\begin{cases} 2x+y=5 \\ 4x+2y=7 \end{cases}$ es incompatible.

d) $\begin{cases} 2x+y=0 \\ 5x-3y=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 6x+3y=0 \\ 5x-3y=0 \end{cases} \Rightarrow x=0,\ y=0$

3.II. En cada caso, escribe un sistema de ecuaciones cuya solución sea la señalada.

a) $x=3,\ y=-2$ **b)** $\begin{cases} x=1+\lambda \\ y=-2-\lambda \end{cases}$ **c)** $x=-4,\ y=5$ **d)** $\begin{cases} x=4-3\lambda \\ y=-\lambda \end{cases}$

Respuesta abierta. Por ejemplo:

a) $\begin{cases} x+y=1 \\ x-y=5 \end{cases}$ b) $\begin{cases} x+y=-1 \\ 2x+2y=-2 \end{cases}$ c) $\begin{cases} x+y=1 \\ 2x+3y=7 \end{cases}$ d) $\begin{cases} x-3y=4 \\ 2x-6y=8 \end{cases}$

EJERCICIOS PROPUESTOS

3.1. Escribe los siguientes sistemas en notación matricial.

a) $\begin{cases} 3t-2r+5=0 \\ t+r-3=1 \end{cases}$ **b)** $\begin{cases} 2x-y+3z=-1 \\ 3y+2z=4 \\ -4x+5y=0 \end{cases}$

a) $\begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} t \\ r \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -5 \\ 4 \end{pmatrix}$ b) $\begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 0 & 3 & 2 \\ -4 & 5 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -1 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix}$

3.2. Escribe en notación ordinaria los sistemas de ecuaciones correspondientes a las siguientes ecuaciones matriciales.

a) $\begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 3 & 3 & -1 \\ 2 & -1 & 5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}$ **b)** $\begin{pmatrix} 3 & 0 & -2 \\ 1 & 1 & 4 \\ -1 & -3 & 2 \\ 0 & 2 & -5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

a) $\begin{cases} a-2b=2 \\ 3a+3b-c=0 \\ 2a-b+5c=-2 \end{cases}$ b) $\begin{cases} 3x-2z=3 \\ x+y+4z=2 \\ -x-3y+2z=1 \\ 2y-5z=0 \end{cases}$

3.3. Comprueba que los siguientes sistemas son equivalentes:

a) $\begin{cases} 2x - 4y = 5 \\ x + 3y = 7 \end{cases}$ b) $\begin{cases} 2x - 4y = 5 \\ x + 3y = 7 \\ 3x - y = 12 \end{cases}$

Basta observar en el segundo sistema que la tercera ecuación es suma de las otras dos.

3.4. Considera el siguiente sistema de ecuaciones: $\begin{cases} x + 2y = 3 \\ 4x - 3y = 1 \end{cases}$. Añade una ecuación a este sistema de manera que resulte un sistema equivalente.

Una ecuación posible puede ser la suma de las dos ecuaciones, es decir, $5x - y = 4$.

3.5. (PAU) Resuelve por el método de Gauss los siguientes sistemas:

a) $\begin{cases} x + 2y + z = 1 \\ 2x + y + 2z = 2 \\ x + y + z = 1 \end{cases}$ b) $\begin{cases} x + y + z = 3 \\ x + 2y + 3z = 6 \\ 2x + y = 2 \end{cases}$

a) $\begin{cases} x + 2y + z = 1 \\ 2x + y + 2z = 2 \\ x + y + z = 1 \end{cases} \xrightarrow[E_3 - E_1]{E_2 - 2E_1} \begin{cases} x + 2y + z = 1 \\ -3y = 0 \\ -y = 0 \end{cases} \to \begin{cases} x + 2y + z = 1 \\ y = 0 \end{cases} \to \begin{cases} x + z = 1 \\ y = 0 \end{cases} \to \begin{cases} x = 1 - z \\ y = 0 \end{cases}$

Si a z le damos el valor λ, entonces $x = 1 - \lambda$, e $y = 0$.

Por tanto, las soluciones son: $x = 1 - \lambda$, $y = 0$; $z = \lambda$.

b) $\begin{cases} x + y + z = 3 \\ x + 2y + 3z = 6 \\ 2x + y = 2 \end{cases} \xrightarrow[E_3 - 2E_1]{E_2 - E_1} \begin{cases} x + y + z = 3 \\ y + 2z = 3 \\ -y - 2z = -4 \end{cases} \xrightarrow{E_3 + E_2} \begin{cases} x + y + z = 3 \\ y + 2z = 3 \\ 0 = -1 \end{cases}$

El sistema es incompatible.

3.6. (PAU) Resuelve por el método de Gauss el siguiente sistema: $\begin{cases} x - y + z = 0 \\ x + 2y + 3z = 3 \\ 2x - y + 3z = 1 \\ 4x + 3y + 9z = 7 \end{cases}$

$\begin{cases} x - y + z = 0 \\ x + 2y + 3z = 3 \\ 2x - y + 3z = 1 \\ 4x + 3y + 9z = 7 \end{cases} \xrightarrow[\substack{E_3 - 2E_1 \\ E_4 - 4E_1}]{E_2 - E_1} \begin{cases} x - y + z = 0 \\ 3y + 2z = 3 \\ y + z = 1 \\ 7y + 5z = 7 \end{cases} \xrightarrow[E_4 - 7E_3]{E_2 - 3E_3} \begin{cases} x - y + z = 0 \\ -z = 0 \\ y + z = 1 \\ -2z = 0 \end{cases}$

De la segunda ecuación obtenemos que $z = 0$, y sustituyendo en las demás se obtiene que $y = 1$, $x = 1$.

3.7. Resuelve el siguiente sistema, utilizando el método de la matriz inversa: $\begin{cases} 2x - 4y = 5 \\ x + 3y = 7 \end{cases}$

$\begin{pmatrix} 2 & -4 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 7 \end{pmatrix} \Rightarrow AX = B \Rightarrow X = A^{-1}B$. $X = \begin{pmatrix} \frac{3}{10} & \frac{2}{5} \\ -\frac{1}{10} & \frac{1}{5} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 \\ 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{43}{10} \\ \frac{9}{10} \end{pmatrix}$

Por tanto, $x = \frac{43}{10}$; $y = \frac{9}{10}$

3.8. Utiliza el método de la matriz inversa para resolver, en caso de que sea posible, el siguiente sistema:

$$\begin{cases} 2x+3y=1 \\ 4x+6y=2 \end{cases}$$

$\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \Rightarrow AX = B$. Como $|A| = 0$, no existe matriz inversa, y no se puede resolver por este método.

$\begin{cases} 2x+3y=1 \\ 4x+6y=2 \end{cases} \Leftrightarrow 2x + 3y = 1 \Leftrightarrow 2x = 1 - 3y \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{1}{2}(1-3\lambda) \\ y = \lambda \end{cases}$. El sistema tiene infinitas soluciones.

3.9. (PAU) Resuelve, si es posible, por el método de la matriz inversa, el siguiente sistema:

$$\begin{cases} x+y+z=4 \\ 2x+3y-z=5 \\ 3x+4y-z=2 \end{cases}$$

$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & 3 & -1 \\ 3 & 4 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 2 \end{pmatrix} \Rightarrow AX = B \Rightarrow X = A^{-1}B \Rightarrow X = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 2 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -7 \\ 4 \\ -7 \end{pmatrix}$

Por tanto, $x = -7$; $y = 4$; $z = -7$.

3.10. Resuelve, si es posible, por el método de la matriz inversa, el sistema $\begin{cases} 2x+3y-5z=4 \\ x+y-z=1 \\ y-3z=2 \end{cases}$.

$\begin{pmatrix} 2 & 3 & -5 \\ 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$. Como $|A| = \begin{vmatrix} 2 & 3 & -5 \\ 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -3 \end{vmatrix} = 0$, no existe matriz inversa, y no se puede resolver por este método.

El sistema dado es equivalente al sistema que se obtiene al eliminar, por ejemplo, la primera ecuación:

$\begin{cases} x+y=1+z \\ y=2+3z \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=-1-2k \\ y=2+3k \\ z=k \end{cases}$

Por tanto, las soluciones son $x = -1-2k$; $y = 2 + 3k$; $z = k$.

3.11. Resuelve, por el método de Cramer, los siguientes sistemas:

a) $\begin{cases} 2x+3y=0 \\ x+2y=-1 \end{cases}$ **b)** $\begin{cases} 3x-y=4 \\ -2x+2y=3 \end{cases}$ **c)** $\begin{cases} -x+5y=4-2x \\ 5+y=x-2 \end{cases}$ **d)** $\begin{cases} 7x+y=-8 \\ 3y-2x=5 \end{cases}$

a) $\det(C1, C2) = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 4 - 3 = 1 \neq 0$; $x = \dfrac{\begin{vmatrix} 0 & 3 \\ -1 & 2 \end{vmatrix}}{1} = 3$; $y = \dfrac{\begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 1 & -1 \end{vmatrix}}{1} = -2$

b) $\det(C1, C2) = \begin{vmatrix} 3 & -1 \\ -2 & 2 \end{vmatrix} = 4 \neq 0$; $x = \dfrac{\begin{vmatrix} 4 & -1 \\ 3 & 2 \end{vmatrix}}{4} = \dfrac{11}{4}$; $y = \dfrac{\begin{vmatrix} 3 & 4 \\ -2 & 3 \end{vmatrix}}{4} = \dfrac{17}{4}$

c) $\det(C1, C2) = \begin{vmatrix} 1 & 5 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = 6 \neq 0$; $x = \dfrac{\begin{vmatrix} 4 & 5 \\ -7 & 1 \end{vmatrix}}{6} = \dfrac{13}{2}$; $y = \dfrac{\begin{vmatrix} 1 & 4 \\ -1 & -7 \end{vmatrix}}{6} = \dfrac{-1}{2}$

d) $\det(C1, C2) = \begin{vmatrix} 7 & 1 \\ -2 & 3 \end{vmatrix} = 23 \neq 0$; $x = \dfrac{\begin{vmatrix} -8 & 1 \\ 5 & 3 \end{vmatrix}}{23} = \dfrac{-29}{23}$; $y = \dfrac{\begin{vmatrix} 7 & -8 \\ -2 & 5 \end{vmatrix}}{23} = \dfrac{19}{23}$

3.12. (PAU) Averigua para qué valores del parámetro *b* el siguiente sistema es de Cramer.

$$\begin{cases} \mathbf{2x - by + 2z = -1} \\ \mathbf{2x + y = 3} \\ \mathbf{4x + 3b - 1 = 0} \end{cases}$$

El sistema es de Cramer para cualquier valor de *b*, ya que $\begin{vmatrix} 2 & -b & 2 \\ 2 & 1 & 0 \\ 4 & 0 & 0 \end{vmatrix} = -8 \neq 0$.

$$x = \frac{\begin{vmatrix} -1 & -b & 2 \\ 3 & 1 & 0 \\ 1-3b & 0 & 0 \end{vmatrix}}{-8} = \frac{1-3b}{4}, x = \frac{\begin{vmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 2 & 3 & 0 \\ 4 & 1-3b & 0 \end{vmatrix}}{-8} = \frac{3b+5}{2}, x = \frac{\begin{vmatrix} 2 & -b & -1 \\ 2 & 1 & 3 \\ 4 & 0 & 1-3b \end{vmatrix}}{-8} = \frac{3b^2+8b-3}{4}$$

3.13. Encuentra la solución a los siguientes sistemas, utilizando la regla de Cramer.

a) $\begin{cases} -x + y + z = 2 \\ x + 2y - z = 1 \\ 2x - y + z = 0 \end{cases}$ c) $\begin{cases} -x + y + z = 2 \\ 2x + 2y + z = -1 \\ 3x + 3y + z = 1 \end{cases}$ e) $\begin{cases} x + 2y - t = 0 \\ y + z + 2t = 0 \\ z + t = 1 \\ z - t = 1 \end{cases}$

b) $\begin{cases} 3x - 2y - 2z = 4 \\ -x + 4z = -1 \\ 2x - 5y - 6z = -7 \end{cases}$ d) $\begin{cases} 2x - y + 3z = 1 \\ 3x + 2y + z = 0 \\ 4x + y + 4z = 1 \end{cases}$ f) $\begin{cases} x + y = a \\ y + z = 1 + a \\ x + z = 1 - a \end{cases}$

a) $\begin{vmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & 1 \end{vmatrix} = -9$; $x = \frac{\begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{vmatrix}}{-9} = 0, y = \frac{\begin{vmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 2 & 0 & 1 \end{vmatrix}}{-9} = 1, z = \frac{\begin{vmatrix} -1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & -1 & 0 \end{vmatrix}}{-9} = 1$

b) $\begin{vmatrix} 3 & -2 & -2 \\ -1 & 0 & 4 \\ 2 & -5 & -6 \end{vmatrix} = 46$; $x = \frac{\begin{vmatrix} 4 & -2 & -2 \\ -1 & 0 & 4 \\ -7 & -5 & -6 \end{vmatrix}}{46} = 3, y = \frac{\begin{vmatrix} 3 & 4 & -2 \\ -1 & -1 & 4 \\ 2 & -7 & -6 \end{vmatrix}}{46} = 2, z = \frac{\begin{vmatrix} 3 & -2 & 4 \\ -1 & 0 & -1 \\ 2 & -5 & -7 \end{vmatrix}}{46} = \frac{1}{2}$

c) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \\ 3 & 3 & 1 \end{vmatrix} = 0$. No se puede utilizar la regla de Cramer. Como $\text{rg}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 & -1 \\ 3 & 3 & 1 & 1 \end{pmatrix} = 3$, el sistema es incompatible.

d) $\begin{vmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \\ 4 & 1 & 4 \end{vmatrix} = 7$; $x = \frac{\begin{vmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 0 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 4 \end{vmatrix}}{7} = 0, y = \frac{\begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 3 & 0 & 1 \\ 4 & 1 & 4 \end{vmatrix}}{7} = \frac{-1}{7}, z = \frac{\begin{vmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 3 & 2 & 0 \\ 4 & 1 & 1 \end{vmatrix}}{7} = \frac{2}{7}$

e) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{vmatrix} = -2$; $x = \frac{\begin{vmatrix} 0 & 2 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & -1 \end{vmatrix}}{-2} = 2, y = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \end{vmatrix}}{-2} = -1, z = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{vmatrix}}{-2} = 1, t = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{vmatrix}}{-2} = 0$

f) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 2$; $x = \frac{\begin{vmatrix} a & 1 & 0 \\ 1+a & 1 & 1 \\ 1-a & 0 & 1 \end{vmatrix}}{2} = \frac{-a}{2}, y = \frac{\begin{vmatrix} 1 & a & 0 \\ 0 & 1+a & 1 \\ 1 & 1-a & 1 \end{vmatrix}}{2} = \frac{3a}{2}, z = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & a \\ 0 & 1 & 1+a \\ 1 & 0 & 1-a \end{vmatrix}}{2} = 1 - \frac{a}{2}$

3.14. Estudia la compatibilidad y resuelve los siguientes sistemas de ecuaciones.

a) $\begin{cases} 3x + y - z = 5 \\ 2x - y + 2z = 0 \\ y + z = 3 \end{cases}$ **b)** $\begin{cases} x - 2y + z = 1 \\ 2x + 3y + z = 4 \\ 4x - y + 3z = 7 \end{cases}$

a) Formamos la matriz de coeficientes *M* y la matriz ampliada *M** y estudiamos sus rangos:

$M = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, $M^* = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -1 & 5 \\ 2 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$;

rg(*M*) = rg(*M**) = 3, ya que $\begin{vmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = -13 \neq 0$.

El sistema es compatible determinado.

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 5 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \\ 3 & 1 & 1 \end{vmatrix}}{-13} = \frac{12}{13}, y = \frac{\begin{vmatrix} 3 & 5 & -1 \\ 2 & 0 & 2 \\ 0 & 3 & 1 \end{vmatrix}}{-13} = \frac{34}{13}, z = \frac{\begin{vmatrix} 3 & 1 & 5 \\ 2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \end{vmatrix}}{-13} = \frac{5}{13}$$

b) $M = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \\ 4 & -1 & 3 \end{pmatrix}$, $M^* = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 1 & 4 \\ 4 & -1 & 3 & 7 \end{pmatrix}$;

rg(*M*) = 2, ya que $\begin{vmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \\ 4 & -1 & 3 \end{vmatrix} = 0$ y $\begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} \neq 0$; rg(*M**) = 3, ya que $\begin{vmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 2 & 3 & 4 \\ 4 & -1 & 7 \end{vmatrix} \neq 0$.

El sistema es incompatible.

3.15. (PAU) Resuelve el siguiente sistema de ecuaciones, estudiando previamente su compatibilidad.

$$\begin{cases} 3x - 2y + 4z = 8 \\ 2x + 3y - 3z = 4 \\ x - 3y - 5z = -6 \\ 4x + 4y + 6z = 18 \end{cases}$$

Formamos la matriz de coeficientes *M* y la matriz ampliada *M** y estudiamos sus rangos.

$M = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 4 \\ 2 & 3 & -3 \\ 1 & -3 & -5 \\ 4 & 4 & 6 \end{pmatrix}$, $M^* = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 4 & 8 \\ 2 & 3 & -3 & 4 \\ 1 & -3 & -5 & -6 \\ 4 & 4 & 6 & 18 \end{pmatrix}$;

rg(*M*) = 3, ya que $\begin{vmatrix} 3 & -2 & 4 \\ 2 & 3 & -3 \\ 1 & -3 & -5 \end{vmatrix} \neq 0$ y rg(*M**) = 3, ya que |*M**| = 0

Como rg(*M*) = rg(*M**) = número incógnitas, el sistema es compatible determinado y tiene solución única.

Por otra parte, podemos eliminar la cuarta ecuación por depender linealmente de las otras tres anteriores ya que |*M**| = 0, entonces el sistema dado es equivalente al sistema: $\begin{cases} 3x - 2y + 4z = 8 \\ 2x + 3y - 3z = 4 \\ x - 3y - 5z = -6 \end{cases}$

Resolviendo por Cramer: $x = 2$, $y = 1$, $z = 1$.

3.16. Resuelve el siguiente sistema: $\begin{cases} x-2y+z=0 \\ x+5y-3z=0 \\ 3x+y-z=0 \end{cases}$

Como $\begin{vmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 1 & 5 & -3 \\ 3 & 1 & -1 \end{vmatrix} = 0$ y $\begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 5 \end{vmatrix} \neq 0$, entonces rg(*M*) = 2, así que el sistema es compatible indeterminado.

Eliminamos la última ecuación y transformamos el sistema en el siguiente: $\begin{cases} x-2y=-z \\ x+5y=3z \end{cases}$.

Resolviendo por Cramer, obtenemos la solución: $x = \frac{1}{7}\lambda$; $y = \frac{4}{7}\lambda$; $z = \lambda$.

3.17. (PAU) Resuelve el siguiente sistema: $\begin{cases} x+3y-z+t=0 \\ x+y+z-2t=0 \\ x+z+t=0 \\ 2x-z+2t=0 \end{cases}$

Sea *M* la matriz de coeficientes. Calculamos su rango, hallando su determinante.

$$|M| = \begin{vmatrix} 1 & 3 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -2 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & -1 & 2 \end{vmatrix} \xrightarrow[F_1-3F_2]{} \begin{vmatrix} -2 & 0 & -4 & 7 \\ 1 & 1 & 1 & -2 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & -1 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -2 & -4 & 7 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 2 \end{vmatrix} = -27 \neq 0$$

Por tanto, rg(*M*) = 4 = número de incógnitas.

El sistema tiene solo la solución trivial $x = 0$; $y = 0$; $z = 0$; $t = 0$.

3.18. Estudia la posición relativa de los siguientes pares de rectas en el plano.

a) $\begin{cases} r:\ 2x+3y=7 \\ r':\ 4x-y=7 \end{cases}$

b) $\begin{cases} s:\ x+2y=1 \\ s':\ x+2y=5 \end{cases}$

c) $\begin{cases} t:\ x+2y=1 \\ t':\ 2x+4y=2 \end{cases}$

d) $\begin{cases} u:\ 7x+2y=7 \\ u':\ 3x-4y=3 \end{cases}$

Para cada sistema formamos las matrices de coeficientes *M* y ampliada *M** y estudiamos sus rangos:

a) rg(*M*) = 2; rg(*M**) = 2; el sistema es compatible determinado, las rectas son secantes, el punto de corte es la solución del sistema, $x = 2$; $y = 1$. Por tanto, el punto *P*(2, 1) es el único punto común a las dos rectas *r* y *r*'.

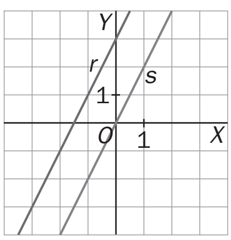
b) rg(*M*) = 1; rg(*M**) = 2; el sistema es incompatible, no tiene solución; por tanto, no existe ningún punto común a las rectas *s* y *s*'. En consecuencia, las rectas son paralelas.

c) rg(*M*) = 1; rg(*M**) = 1; el sistema es compatible indeterminado, tiene infinitas soluciones, es decir, infinitos puntos comunes, por tanto, las rectas *t* y *t*' son coincidentes.

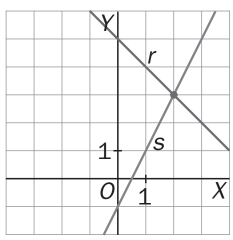
d) rg(*M*) = rg(*M**) = 2; el sistema es compatible determinado, las rectas son secantes, se cortan en *P*(1, 0).

3.19. Escribe los sistemas de ecuaciones correspondientes a las situaciones y las rectas representadas en las siguientes figuras:

a)



b)



a) $\begin{cases} 2x-y=0 \\ 2x-y=3 \end{cases}$

b) $\begin{cases} 2x-y=1 \\ x+y=5 \end{cases}$

3.20. (PAU) Dado el sistema de ecuaciones lineales $\begin{cases} x - ay = 2 \\ ax - y = a + 1 \end{cases}$

a) Discute el sistema según los valores de *a*.

b) Resuélvelo cuando la solución sea única.

a) $|M| = \begin{vmatrix} 1 & -a \\ a & -1 \end{vmatrix} = a^2 - 1 = 0 \Rightarrow a = 1$ ó $a = -1$

1.^{er} caso: $\forall\, a \in \mathbf{R} - \{1, -1\} \Rightarrow$ rg(M) = 2 = rg(M^*), el sistema es compatible determinado.

2.º caso: Para $a = 1 \Rightarrow$ rg(M) = 1 = rg(M^*), el sistema es compatible indeterminado.

3.^{er} caso: Para $a = -1 \Rightarrow$ rg(M) = 1 ≠ rg(M^*) = 2, el sistema es incompatible.

Para $a \in \mathbf{R} - \{1, -1\}$ resolvemos este sistema por Cramer: $x = \dfrac{a^2 - a - 2}{a^2 - 1} = \dfrac{a+2}{a+1}$; $y = \dfrac{-a+1}{a^2-1} = \dfrac{-1}{a+1}$

3.21. Considera el siguiente sistema de ecuaciones: $\begin{cases} x + 2y + 3z = 2 \\ 2x + 5y + 4z = -1 \\ x + 3y + a^2 z = 3a \end{cases}$**. Determina para qué valores del parámetro real *a* es compatible y resuélvelo cuando tenga más de una solución.**

$|M| = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 5 & 4 \\ 1 & 3 & a^2 \end{vmatrix} = a^2 - 1 \Rightarrow a = 1$ ó $a = -1$.

1.^{er} caso: $\forall\, a \in \mathbf{R} - \{1, -1\} \Rightarrow$ rg(M) = 3 = rg(M^*), el sistema es compatible determinado.

2.º caso: Para $a = 1 \Rightarrow$ rg(M) = 2 ≠ rg(M^*) = 3, el sistema es incompatible.

3.^{er} caso: Para $a = -1 \Rightarrow$ rg(M) = 2 = rg(M^*), el sistema es compatible indeterminado.

Resolvemos en el caso en que $a = -1$. Eliminando por ejemplo la segunda ecuación, obtenemos el sistema: $\begin{cases} x + 2y = 2 - 3z \\ x + 3y = -3 - z \end{cases}$. La solución es: $x = 12 - 7\lambda$; $y = -5 + 2\lambda$; $z = \lambda$.

3.22. Dado el siguiente sistema de ecuaciones: $\begin{cases} mx - y = 1 \\ x - my = 2m - 1 \end{cases}$

a) Discute el sistema, según los distintos valores del parámetro *m*.

b) Interprétalo geométricamente.

a) Sean $M = \begin{pmatrix} m & -1 \\ 1 & -m \end{pmatrix}$, $M^* = \begin{pmatrix} m & -1 & 1 \\ 1 & -m & 2m-1 \end{pmatrix}$; $\det(M) = 1 - m^2 = 0$ si $m = \pm 1$

Si m =1, rg(M) = 2 ≠ rg(M^*) = 3 =1 rg(M^*), el sistema es compatible indeterminado.

Si m =–1, rg(M) = 2 ≠ rg(M^*) = 3 =1< rg(M^*) =2, el sistema es incompatible.

Para cualquier otro valor, el sistema es compatible determinado.

b) Si $m \neq \{1, -1\}$: son dos rectas secantes.

Si m = 1: son dos rectas coincidentes.

Si m = –1: son dos rectas paralelas.

3.23. (PAU) Discute y resuelve según los distintos valores del parámetro *a*, el siguiente sistema.

$$\begin{cases} x + y + az = 1 \\ 2x + z = 2 \end{cases}$$

$\text{rg}\begin{pmatrix} 1 & 1 & a \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix} = 2 = \text{rg}\begin{pmatrix} 1 & 1 & a & 1 \\ 2 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$. El sistema es compatible indeterminado, para cualquier valor de a.

La solución es $x = \dfrac{2 - \lambda}{2}, y = \dfrac{\lambda(1 - 2a)}{2}, z = \lambda$

EJERCICIOS

Método de Gauss

3.24. Resuelve por el método de Gauss los siguientes sistemas.

a) $\begin{cases} x+2y+z=1 \\ 2x+y+2z=2 \\ x+y+z=1 \end{cases}$ **b)** $\begin{cases} x+2y+3z=1 \\ y+2z=0 \\ x+3y=1 \end{cases}$ **c)** $\begin{cases} x+y-z=1 \\ x-y+z=1 \\ -x+y+z=1 \end{cases}$ **d)** $\begin{cases} 3x-2y+4z=8 \\ 2x+3y-3z=4 \\ x-3y-5z=-6 \\ 4x+4y+6z=18 \end{cases}$

a) $\begin{cases} x+2y+z=1 \\ 2x+y+2z=2 \\ x+y+z=1 \end{cases} \xrightarrow[E_3-E_1]{E_2-2E_1} \begin{cases} x+2y+z=1 \\ -3y=0 \\ -y=0 \end{cases} \to \begin{cases} x+2y+z=1 \\ -y=0 \end{cases}$

Vemos que el número de ecuaciones no triviales es 2 y que el número de incógnitas es 3, por tanto, el sistema es compatible indeterminado.

Si a z le damos el valor λ, entonces $x = 1 - \lambda$, e $y = 0$. Por tanto, las soluciones son: $x = 1 - \lambda$; $y = 0$; $z = \lambda$.

b) $\begin{cases} x+2y+3z=1 \\ y+2z=0 \\ x+3y=1 \end{cases} \to \begin{cases} x+2y+3z=1 \\ y+2z=0 \\ y-3z=0 \end{cases} \to \begin{cases} x+2y+3z=1 \\ y+2z=0 \\ z=0 \end{cases}$

El sistema es compatible determinado. Solución: $x = 1$; $y = 0$; $z = 0$

c) $\begin{cases} x+y-z=1 \\ x-y+z=1 \\ -x+y+z=1 \end{cases} \to \begin{cases} x+y-z=1 \\ 2y-2z=0 \\ 2y=2 \end{cases}$

El sistema es compatible determinado. Solución: $x = 1$, $y = 1$, $z = 1$

d) $\begin{cases} 3x-2y+4z=8 \\ 2x+3y-3z=4 \\ x-3y-5z=-6 \\ 4x+4y+6z=18 \end{cases} \xrightarrow{F_1 \leftrightarrow F_3} \begin{cases} x-3y-5z=-6 \\ 2x+3y-3z=4 \\ 3x-2y+4z=8 \\ 4x+4y+6z=18 \end{cases} \xrightarrow[\substack{F_3-3F_1 \\ F_4-4F_1}]{F_2-2F_1} \begin{cases} x-3y-5z=-6 \\ 9y+7z=16 \\ 7y+19z=26 \\ 16y+26z=42 \end{cases} \xrightarrow[9F_3-7F_2]{F_4=F_2+F_3} \begin{cases} x-3y-5z=-6 \\ 9y+7z=16 \\ 122z=122 \end{cases}$

El sistema es compatible determinado. La solución es $x = 2$; $y = 1$; $z = 1$

3.25. (PAU) De los siguientes sistemas, analiza la compatibilidad y resuelve por el método de Gauss los que sean determinados:

a) $\begin{cases} 8x+y+4z=9 \\ 5x-2y+4z=6 \\ x+y=1 \end{cases}$ **b)** $\begin{cases} 6x-y+3z=6 \\ -6x+8y=-10 \\ 2x-5y-5z=4 \end{cases}$ **c)** $\begin{cases} x+y+z=1 \\ 3x-4y=5 \\ 7x-y-3z=8 \end{cases}$

a) $\begin{cases} 8x+y+4z=9 \\ 5x-2y+4z=6 \\ x+y=1 \end{cases} \to \begin{cases} 8x+y+4z=9 \\ 3x+3y=3 \\ x+y=1 \end{cases}$, restando $F_1 - F_2$.

Como la segunda ecuación y la tercera son equivalentes, el sistema es compatible indeterminado.

b) $\begin{cases} 6x-y+3z=6 \\ -6x+8y=-10 \\ 2x-5y-5z=4 \end{cases} \to \begin{cases} 6x-y+3z=6 \\ 7y+3z=-4 \\ 14y+18z=-6 \end{cases} \to \begin{cases} 6x-y+3z=6 \\ 7y+3z=-4 \\ 12z=2 \end{cases}$

El sistema es compatible determinado. La solución es $x = \frac{17}{21}, y = \frac{-9}{14}, z = \frac{1}{6}$.

c) $\begin{cases} x+y+z=1 \\ 3x-4y=5 \\ 7x-y-3z=8 \end{cases} \to \begin{cases} x+y+z=1 \\ 3x-4y=5 \\ 10x+2y=11 \end{cases} \to \begin{cases} x+y+z=1 \\ 3x-4y=5 \\ 23x=27 \end{cases}$

El sistema es compatible determinado. La solución es $x = \frac{27}{23}, y = \frac{-17}{46}, z = \frac{9}{46}$.

3.26. (PAU) Resuelve, por el método de Gauss, el siguiente sistema, dejando como parámetros libres las incógnitas de mayor subíndice.

$$\begin{cases} \mathbf{x_1 + x_2 - x_3 + x_4 - x_5 = 0} \\ \mathbf{x_1 + x_3 - x_5 = 0} \\ \mathbf{3x_1 + x_2 + x_4 - 2x_5 = 0} \\ \mathbf{-x_1 + x_2 - 2x_3 + x_4 = 0} \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 + x_4 - x_5 = 0 \\ x_1 + x_3 - x_5 = 0 \\ 3x_1 + x_2 + x_4 - 2x_5 = 0 \\ -x_1 + x_2 - 2x_3 + x_4 = 0 \end{cases} \to \begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 + x_4 - x_5 = 0 \\ x_2 - 2x_3 + x_4 = 0 \\ 2x_2 - 3x_3 + 2x_4 - x_5 = 0 \\ 2x_2 - 3x_3 + 2x_4 - x_5 = 0 \end{cases} \to \begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 + x_4 - x_5 = 0 \\ x_2 - 2x_3 + x_4 = 0 \\ -x_3 + x_5 = 0 \end{cases} \to x_3 = x_5,\ x_2 = 2x_5 - x_4,\ x_1 = 0$$

Solución: $x_1 = 0,\ x_2 = 2\mu - \lambda,\ x_3 = \mu,\ x_4 = \lambda,\ x_5 = \mu$

Método de la matriz inversa

3.27. (PAU) Resuelve por el método de la matriz inversa los siguientes sistemas:

a) $\begin{cases} \mathbf{2x - y = 4} \\ \mathbf{3x + 4y = 1} \end{cases}$ c) $\begin{cases} \mathbf{x + y + z = 0} \\ \mathbf{2x - y - 3z = 0} \\ \mathbf{x + y - z = 1} \end{cases}$ e) $\begin{cases} \mathbf{x - 2y - 3z = 1} \\ \mathbf{x - y + 2z = 0} \\ \mathbf{2x + y + z = 3} \end{cases}$

b) $\begin{cases} \mathbf{x - y + z = 1} \\ \mathbf{2x - 3y + 2z = 2} \\ \mathbf{x + y + z = 3} \end{cases}$ d) $\begin{cases} \mathbf{5x - 2y = 6} \\ \mathbf{x + y = 2} \end{cases}$ f) $\begin{cases} \mathbf{4x - 5y + 3z = 0} \\ \mathbf{x - y + z = 1} \\ \mathbf{x + y = 1} \end{cases}$

a) $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}; A^{-1} = \frac{1}{11}\begin{pmatrix} 4 & 1 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}$. $A\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = A^{-1}\begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{11}\begin{pmatrix} 4 & 1 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{17}{11} \\ \frac{-10}{11} \end{pmatrix}$

b) $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & -3 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$. La matriz $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & -3 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ no tiene inversa. Por tanto, el sistema no puede resolverse por este método.

Utilizando el método de Gauss: $\begin{cases} x + y + z = 0 \\ 2x - y - 3z = 0 \\ x + y - z = 1 \end{cases} \to \begin{cases} x + y + z = 0 \\ -y = 0 \\ 2y = 2 \end{cases}$. El sistema es incompatible.

c) $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & -3 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}; A^{-1} = \frac{1}{6}\begin{pmatrix} 4 & 2 & -2 \\ -1 & -2 & 5 \\ 3 & 0 & -3 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \frac{1}{6}\begin{pmatrix} 4 & 2 & -2 \\ -1 & -2 & 5 \\ 3 & 0 & -3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{-1}{3} \\ \frac{5}{6} \\ \frac{-1}{2} \end{pmatrix}$

d) $A = \begin{pmatrix} 5 & -2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}; A^{-1} = \frac{1}{7}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 5 \end{pmatrix}$. $A\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 2 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = A^{-1}\begin{pmatrix} 6 \\ 2 \end{pmatrix} = \frac{1}{7}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 6 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{10}{7} \\ \frac{4}{7} \end{pmatrix}$

e) $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & -3 \\ 1 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}; A^{-1} = \frac{1}{-18}\begin{pmatrix} -3 & -1 & -7 \\ 3 & 7 & -5 \\ 3 & -5 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \frac{1}{-18}\begin{pmatrix} -3 & -1 & -7 \\ 3 & 7 & -5 \\ 3 & -5 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{4}{3} \\ \frac{2}{3} \\ \frac{-1}{3} \end{pmatrix}$

f) $A = \begin{pmatrix} 4 & -5 & 3 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}; A^{-1} = \frac{1}{-3}\begin{pmatrix} -1 & 3 & -2 \\ 1 & 3 & -1 \\ 2 & 9 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \frac{1}{-3}\begin{pmatrix} -1 & 3 & -2 \\ 1 & 3 & -1 \\ 2 & 9 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{-1}{3} \\ \frac{4}{3} \\ \frac{8}{3} \end{pmatrix}$

3.28. (PAU) Resuelve los siguientes sistemas por el método de Cramer:

a) $\begin{cases} -x+y+z=3 \\ x-y+z=7 \\ x+y-z=1 \end{cases}$ f) $\begin{cases} x+4y-8z=-8 \\ 4x+8y-z=76 \\ 8x-y-4z=110 \end{cases}$

b) $\begin{cases} -x+y+z=11 \\ 2x-y+z=5 \\ 3x+2y+z=24 \end{cases}$ g) $\begin{cases} x+y+z=2 \\ 2x+3y+5z=11 \\ x-5y+6z=29 \end{cases}$

c) $\begin{cases} x+y+z=6 \\ x+z=4 \\ y+z=5 \end{cases}$ h) $\begin{cases} x+y=12 \\ y+z=11 \\ x+z=29 \end{cases}$

d) $\begin{cases} x-y+z=3 \\ 2y+3z=15 \\ 3x+y=12 \end{cases}$ i) $\begin{cases} 2x+y-z=15 \\ 5x-y+5z=16 \\ x+4y+z=20 \end{cases}$

e) $\begin{cases} x+2y-3z=-16 \\ 3x+y-2z=-10 \\ 2x-3y+z=-4 \end{cases}$ j) $\begin{cases} x+y-2z=9 \\ 2x-y+4z=4 \\ 2x-y+6z=-1 \end{cases}$

Resolvemos el primer sistema siguiendo todos los pasos. En los demás, por ser análogo el proceso, daremos únicamente la solución.

a) $\begin{vmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{vmatrix} = 4$; $x = \dfrac{\begin{vmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 7 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{vmatrix}}{4} = \dfrac{16}{4} = 4$; $y = \dfrac{\begin{vmatrix} -1 & 3 & 1 \\ 1 & 7 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{vmatrix}}{4} = \dfrac{8}{4} = 2$; $z = \dfrac{\begin{vmatrix} -1 & 1 & 3 \\ 1 & -1 & 7 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}}{4} = \dfrac{20}{4} = 5$

b) $x = 4$; $y = 5$, $z = 2$

c) $x = 1$; $y = 2$, $z = 3$

d) $x = 3$ $y = 3$, $z = 3$

e) $x = 1$; $y = 5$, $z = 9$

f) $x = 16$; $y = 2$, $z = 4$

g) $x = 1$; $y = -2$, $z = 3$

h) $x = 15$; $y = -3$, $z = 14$

i) $x = 5$; $y = 4$, $z = -1$

j) $x = 6$; $y = -2$, $z = -\dfrac{5}{2}$

Teorema de Rouché – Fröbenius

3.29. (PAU) Estudia la compatibilidad y el número de soluciones del siguiente sistema aplicando el teorema de Rouché.

$$\begin{cases} x+2y+z=1 \\ 2x+y+2z=2 \\ 3x+3y+3z=3 \end{cases}$$

La tercera ecuación se puede suprimir, ya que es la suma de las dos anteriores.

$M = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$, $M^* = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 2 & 2 \end{pmatrix}$. Como rg M = rg M^* = 2, el sistema es compatible indeterminado.

La solución es $x = 1 - t,\ y = 0,\ z = t$.

3.30. (PAU) Estudia la compatibilidad y el número de soluciones del siguiente sistema aplicando el teorema de Rouché.

$$\begin{cases} x+2y+z=1 \\ 2x+y+2z=2 \\ 3z+3y+3z=4 \end{cases}$$

La matriz de los coeficientes, M, y la ampliada, M^*, son:

$$M=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \\ 3 & 3 & 3 \end{pmatrix},\ M^*=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 2 & 2 \\ 3 & 3 & 3 & 4 \end{pmatrix}$$

rg(M) = 2, ya que la columna C_3 es igual que C_1 y las dos primeras columnas no son proporcionales.

rg(M^*) = 3, pues det (C_1, C_2, B) $\neq 0$

El sistema es incompatible, ya que rg (M) $\neq$ rg (M^*).

3.31. (PAU) Sean S y S' dos sistemas de ecuaciones lineales con la misma matriz de coeficientes. Se pide:

a) Justifica con un ejemplo que uno de los sistemas puede ser compatible y el otro incompatible.

b) Si ambos sistemas son compatibles, ¿puede ser uno determinado y el otro indeterminado? Razona tu respuesta.

a) $\begin{cases} x+2y+z=5 \\ x-y+z=1 \\ 2z+y+2z=6 \end{cases}$ es compatible indeterminado ya que $E_3 = E_1 + E_2$.

$\begin{cases} x+2y+z=5 \\ x-y+z=1 \\ 2z+y+2z=3 \end{cases}$ es incompatible y, en cambio, tiene la misma matriz de coeficiente.

b) Si un sistema es compatible determinado: rg(M) = rg(M^*) = n siendo M la matriz de los coeficientes, M^* la matriz ampliada y n el número de incógnitas; mientras que si es indeterminado: rg(M) = rg(M^*) < n.

Por tanto, como la matriz M es la misma para los dos sistemas, no es posible que uno sea determinado y otro indeterminado.

3.32. (PAU) Aplica el teorema de Rouché–Fröbenius para decir cómo es el siguiente sistema.

$$\begin{cases} ax+by+cz=a+b+c \\ bx+cy+az=a+b+c \\ cz+ay+bz=a+b+c \end{cases}$$

Hallamos el rango de la matriz ampliada M^*:

$$M^*=\begin{pmatrix} a & b & c & a+b+c \\ b & c & a & a+b+c \\ c & a & b & a+b+c \end{pmatrix} \xrightarrow{C_4-C_1-C_2-C_3} \begin{pmatrix} a & b & c & 0 \\ b & c & a & 0 \\ c & a & b & 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} a & b & c \\ b & c & a \\ c & a & b \end{pmatrix}$$

Se verifica que rg(M) = rg(M^*). Por tanto, el sistema es compatible.

Una solución evidente es $x = 1$, $y = 1$, $z = 1$.

Según como sean a, b y c, habrá más soluciones o no.

Si $|M| \neq 0$, esta es la única solución.

Si $|M| = 0$, habrá más soluciones distintas de la dada

3.33. Para cada uno de los siguientes sistemas:

I. $\begin{cases} x-3y+z=-1 \\ x+2y \quad =3 \end{cases}$ **II.** $\begin{cases} x+2z=-1 \\ 3x+z=4 \end{cases}$ **III.** $\begin{cases} -3x-y-2z=0 \\ 2y-z=-2 \end{cases}$ **IV.** $\begin{cases} 2x+y+z-t=1 \\ x-y+3t=2 \\ 3x-2y+5z=-1 \end{cases}$

a) Añade una ecuación de forma que el sistema resultante sea incompatible.

b) Añade una ecuación de forma que el sistema resultante sea compatible indeterminado.

a) Añadimos a cada sistema la ecuación resultante de la suma de las otras, sumando 1 al término independiente. Por ejemplo, en el primer sistema la suma de ambas ecuaciones sería $3x-2y+z=2$, por lo que la ecuación que añadiremos será $3x-2y+z=3$.

b) Añadimos a cada sistema la ecuación resultante de la suma de las otras.

Sistemas homogéneos

3.34. (PAU) Discute y resuelve el siguiente sistema: $\begin{cases} x-y+3z+14t=0 \\ 2x-2y+3z+t=0 \\ 3x-3y+5z+6t=0 \end{cases}$

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 & 14 & 0 \\ 2 & -2 & 3 & 1 & 0 \\ 3 & -3 & 5 & 6 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow[F_3-3F_1]{F_2-2F_1} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 & 14 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & -27 & 0 \\ 0 & 0 & -4 & -36 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow[-\frac{1}{4}F_3]{-\frac{1}{3}F_2} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 & 14 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 9 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 9 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{F_3-F_2} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 & 14 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 9 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

El sistema dado es equivalente a $\begin{cases} x-y+3z+14t=0 \\ z+9t=0 \end{cases}$. Sistema compatible indeterminado.

Haciendo $\begin{cases} t=\mu \\ y=\lambda \end{cases}$, se obtiene la solución $\begin{cases} x=\lambda+13\mu \\ y=\lambda \\ z=-9\mu \\ t=\mu \end{cases}$

3.35. (PAU) Discute y resuelve los siguientes sistemas:

a) $\begin{cases} 2x+3y+2z=z \\ 2x-y+4z=x \\ 4x+12y-5z=y \end{cases}$ **b)** $\begin{cases} x-y+z-t=0 \\ y+z=0 \\ 3x+t=0 \\ x+y+z=0 \end{cases}$

a) Operando en las ecuaciones, y colocando la segunda ecuación en primer lugar se obtiene el sistema:

$$\begin{cases} x-y+4z=0 \\ 2x+3y+z=0 \\ 4x+11y-5z=0 \end{cases}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 4 & 0 \\ 2 & 3 & 1 & 0 \\ 4 & 11 & -5 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{F_2-2F_1} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 4 & 0 \\ 0 & 5 & -7 & 0 \\ 4 & 11 & -5 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{F_3-4F_1} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 4 & 0 \\ 0 & 5 & -7 & 0 \\ 0 & 15 & -21 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{F_3-3F_2} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 4 & 0 \\ 0 & 5 & -7 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

El sistema es compatible indeterminado. Su solución es $x=-\dfrac{13\lambda}{5}$; $y=\dfrac{7\lambda}{5}$; $z=\lambda$.

b)

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow[F_4-F_1]{F_3-3F_1} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & -3 & 4 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow[F_4-2F_2]{F_3-3F_2} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -6 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 1 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{F_4-\frac{1}{3}F_3} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -6 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{-1}{3} & 0 \end{pmatrix}$$

rg (M) = 4 = número de incógnitas, luego el sistema lineal homogéneo no tiene más solución que la trivial: $x=0$; $y=0$; $z=0$; $t=0$.

Interpretación geométrica de sistemas de dos ecuaciones con dos incógnitas

3.36. (PAU) Estudia las posiciones relativas de los siguientes pares de rectas:

a) $\begin{cases} r:\ x-2y=4 \\ r':\ 2x-y=1 \end{cases}$

b) $\begin{cases} t:\ 2x-y=1 \\ t':\ 4x-2y=2 \end{cases}$

c) $\begin{cases} l:\ x-\dfrac{3}{2}y=4 \\ l':\ 2x-3y=4 \end{cases}$

d) $\begin{cases} n:\ y=x \\ n':\ y=-x \end{cases}$

e) $\begin{cases} s:\ x+5y=3 \\ s':\ x-3y=2 \end{cases}$

f) $\begin{cases} k:\ x-2y=2 \\ k':\ x-2y=6 \end{cases}$

g) $\begin{cases} m:\ 2x=5 \\ m':\ 3y=2 \end{cases}$

h) $\begin{cases} p:\ 6x-3y=4 \\ p':\ 3x-3y=4 \end{cases}$

Para cada sistema formamos las matrices de coeficientes *M* y ampliada *M**:

a) rg(*M*) = 2; rg(*M**) = 2, el sistema es compatible determinado, las rectas son secantes, el punto de corte es la solución del sistema, $x=\frac{-2}{3}, y=\frac{-7}{3}$.

b) rg(*M*) = 1; rg(*M**) = 1, el sistema es compatible indeterminado, las rectas son coincidentes.

c) rg(*M*) = 1; rg(*M**) = 2, el sistema es incompatible y las rectas son paralelas.

d) rg(*M*) = 2; rg(*M**) = 2, el sistema es compatible determinado, las rectas son secantes, el punto de corte es la solución del sistema, $x = 0$, $y = 0$.

e) rg(*M*) = 2; rg(*M**) = 2, el sistema es compatible determinado, las rectas son secantes, el punto de corte es la solución del sistema, $x=\frac{19}{8}, y=\frac{1}{8}$.

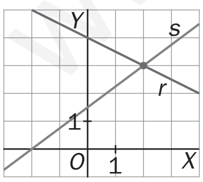
f) rg(*M*) = 1; rg(*M**) = 2, el sistema es incompatible y las rectas son paralelas.

g) rg(*M*) = 2; rg(*M**) = 2, el sistema es compatible determinado, las rectas son secantes, el punto de corte es la solución del sistema, $x=\frac{5}{2}, y=\frac{2}{3}$.

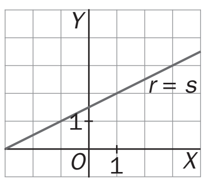
h) rg(*M*) = 2; rg(*M**) = 2, el sistema es compatible determinado, las rectas son secantes, el punto de corte es la solución del sistema, $x=0, y=\frac{-4}{3}$.

3.37. En cada caso, escribe un sistema de ecuaciones lineales que se corresponda con las situaciones descritas en las figuras.

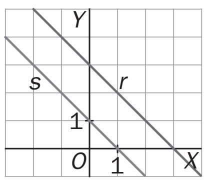
a)



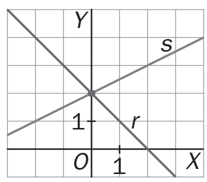
b)



c)



d)



a) $\begin{cases} 3x-4y=-6 \\ x+2y=8 \end{cases}$

b) $\begin{cases} 2x-4y=-6 \\ x-2y=-3 \end{cases}$

c) $\begin{cases} x+y-1 \\ x+y=3 \end{cases}$

d) $\begin{cases} x-2y=-4 \\ x+y=2 \end{cases}$

Sistemas que dependen de parámetros

3.38. (PAU) Discute y resuelve, según los valores del parámetro, los siguientes sistemas:

a) $\begin{cases} 2x - y = a \\ ax + 3y = 4 \\ 3x - y = 2 \end{cases}$ e) $\begin{cases} x + ay - z = 1 \\ 2x + y - az = 2 \\ x - y - z = a - 1 \end{cases}$ i) $\begin{cases} x + 2y + z = 2 \\ 2x - y + 3z = 2 \\ 5x - y + az = 6 \end{cases}$ m) $\begin{cases} ax + y - z = 0 \\ x + 2y + z = 0 \\ 3x + 10y + 4z = 0 \end{cases}$

b) $\begin{cases} a^2x + a^2y + az = 1 \\ x + a^2y + z = 0 \end{cases}$ f) $\begin{cases} x + \lambda y + z = 1 \\ 2x - y + \lambda z = 2 \\ x + y + \lambda z = 3 \end{cases}$ j) $\begin{cases} ax + y + z = a \\ x + ay + z = 1 \\ x + y + az = 1 \end{cases}$ n) $\begin{cases} -x + z = 2 \\ ax + y + 2z = 3 \\ 4x + ay - z = 1 \end{cases}$

c) $\begin{cases} x + 2y = 5 \\ 3x - ay = a \\ 5x + ay = 7 \end{cases}$ g) $\begin{cases} ax + y + z - 4 = 0 \\ x + y + z + 1 = 0 \\ x - ay + z - 1 = 0 \end{cases}$ k) $\begin{cases} ax + y + z = 1 \\ x + ay + z = a \\ x + y + az = a^2 \end{cases}$ ñ) $\begin{cases} 2x + 3y = 5 \\ x + 2y = 1 \\ ax + y = 3 \end{cases}$

d) $\begin{cases} a^2x + 3y + 2z = 0 \\ ax - y + z = 0 \\ 8x + y + 4z = 0 \end{cases}$ h) $\begin{cases} x + y - z = 1 \\ ax - y + z = a \\ x - ay + 3z = a \end{cases}$ l) $\begin{cases} x + \alpha y + z = \alpha + 2 \\ x + y + \alpha z = 3 \\ x + y + z = 3\alpha \end{cases}$ o) $\begin{cases} x + 3y - 3z = \lambda^2 \\ x - y + 5z = 1 \\ \lambda x - y - 4z = 2\lambda \end{cases}$

a) $M = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ a & 3 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$, $M^* = \begin{pmatrix} 2 & -1 & a \\ a & 3 & 4 \\ 3 & -1 & 2 \end{pmatrix}$; rg($M$) =2, rg($M^*$) =2 si $|M^*| = 0$, es decir, si $a = 1$ ó $a = -8$.

Si $a = 1$, la solución es $x = 1$, $y = 1$. Si $a = -8$, es $x = 10$, $y = 28$. Si $a \in \mathbf{R} - \{1, -8\}$, el sistema es incompatible.

b) $M = \begin{pmatrix} a^2 & a^2 & a \\ 1 & a^2 & 1 \end{pmatrix}$; $M^* = \begin{pmatrix} a^2 & a^2 & a & 1 \\ 1 & a^2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$. Para $a = 0$ ó para $a = 1$, rg(M) = 1. Para cualquier a, rg(M^*) = 2.

- $\forall\, a \in \mathbf{R} - \{0, 1\}$, rg($M$) = 2 = rg($M^*$). El sistema es compatible indeterminado. Aplicando la regla de Cramer, se obtiene: $x = \dfrac{a^2k(a-1)+1}{a(a-1)}$; $y = k$; $z = \dfrac{a^2k(a^2-1)+1}{a(1-a)}$.
- Si $a = 0$, $a = 1$, el sistema es incompatible.

c) $|M^*| = -a^2 + 43a - 42 = 0 \Rightarrow a = 1;\ a = 42$.

- $\forall\, a \in \mathbf{R} - \{1, 42\}$; $|M^*| \neq 0$, rg(M^*) = 3; como rg(M) = 2, el sistema es incompatible.
- Para $a = 1$, rg(M) = rg(M^*) = 2, el sistema es compatible determinado; y tiene solución única: $x = 1$, $y = 2$.
- Para $a = 42$, rg(M) = rg(M^*) = 2, el sistema es compatible determinado: $x = \dfrac{49}{8}.\ y = -\dfrac{9}{16}$.

d) $|M^*| = -5a^2 - 10a + 40 = -5(a-2)(a+4) = 0 \Rightarrow a = 2;\ a = -4$.

- $\forall\, a \in \mathbf{R} - \{2, -4\}$, rg($M$) = 3. El sistema únicamente tiene la solución trivial, $x = 0$; $y = 0$; $z = 0$
- Para $a = 2$, $\begin{cases} 4x + 3y + 2z = 0 \\ 2x - y + z = 0 \\ 8x + y + 4z = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} 4x + 3y = -2z \\ 2x - y = -z \end{cases} \rightarrow\ x = -\dfrac{k}{2},\ y = 0,\ z = k$
- Para $a = -4$, $\begin{cases} 16x + 3y + 2z = 0 \\ -4x - y + z = 0 \\ 8x + y + 4z = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} -4x - y = -z \\ 8x + y = -4z \end{cases} \rightarrow\ x = -\dfrac{5k}{4},\ y = 6k,\ z = k$

e) $|M| = -a^2 + a + 2$; $|M| = 0 \Leftrightarrow a = 2,\ a = -1$

- Si $a \neq 2$ y $a \neq -1$. En este caso, $|M| \neq 0$; rg(M) = 3 = rg(M^*). El sistema es compatible determinado.

Por Cramer se obtiene: $x = a$; $y = \dfrac{2-a}{a+1}$; $z = \dfrac{2a-1}{a+1}$.

- Si $a = -1$: rg(M) = 2 < rg(M^*) = 3. El sistema es incompatible.
- Si $a = 2$: rg(M) = rg(M^*) =2, el sistema es compatible indeterminado $\Rightarrow x = \lambda + 1,\ y = 0,\ z = \lambda$

f) $|M| = -(\lambda - 1)(\lambda + 3) = 0 \ \Rightarrow \lambda = 1, \lambda = -3$

- Si $\lambda \neq 1$ y $\lambda \neq -3$. Sistema compatible determinado: $x = -\dfrac{k^2 - 2k + 5}{k^2 + 2k - 3}$; $y = \dfrac{2(k-2)}{k^2 + 2k - 3}$; $z = \dfrac{2(2k+1)}{k^2 + 2k - 3}$
- Si $\lambda = 1$ ó $\lambda = -3 \Rightarrow$ rg(M) = 2; rg(M^*) = 3. Sistema incompatible.

g) $|M| = (a-1)(a+1) = 0 \Rightarrow a = 1$ ó $a = -1$.

• Si $a \neq 1$ y $a \neq -1$, rg(M) = 3 = rg(M^*). Sistema compatible determinado. $x = \frac{5}{a-1}$; $y = \frac{-2}{a+1}$; $z = \frac{-(a^2+3a+6)}{(a+1)(a-1)}$.

• Si $a = 1$ ó $a = -1$, rg(M) = 2 < rg(M^*) = 3. Sistema incompatible.

h) $|M| = (a+1)(a-3) = 0 \Rightarrow a = -1,\ a = 3$

• Si $a \neq -1$ y $a \neq 3$, rg(M) = 3 = rg(M^*). Sistema compatible determinado: $x = 1$; $y = \frac{1-a}{a-3}$; $z = \frac{1-a}{a-3}$.

• Si $a = -1$, el sistema es compatible indeterminado. $x = \lambda,\ y = \frac{1}{2} - \lambda,\ z = -\frac{1}{2}$

• Si $a = 3$, rg(M) = 2 < rg(M^*) = 3. Sistema incompatible

i) $|M| = 36 - 5a = 0 \Rightarrow a = \frac{36}{5}$

• Si $a \neq \frac{36}{5}$, rg(M) = 3 = rg(M^*). El sistema es compatible determinado: $x = \frac{2(3a-23)}{5a-36}$, $y = \frac{2a-14}{5a-36}$, $z = \frac{2}{5a-36}$

• Si $a = \frac{36}{5}$, rg(M) = 2 < rg(M^*) = 3. El sistema es incompatible.

j) $|M| = (a-1)^2(a+2) = 0 \Rightarrow a = 1,\ a = -2$

• Si $a \neq 1$ y $a \neq -2$, rg(M) = 3 = rg(M^*). Sistema compatible determinado. Solución $x = 1$; $y = 0$; $z = 0$.

• Si $a = 1$. Sistema compatible indeterminado, cuya solución es $x = \lambda, y = \mu, z = 1 - \lambda - \mu$

• Si $a = -2$. rg(M) = 2; rg(M^*) = 2. Sistema compatible indeterminado. $x = \lambda, y = -1+\lambda, z = -1+\lambda$

k) $|M| = (a-1)^2(a+2) = 0 \Rightarrow a = 1,\ a = -2$

• Si $a \neq 1$ y $a \neq -2$, rg(M) = 3 = rg(M^*). Sistema compatible determinado: $x = -\frac{a+1}{a+2}$; $y = \frac{1}{a+2}$; $z = \frac{(a+1)^2}{a+2}$

• Si $a = 1$. Sistema compatible indeterminado, cuya solución es $x = \lambda,\ y = \mu,\ z = 1 - \lambda - \mu$.

• Si $a = -2$. rg(M) = 2 < rg(M^*) = 3. Sistema incompatible.

l) $|M| = (\alpha - 1)^2 = 0 \Rightarrow \alpha = 1$.

• Si $\alpha \neq 1$, el sistema es compatible determinado. Por Cramer se obtiene $x = 3\alpha + 5$; $y = -2$; $z = -3$.

• Si $\alpha = 1$, es un sistema compatible indeterminado. Solución: $x = \lambda,\ y = \mu,\ z = 3 - \lambda - \mu$.

m) $|M| = -2a - 5 = 0 \Rightarrow a = -\frac{5}{2}$

• Si $a \neq -\frac{5}{2} \Rightarrow |M| \neq 0$. El sistema solo tiene la solución trivial: $x = 0$; $y = 0$; $z = 0$.

• Si $a = -\frac{5}{2}$, el sistema se reduce a $\begin{cases} x + 2y = -z \\ 3x + 10y = 4z \end{cases}$. Solución: $x = 2\lambda,\ y = \lambda,\ z = -4\lambda$

n) $|M| = a^2 + 2a - 3 = 0 \Rightarrow a = 1,\ a = -3$

• Si $a \in \mathbf{R} - \{1, -3\} \Rightarrow$ rg(M) = 3 = rg(M^*). Sistema compatible determinado: $x = \frac{-1}{a-1}$; $y = \frac{3}{a-1}$; $z = \frac{2a-3}{a-1}$.

• Si $a = 1 \Rightarrow$ rg(M) = 2; rg(M^*) = 3. Sistema incompatible.

• Si $a = -3 \Rightarrow$ rg(M) = 2; rg(M^*) = 2. Sistema compatible indeterminado: $x = \lambda - 2,\ y = \lambda - 3,\ z = \lambda$

ñ) El sistema solo tendrá solución si $|M^*| = 0 \Rightarrow a = \frac{6}{7}$, $x = 7$, $y = -3$.

o) $|M| = 12\lambda + 24$; $|M| = 0 \Rightarrow \lambda = -2$

• Si $\lambda \neq -2$, rg(M) = 3, rg(M^*) = 3. El sistema es compatible determinado.

$x = \frac{3\lambda^2 + 8\lambda + 5}{4(\lambda+2)}$; $y = \frac{5\lambda^3 + 4\lambda^2 - 13\lambda - 4}{12(\lambda+2)}$; $z = \frac{\lambda^3 - \lambda^2 - 5\lambda + 1}{12(\lambda+2)}$.

• Si $\lambda = -2 \Rightarrow$ rg(M) = 2; rg(M^*) = 3, el sistema es incompatible.

3.39. (PAU) Discute y resuelve, según los valores del parámetro, los siguientes sistemas:

a) $\begin{cases} 4x+12y+4z=0 \\ 2x-13y+2z=0 \\ (a+2)x-12y+12z=0 \end{cases}$

b) $\begin{cases} 2x+y-z=a-4 \\ (a-6)y+3z=0 \\ (a+1)x+2y=3 \end{cases}$

c) $\begin{cases} x-ay-z=0 \\ (2-2a)x+5y+z=0 \\ 4x+y=0 \end{cases}$

d) $\begin{cases} 2y+az=a \\ (a-2)x+y+3z=0 \\ (a-1)y=1-a \end{cases}$

e) $\begin{cases} x+y=1 \\ ay+z=0 \\ x+(a+1)y+az=a+1 \end{cases}$

a) Para que un sistema lineal homogéneo tenga soluciones distintas de la trivial tiene que ocurrir que rg(M) < 3

$|M| = 76\,(a-10) = 0$ si $a = 10$.

1.er caso: $\forall\, a \in \mathbf{R} - \{10\}$, $|M| \neq 0$, de donde rg(M) = 3; solo existe la solución trivial: $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$.

2.º caso: Si $a = 10$, $\begin{cases} 4x+12y+4z=0 \\ 2x-13y+2z=0 \\ 12x-12y+12z=0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x+3y+z=0 \\ 2x-13y+2z=0 \\ x-y+z=0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} 2x+2z=0 \\ x+z=0 \\ y=0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x=k \\ y=0 \\ z=-k \end{cases}$

El sistema es compatible indeterminado; existen infinitas soluciones que dependen de un parámetro.

b) $|M| = a^2 - 2a - 15 = (a-5)(a+3) = 0 \Rightarrow \quad a = 5;\ a = -3$.

1.er caso: $\forall\, a \in \mathbf{R} - \{-3, 5\}$, $|M| \neq 0 \Rightarrow$ rg(M) = 3 = rg(M^*). El sistema es compatible determinado, tiene solución única para cada valor de a. $\quad x = -\dfrac{3}{a+3};\quad y = \dfrac{3(a+2)}{a+3};\quad z = \dfrac{(6-a)(a+2)}{a+3}$

2.º caso: Para $a = -3$, rg(M) = 2 < rg(M^*)= 3, el sistema es incompatible.

3.er caso: Para $a = 5$, rg(M) = 2 = rg(M^*): $x = \dfrac{1-2\lambda}{2}$, $y = 3\lambda$, $z = \lambda$. El sistema es compatible indeterminado.

c) $|M| = 17 - 2a = 0 \Rightarrow \quad a = \dfrac{17}{2}$

1.er caso: $\forall\, a \in \mathbf{R} - \left\{\dfrac{17}{2}\right\} \Rightarrow |M| \neq 0 \Rightarrow$ rg(M) = 3. La solución es única, la trivial: $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$.

2.º caso: Para $a = \dfrac{17}{2}$, el sistema es compatible indeterminado: $x = k$, $y = -4k$, $z = 35k$.

d) $|M| = a(a-2)(a-1) = 0 \Rightarrow \quad a = 0;\ a = 1;\ a = 2$.

1.er caso: $\forall\, a \in \mathbf{R} - \{0, 1, 2\}$, $|M| \neq 0$ y rg(M) = 3 = rg(M^*). El sistema es compatible determinado; existe una única solución para cada valor del parámetro a. $\quad x = -\dfrac{2(a+3)}{a(a-2)}$; $y = -1$; $z = \dfrac{a+2}{a}$

2.º caso: Para $a = 0$ y $a = 2$, rg(M) = 2 < rg(M^*)= 3. El sistema es incompatible (no existe solución).

3.er caso: Para $a = 1$, rg(M) = rg(M^*)= 2. El sistema es compatible indeterminado: $x = k$, $y = -\dfrac{k-3}{5}$, $z = \dfrac{2k-1}{5}$

e) $|M| = a^2 - a = a(a-1) = 0 \quad \Rightarrow \quad a = 0;\ a = 1$.

1.er caso: $\forall\, a \in \mathbf{R} - \{0, 1\}$; $|M| \neq 0$, rg(M) = 3 = rg(M^*). El sistema es compatible determinado. Para cada valor de a existe una solución única: $x = \dfrac{a}{a-1}$; $y = -\dfrac{1}{a-1}$; $z = \dfrac{a}{a-1}$

2.º caso: Para $a = 0$, rg(M) = rg(M^*)= 2. El sistema es compatible indeterminado: $x = \lambda$, $y = 1-\lambda$, $z = 0$.

3.er caso: Para $a = 1$, rg(M) = 2 < rg(M^*)= 3. El sistema es incompatible (no existe solución).

3.40. (PAU) Discute y resuelve, según los valores del parámetro, los siguientes sistemas:

a) $\begin{cases} x-y=a \\ x+a^2z=2a+1 \\ x-y+\left(a^2-a\right)z=2a \end{cases}$

b) $\begin{cases} (m+1)x+y+z=3 \\ x+2y+mz=4 \\ x+my+2z=2 \end{cases}$

c) $\begin{cases} (a+1)x+y+z=0 \\ x+(a+1)y+z=0 \\ x+y+(a+1)z=0 \end{cases}$

d) $\begin{cases} ax+ay+(a-1)z=a-1 \\ ax-z=0 \\ ax-az=-a+1 \end{cases}$

e) $\begin{cases} x+2y+z=0 \\ y+2z+t=0 \\ 2x+2\lambda y-t=0 \end{cases}$

f) $\begin{cases} \lambda x+y+z=1 \\ 4x+\lambda y+2z=\lambda \\ 8x+4y+2\lambda z=2\lambda \end{cases}$

g) $\begin{cases} x+(t+1)y+tz=t+1 \\ x+(t+1)y+z=0 \\ x+y=1 \end{cases}$

h) $\begin{cases} (a+1)x+y+2z=-2 \\ 2x+y+(a+1)z=3 \\ x+(a+1)y+2z=-2 \end{cases}$

i) $\begin{cases} x+y+z=3 \\ 4x+mz=m^2+4 \\ mx-y-z=-2 \end{cases}$

j) $\begin{cases} (4-a)x-y=0 \\ 6x+(9-a)y=0 \\ y+(5-a)z=0 \end{cases}$

k) $\begin{cases} \lambda x+2y+z=1 \\ \left(1-\lambda^2\right)x-(1+\lambda)z=-1-\lambda \\ (2+\lambda)y=-1 \end{cases}$

l) $\begin{cases} (3+\lambda)x+4y+5z=4+\lambda \\ 2x+(1-\lambda)y=2 \\ 5x+(5-\lambda)y+5z=5 \end{cases}$

m) $\begin{cases} x+z=0 \\ x+my+2mz=0 \\ 2x+my+(2m+3)z=0 \end{cases}$

n) $\begin{cases} mx+y+(m+1)z=0 \\ my+(m+1)z=0 \\ x+2z=1 \end{cases}$

a) $|M| = a(a-1) = 0 \Rightarrow a = 0;\ a = 1$.

- $\forall\, a \in \mathbf{R} - \{0, 1\}$, rg($M$) = 3 = rg($M^*$). El sistema es compatible determinado: $x = \dfrac{a^2-a-1}{a-1}$; $y = \dfrac{-1}{a-1}$; $z = \dfrac{1}{a-1}$.
- Para $a = 0$, rg(M) = 2 = rg(M^*). El sistema es compatible indeterminado: $x = 1,\ y = 1,\ z = k$.
- Para $a = 1$, rg(M) = 2 < rg(M^*) = 3. El sistema es incompatible; no existe solución.

b) $|M| = -m(m-2)(m+3) = 0 \Rightarrow m = 0,\ m = 2,\ m = -3$

- Si $m = 0$: rg(M) = rg(M^*) = 2. Sistema compatible indeterminado: $x = 4-2\lambda,\ y = \lambda,\ z = -1+\lambda$
- Si $m = 2$: rg(M) = 2;rg(M^*) = 3. Sistema incompatible.
- Si $m = -3$. rg(M) = 2 < rg(M^*) = 3. Sistema incompatible.
- En el resto, rg(M) = 3 = rg(M^*). Sistema compatible determinado: $x = \dfrac{3}{m+3}$; $y = \dfrac{2m-9}{m^2+m-6}$; $z = \dfrac{4m-3}{m^2+m-6}$.

c) $|M| = a^2(a+3) = 0 \Rightarrow \quad a = 0,\ a = -3$

- Si $a = 0$, solo hay una ecuación libre: $x + y + z = 1$. Sistema compatible indeterminado: $x = \lambda,\ y = \mu,\ z = -\lambda-\mu$.
- Si $a = -3 \Rightarrow$ rg(M) = 2 = rg(M^*)$\Rightarrow$ Sistema compatible indeterminado: $x = y = z = \lambda$.
- Si $a \neq 0$ y $a \neq -3$, rg(M) = 3. Solo existe la solución trivial: $x = 0;\ y = 0; z = 0$.

d) $|M| = a^2(a-1) = 0 \Rightarrow a = 0,\ a = 1$

- Si $a = 0$, el sistema es incompatible.
- Si $a = 1$, es un sistema compatible indeterminado. Solución: $x = \lambda,\ y = -\lambda,\ z = \lambda$
- Si $a \neq 0$ y $a \neq 1$, rg(M) = 3 = rg(M^*). Sistema compatible determinado: $x = \dfrac{1}{a}$; $y = -\dfrac{1}{a}$; $z = 1$.

e) rg $M \geq 2$ (con independencia del valor de λ) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & -1 \end{vmatrix} = -2 + 2 = 0;\ \begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2\lambda & 0 & -1 \end{vmatrix} = -4 + 2\lambda + 1 = 2\lambda - 3$

- Si $\lambda \neq \dfrac{3}{2}$, rg ($M$) = 3. Sistema compatible indeterminado: $y = 0;\ z = -x;\ t = 2x$.
- Si $\lambda = \dfrac{3}{2} \Rightarrow$ rg(M) = 2. Compatible indeterminado: $x = 3a+2b,\ y = -2a-b,\ z = a,\ t = b$

f) $|M| = 2(\lambda - 2)^2 (\lambda + 4)$; $|M| = 0 \Rightarrow \lambda = 2, \lambda = -4$

• Si $\lambda \neq 2$ y $\lambda \neq -4$, rg(M) = 3, rg (M^*) = 3. Sistema compatible determinado: $x = -\frac{1}{\lambda+4}$; $y = \frac{\lambda+2}{\lambda+4}$; $z = \frac{\lambda+2}{\lambda+4}$.

• Si λ = 2. rg(M) = 1, rg (M^*)= 1. $x = \lambda$, $y = \mu$, $z = 1 - 2\lambda - \mu$

• Si λ = –4. rg(M) = 2; rg (M^*) = 3. Sistema incompatible.

g) $|M| = -t\,(t - 1)$; $|M| = 0 \Rightarrow$ $t = 0$, $t = 1$

• Si $t \neq 0$ y $t \neq 1$, rg(M) = 3, rg (M^*) = 3. Sistema compatible determinado: $x = \frac{t+1}{t-1}$; $y = -\frac{2}{t-1}$; $z = \frac{t+1}{t-1}$.

• Si t = 1: El sistema no tiene solución.

• Si t = 0: El sistema es compatible indeterminado: $x = \lambda, y = 1 - \lambda, z = -1$.

h) |M| = $a\,(a - 1)\,(a + 4)$; $|M| = 0 \Rightarrow a = 0$, $a = 1$, $a = -4$

• Si $a = 0$ $\Rightarrow$ rg(M) = 2, rg (M^*) = 2. Sistema compatible indeterminado: $x = 5 + \lambda$, $y = -7 - 3\lambda$, $z = \lambda$.

• Si $a = 1$ $\Rightarrow$ rg(M) = 2, rg (M^*) = 3. El sistema es incompatible.

• Si $a = -4$ $\Rightarrow$ rg(M) = 2; rg (M^*) = 2. Sistema compatible indeterminado: $x = \frac{\lambda}{5} + \frac{4}{5}$; $y = \frac{-7\lambda - 2}{5}$; $z = \lambda$

• Si $a \in \mathbf{R} - \{0, 1, -4\}$ $\Rightarrow$ rg(M) = 3 = rg (M^*). Sistema compatible determinado: $x = \frac{-2}{a-1}$; $y = \frac{-2}{a-1}$; $z = \frac{3}{a-1}$.

i) $|M| = m\,(m + 1)$; $|M| = 0 \Rightarrow m = 0$, $m = -1$

• Si $m = 0$ $\Rightarrow$ rg(M) = 2; rg M^* = 2. Sistema compatible indeterminado: $x = 1, y = \lambda, z = 2 - \lambda$

• Si $m = 1$ $\Rightarrow$ rg(M) = 2; rg M^* = 3. Sistema incompatible.

• Si $m \neq 0$ y $m \neq -1$ $\Rightarrow$ rg(M) = 3 = rg(M^*). Compatible determinado: $x = \frac{1}{m+1}$; $y = \frac{-m^2 + 2m - 2}{m+1}$; $z = \frac{m^2 + m + 4}{m+1}$

j) $|M| = -(a - 5)\,(a - 6)\,(a - 7)$ $|M| = 0 \Rightarrow a = 5$, $a = 6$, $a = 7$

• Si $a = 5$, rg(M) = 2, rg (M^*) = 2. Sistema compatible indeterminado: $x = 0$, $y = 0$, $z = \lambda$

• Si $a = 6$ $\Rightarrow$ rg(M) = 2, rg (M^*) = 2. Sistema compatible indeterminado: $x = -\lambda$, $y = 2\lambda$, $z = 2\lambda$

• Si $a = 7$ $\Rightarrow$ rg(M) = 2; rg (M^*) = 2. Sistema compatible indeterminado: $x = -2\lambda$, $y = 6\lambda$, $z = 3\lambda$

• Si $a \in \mathbf{R} - \{5, 6, 7\}$, rg($M$) = 3, rg ($M^*$) = 3. Sistema compatible determinado: $x = 0$; $y = 0$; $z = 0$.

k) $|M| = (\lambda + 2)\,(\lambda + 1)$; $|M| = 0 \Rightarrow \lambda = -1, \lambda = -2$

• Si $\lambda \neq -2$ y $\lambda \neq -1$, rg(M) = 3, rg (M^*) = 3. Sistema compatible determinado: $x = \frac{2}{\lambda+2}$; $y = -\frac{1}{\lambda+2}$; $z = \frac{-\lambda+4}{\lambda+2}$.

• Si λ = –2. rg(M) = 2; rg (M^*) = 3. Sistema incompatible.

• Si λ = –1. rg(M) = 2; rg (M^*) = 2. Sistema compatible indeterminado: $x = \lambda$, $y = -1$, $z = 3 + \lambda$

l) $|M| = 5\,(1 - \lambda)\,\lambda$; $|M| = 0 \Rightarrow \lambda = 0, \lambda = 1$

• Si $\lambda \neq 1$ y $\lambda \neq 0$, rg (M)= 3 = rg (M^*)= 3. Compatible determinado: $x = \frac{\lambda+1}{\lambda}$; $y = \frac{2}{\lambda(\lambda-1)}$; $z = -\frac{3\lambda+5}{5\lambda(\lambda-1)}$

• Si $\lambda = 0$ $\Rightarrow$ rg(M) = 2, rg (M^*)= 3. Sistema incompatible.

• Si $\lambda = 1$ $\Rightarrow$ rg(M) = 2; rg (M^*)= 3. Sistema incompatible.

m) $|\,M\,| = 2m = 0$ si $m = 0$

• Si $m \neq 0$ solo existe la solución trivial: $x = 0$; $y = 0$; $z = 0$.

• Si $m = 0$. rg(M) = 2; el sistema es compatible indeterminado: $\Rightarrow$ $x = 0$, $y = \lambda$, $z = 0$

n) $|M| = m^2 + 1$. Como $|M|$ no se anula para ningún valor de m, rg(M) = 3 = rg (M^*). El sistema es compatible determinado cualquiera que sea m: $x = -\frac{m^2-1}{m^2+1}$; $y = -\frac{m(m+1)}{m^2+1}$; $z = \frac{m^2}{m^2+1}$.

3.41. (PAU) Discute y resuelve, según los valores del parámetro, los siguientes sistemas:

a) $\begin{cases} ax - y + z = 2x \\ x + 2ay - az = y \\ x + ay - z = 0 \end{cases}$

b) $\begin{cases} \lambda = \lambda x + \lambda y \\ \lambda + 1 = (1 - \lambda) \\ \lambda - 1 = y + z \end{cases}$

c) $\begin{cases} (a-2)x + y - z = -1 \\ -ax + (2a-1)y + (-a+2)z = a \\ -x + ay + z = a \end{cases}$

d) $\begin{cases} x + \left(a^2 - 1\right)y + az = 1 \\ \left(a^2 - 1\right)y + (a-1)z = 0 \\ x + a^2 z = 0 \end{cases}$

a) $|M| = (a-1)^2(a-2)$; $|M| = 0 \Rightarrow a = 1$, $a = 2$

- Si $a = 1$: rg(M) = 1 = rg(M^*). Sistema compatible indeterminado: $x = \lambda, y = \mu, z = \lambda + \mu$
- Si $a = 2$: rg(M) = 2 = rg(M^*). Sistema compatible indeterminado: $x = -\lambda, y = \lambda, z = \lambda$
- Si $a \neq 1$ y $a \neq 2$, rg(M) = 3 = rg(M^*). El sistema es compatible determinado: x = 0; y = 0; z = 0.

b) $|M| = (\lambda - 1)\lambda$. $|M| = 0 \Rightarrow \lambda = 0, \lambda = 1$

- Si $\lambda = 0$. rg(M) = 2 = rg(M^*). Sistema compatible indeterminado: $x = \mu, y = -2, z = 1$
- Si $\lambda = 1$. rg(M) = 2 < rg(M^*) = 3. Sistema incompatible.
- Si $\lambda \neq 0$ y $\lambda \neq 1$, rg(M) = 3, rg(M^*) = 3. Compatible determinado: $x = -\dfrac{\lambda^2 - 2\lambda + 3}{\lambda - 1}$; $y = \dfrac{\lambda^2 - \lambda + 2}{\lambda - 1}$; $z = -\dfrac{\lambda + 1}{\lambda - 1}$.

c) $|M| = (a-1)^2(a+1)$; $|M| = 0 \Rightarrow a = 1, a = -1$

- Si $a = 1$. rg(M) = 2 = rg(M^*). Sistema compatible indeterminado: $x = \lambda, y = \lambda, z = 1$
- Si $a = -1$. rg(M) = 2 = rg(M^*). Sistema compatible indeterminado: $x = \dfrac{1}{2}, y = \lambda + \dfrac{1}{2}, z = \lambda$
- Si $a \neq 1$ y $a \neq -1$, rg(M) = 3 = rg(M^*). Compatible determinado: $x = -\dfrac{1}{a-1}$; $y = \dfrac{a-2}{a-1}$; $z = 1$.

d) $|M| = a^4 - 2a^2 + 1$; $|M| = 0 \Rightarrow a = \pm 1$

- Si $a = 1$. rg(M) = 1, rg(M^*) = 2. El sistema es incompatible.
- Si $a = -1$. rg(M) = 2; rg(M^*)= 3. El sistema es incompatible.
- Si $a \neq 1$ y $a \neq -1$, rg(M) = rg(M^*) = 3. El sistema es compatible determinado, tiene una única solución.

Por Cramer se obtiene: $x = \dfrac{a^2}{a^2 - 1}$; $y = \dfrac{1}{(a+1)(a^2-1)}$; $z = \dfrac{-1}{a^2 - 1}$.

3.42. (PAU) Discute y resuelve, según los valores del parámetro, los siguientes sistemas:

a) $\begin{cases} x-y+z=2 \\ 2x+y-z=4 \\ kx+y+3z=6 \\ x-2z=0 \end{cases}$ e) $\begin{cases} x+y+z=2 \\ x+2y-3z=8 \\ kx-y-z=1 \\ x-y+z=-2 \end{cases}$ h) $\begin{cases} x+y=0 \\ x+t=4 \\ y+z=1 \\ y+t=2 \\ z+t=k \end{cases}$

b) $\begin{cases} x-y+z=7 \\ 2x+my-4z=m \\ -x+y-z=1 \\ -x+y-z=3 \end{cases}$ f) $\begin{cases} x+2y+3z=1 \\ x+ky+3z=3 \\ y-z=0 \\ 3y-z=2 \end{cases}$ i) $\begin{cases} 2x-y-z=k \\ x+y+z=2 \\ 3x-2y-z=4 \\ x-y+2z=3 \end{cases}$

c) $\begin{cases} ax+z+t=1 \\ ay+z-t=1 \\ ay+z-2t=2 \\ az-t=0 \end{cases}$ g) $\begin{cases} \alpha x+y+z=\alpha^2 \\ x-y+z=1 \\ 3x-y-z=1 \\ 6x-y+z=3\alpha \end{cases}$ j) $\begin{cases} kx+ky-z=2 \\ 3x-ky=0 \\ 5x+ky=0 \\ x+2z=1 \end{cases}$

d) $\begin{cases} x+y+z=1 \\ 2x-y-z=2 \\ kx+y+3z=4 \\ kx+y-7z=3 \end{cases}$

a) $|M^*| = 12\,(1-k)$; $12\,(1-k) = 0 \Rightarrow k = 1$. Si $k \neq 1 \Rightarrow$ rg$(M) = 3$, rg $(M^*) = 4$. Sistema incompatible.
Si $k = 1 \Rightarrow$ rg$(M) = 3$, rg$(M^*) = 3$. Sistema compatible determinado: $x = 2$; $y = 1$; $z = 1$.

b) El sistema es incompatible, al serlo las dos últimas ecuaciones.

c) $\begin{pmatrix} a & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & a & 1 & -1 & 1 \\ 0 & a & 1 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & a & -1 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{F_3-F_2} \begin{pmatrix} a & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & a & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & a & -1 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{F_4-F_3} \begin{pmatrix} a & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & a & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & a & 0 & -1 \end{pmatrix}$

Si $a = 0$, el sistema es incompatible. Si $a \neq 0$, es compatible determinado: $x = \dfrac{2a+1}{a^2}$; $y = \dfrac{1}{a^2}$, $z = -\dfrac{1}{a}$; $t = -1$.

d) La solución del sistema formado por las 3 primeras ecuaciones es $x = 1$; $y = -\dfrac{1}{2}$; $z = \dfrac{1}{2}$.
El sistema será compatible determinado si $kx+y-7z=3 \Rightarrow k=7$, e incompatible en los demás casos.

e) $|M^*| = 16 - 8k$; $|M^*| = 0 \Rightarrow k = 2$
Si $k \neq 2$, rg$(M) = 3$, rg$(M^*) = 4$. Sistema incompatible. Si $k = 2$, es compatible determinado: $x = 1$; $y = 2$; $z = -1$.

f) La solución del sistema formado por las ecuaciones que no dependen de k es $x = -4$; $y = 1$; $z = 1$.
Si $x+ky+3z=3 \Rightarrow k=4$, el sistema es compatible determinado. En los demás casos, es incompatible.

g) $|M^*| = -4\,(\alpha-2)^2$; $|M^*| = 0 \Rightarrow \alpha = 2$. Si $\alpha \neq 2$, rg$(M) = 3$, rg$(M^*) = 4$. El sistema es incompatible.
Si $\alpha = 2$, rg$(M) = 3$, rg$(M^*) = 3$, el sistema es compatible determinado: $x = 1$; $y = 1$; $z = 1$.

h) La solución del sistema formado por las 4 primeras ecuaciones es $x = 1$; $y = -1$; $z = 2$; $t = 3$.
El sistema será compatible determinado si $k = z + t = 5$, e incompatible en los demás casos.

i) La solución del sistema formado por las 3 últimas ecuaciones es $x = \dfrac{19}{13}$; $y = \dfrac{-2}{13}$; $z = \dfrac{9}{13}$. El sistema será compatible determinado si $k = 2x - y - z = \dfrac{31}{13}$, e incompatible en los demás casos.

j) $|M^*| = -40k$; $|M^*| = 0 \Rightarrow k = 0$
Si $k \neq 0$, rg$(M) = 3$, rg$(M^*) = 4$. Sistema incompatible. Si $k = 0$, rg$(M) = 2$, rg$(M^*) = 3$. Sistema incompatible

3.43. (PAU) Discute y resuelve, según los valores del parámetro, los siguientes sistemas:

a) $\begin{cases} x+2z-3=0 \\ 3x+y+z+1=0 \\ 2y-z+2=0 \\ x-y+mz+5=0 \end{cases}$ b) $\begin{cases} x+y+2t=3 \\ 3x+y+z-t=1 \\ 5x-3y+2z-4t=\alpha \\ 2x+y+z+t=2 \end{cases}$

a) $|M^*| = -18\,(m+2)$; $|M^*| = 0 \Rightarrow m = -2$. Si $m \neq -2$, rg M = 3, rg M^* = 4. Sistema incompatible.
Si $m = -2$, rg M = 3, rg M^* = 3. Sistema compatible determinado: $x = -1$; $y = 0$; $z = 2$.
b) $|M|$=16 , rg M = 4 = rg M^*. El sistema es compatible determinado para cualquier valor de α.
La solución del sistema es: $x = \frac{\alpha+9}{8}$; $y = -\frac{\alpha+1}{4}$; $z = -\frac{\alpha+17}{16}$; $t = \frac{\alpha+17}{16}$.

3.44. (PAU) Discute y resuelve, según los valores de los parámetros, los siguientes sistemas:

a) $\begin{cases} 2x-\lambda y+\mu z=4 \\ x+z=2 \\ x+y+z=2 \end{cases}$ c) $\begin{cases} x+y+az=1 \\ x+y+bz=a \\ x+ay+z=1 \end{cases}$ e) $\begin{cases} ax+ay+az=0 \\ ax+by+bz=0 \\ ax+by+z=0 \end{cases}$

b) $\begin{cases} \lambda x+y+z=\mu \\ x+y+\lambda z=2 \\ 2x+y+\lambda z=\mu \end{cases}$ d) $\begin{cases} 3x-y+2z=1 \\ x+4y+z=b \\ 2x-5y+az=-2 \end{cases}$ f) $\begin{cases} x+y=1 \\ x+2y=a \\ x+3y=b \\ x+4y=2a \end{cases}$

a) $|M| = \mu - 2$; $|M| = 0 \Rightarrow \mu = 2$
- Si $\mu \neq 2$, rg (M) = 3, rg(M^*)= 3. Sistema compatible determinado: $x = 2$; $y = 0$; $z = 0$.
- Si $\mu = 2$, rg (M) = 2, y rg(M^*) = 2, el sistema es compatible indeterminado: $x = t$; $y = 0$; $z = 2 - t$.

b) $|M| = \lambda - 1 = 0 \Rightarrow \lambda = 1$. Por otro lado, $\begin{vmatrix} \lambda & 1 & \mu \\ 1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & \mu \end{vmatrix} = (\lambda-2)(\mu-2)$

- Si $\lambda \neq 1$, rg (M) = 3 = rg(M^*). Compatible determinado: $x = \mu - 2$; $y = \frac{\mu-2}{\lambda-1} - \lambda(\mu-2) + 2$; $z = \frac{(\lambda-2)(\mu-2)}{\lambda-1}$.
- Si $\lambda = 1$ y $\mu = 2$, rg (M) = 2; rg(M^*)= 2. Sistema compatible indeterminado: $x = 0$; $y = -t + 2$; $z = t$.
- Si $\lambda = 1$ y $\mu \neq 2$. rg (M) = 2; rg(M^*)= 3. Sistema incompatible.

c) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & a & 1 \\ 1 & 1 & b & a \\ 1 & a & 1 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[F_3-F_1]{F_2-F_1} \begin{pmatrix} 1 & 1 & a & 1 \\ 0 & 0 & b-a & a-1 \\ 0 & a-1 & 1-a & 0 \end{pmatrix}$ El sistema es incompatible si $b = a \neq 1$.

- Si $b = a = 1$, el sistema es compatible indeterminado: $x = \lambda,\ y = \mu,\ z = 1-\lambda-\mu$.
- Si $b \neq a = 1$, el sistema es compatible indeterminado: $x = \lambda,\ y = 1-\lambda,\ z = 0$.
- Si $b \neq a$ y $a \neq 1$, el sistema es compatible determinado: $x = 1 - \frac{a^2-1}{b-a}$, $y = \frac{a-1}{b-a}$, $z = \frac{a-1}{b-a}$.

d) $|M| = 13a - 13 = 0 \Rightarrow a = 1$. Si $a \neq 1$, $|M| \neq 0$. El sistema es compatible determinado:
$x = \frac{ab+4a-10b+23}{13(a-1)}$; $y = \frac{3ab-a-4b+4}{13(a-1)}$; $z = \frac{b-3}{a-1}$.

- Si $a = 1$, como $\begin{vmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 1 & 4 & b \\ 2 & -5 & -2 \end{vmatrix} = 13(b-3)$, si $b \neq 3$, rg (M) = 2; rg(M^*) = 3. Sistema incompatible.
- Si $a = 1$ y $b = 3$. rg(M) = 2; rg(M^*) = 2. El sistema es compatible indeterminado: $x = -5 + 9\lambda$; $y = \lambda$; $z = 8 - 13\lambda$.

e) $|M| = a\,(b-a)\,(1-b)$; $|M| = 0 \Rightarrow a = 0,\ a = b,\ b = 1$
- Si $a = 0$ y $b = 0$ ó $b = 1$, solo hay una ecuación válida. El sistema es compatible indeterminado biparamétrico.
- Si $a = 0$ y si $b \neq 0$ y $b \neq 1$, hay dos ecuaciones válidas. El sistema es compatible indeterminado uniparamétrico.
- Si $a = b = 1$, el sistema es compatible indeterminado biparamétrico.
- Si $a = b \neq 1$, el sistema es compatible indeterminado uniparamétrico.
- Si $b = 1$ y si $a \neq 0$. El sistema es compatible indeterminado uniparamétrico.
- Si $a \neq 0$, $b \neq 1$ y $a \neq b$ el sistema es compatible determinado y su solución es la trivial.

f) $\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & a \\ 1 & 3 & b \\ 1 & 4 & 2a \end{array}\right) \xrightarrow[\substack{F_3-F_1 \\ F_4-F_1}]{F_2-F_1} \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & a-1 \\ 0 & 2 & b-1 \\ 0 & 3 & 2a-1 \end{array}\right) \xrightarrow[F_3-3F_2]{F_3-2F_2} \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & a-1 \\ 0 & 0 & b-2a+1 \\ 0 & 0 & -a+2 \end{array}\right)$
Si $a = 2$ y $b = 3$, rg(M) = 2, rg(M^*)= 2, el sistema es compatible determinado. La solución es $x = 0$; $y = 1$.
En cualquier otro caso el sistema es incompatible.

3.45. (PAU) Discute y resuelve, según los valores de los parámetros, los siguientes sistemas:

a) $\begin{cases} \mathbf{2x - y - 2z = b} \\ \mathbf{x + y + z = 5} \\ \mathbf{4x - 5y + az = -10} \end{cases}$ c) $\begin{cases} \mathbf{x + (\lambda + 1)\,y + \mu z = \lambda} \\ \mathbf{\lambda y + \mu z = \lambda + \mu} \\ \mathbf{x + 2y + z = \mu} \end{cases}$

b) $\begin{cases} \mathbf{x + y = 3a + 3} \\ \mathbf{2x + y - z = 3a + 3b + 1} \\ \mathbf{x - 2y + z = -2a + 5b - 8} \end{cases}$

a) $\begin{pmatrix} 2 & -1 & -2 & b \\ 1 & 1 & 1 & 5 \\ 4 & -5 & a & -10 \end{pmatrix} \xrightarrow[F_3+5F_2]{F_1+F_2} \begin{pmatrix} 3 & 0 & -1 & b+5 \\ 1 & 1 & 1 & 5 \\ 9 & 0 & a+5 & 15 \end{pmatrix} \xrightarrow{F_3-3F_1} \begin{pmatrix} 3 & 0 & -1 & b+5 \\ 1 & 1 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & a+8 & -3b \end{pmatrix}$

- Si $a = -8$ y $b = 0$. Sistema compatible indeterminado: $x = \dfrac{5+\lambda}{3}$; $y = \dfrac{-2(2\lambda - 5)}{3}$; $z = \lambda$
- Si $a = -8$ y $b \neq 0$, rg(M) = 2, rg(M^*) = 3. Sistema incompatible.
- Si $a \neq -8$, rg(M) = 3, rg(M^*) = 3. Compatible determinado: $x = \dfrac{-b}{a+8} + \dfrac{b+5}{3}$; $y = \dfrac{4b}{a+8} + \dfrac{10-b}{3}$; $z = \dfrac{-3b}{a+8}$.

b) Como $|M| = 4 \neq 0$, el sistema es compatible determinado independientemente de los valores de a y b.
Las soluciones son $x = a + 2b - 1$; $y = 2a - 2b + 4$; $z = a - b + 1$.

c) $|M| = \lambda - \mu$; $|M| = 0 \Rightarrow \lambda = \mu$.
Veamos cuál es el rango de la matriz ampliada M^*, cuando $\lambda = \mu$. Para ello calculemos el determinante de la matriz formada por las columnas primera y tercera de M y la columna de los términos independientes:

$\begin{vmatrix} 1 & \lambda & \lambda \\ 0 & \lambda & 2\lambda \\ 1 & 1 & \lambda \end{vmatrix} = 2\lambda^2 - 2\lambda = 2\lambda(\lambda - 1)$, que se anula para $\lambda = 0$ y para $\lambda = 1$. Por tanto:

- Si $\lambda = 0$ ó $\lambda = \mu = 1$, rg(M) = 2; rg(M^*) = 2. El sistema es compatible indeterminado.
- Si $\lambda = \mu \neq 0$ y $\lambda = \mu \neq 1$, rg(M) = 2; rg(M^*) = 3. El sistema es incompatible.
- Si $\lambda \neq \mu$, rg(M) = 3; rg(M^*)= 3. Compatible determinado: $x = -\dfrac{\lambda\mu + \lambda + \mu - 3\mu^2}{\lambda - \mu}$; $y = \dfrac{\lambda + \mu - 2\mu^2}{\lambda - \mu}$; $z = \dfrac{2\lambda\mu - \lambda - \mu}{\lambda - \mu}$.

3.46. (PAU) Se considera el sistema de ecuaciones $\begin{cases} \mathbf{\lambda x + \mu y = 1} \\ \mathbf{\lambda y + \mu z = r} \\ \mathbf{\mu x + \lambda z = s} \end{cases}$ **donde λ, μ, r y s son números reales arbitrarios.**

Estudia el sistema, según los valores de los parámetros, sabiendo que $\lambda + \mu \neq 0$.

Se trata de un sistema de tres ecuaciones lineales con tres incógnitas que dependen de cuatro parámetros.
Formamos la matriz de coeficientes y la matriz ampliada: $M = \begin{pmatrix} \lambda & \mu & 0 \\ 0 & \lambda & \mu \\ \mu & 0 & \lambda \end{pmatrix}$ $M^* = \begin{pmatrix} \lambda & \mu & 0 & 1 \\ 0 & \lambda & \mu & r \\ \mu & 0 & \lambda & s \end{pmatrix}$

$|M| = \lambda^3 + \mu^3 = (\lambda + \mu)(\lambda^2 - \lambda\mu + \mu^2)$. Como $\lambda + \mu \neq 0$, se sigue que $\lambda^2 - \lambda\mu + \mu^2 = 0$.$\lambda = \dfrac{\mu \pm \mu\sqrt{-3}}{2}$

Por tanto, vemos que las raíces son complejas, luego no existe ningún valor real de λ o μ que haga $|M| = 0$.

rg(M) = 3 y rg(M^*) = 3 cualesquiera que sean r y s y, en consecuencia, el sistema es compatible determinado y tiene solución única independientemente del valor de los parámetros λ, μ, r y s.

Podemos obtener la solución por Cramer: $x = \dfrac{\lambda^2 - \lambda\mu r + \mu^2 s}{\lambda^3 + \mu^3}$, $y = \dfrac{\lambda^2 r - \lambda\mu s + \mu^2}{\lambda^3 + \mu^3}$, $z = \dfrac{\lambda^2 s - \lambda\mu + \mu^2 r}{\lambda^3 + \mu^3}$

3.47. (PAU) Consideremos los sistemas de ecuaciones lineales

$$\begin{cases} 2x + y - (3+2\lambda)z = 0 \\ x - y + (3-\lambda)z = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} x + (1+\mu)z = 0 \\ (\mu-1)x + y + \mu(\mu-1)z = 0 \end{cases}$$

Obtén los conjuntos de soluciones de ambos sistemas y calcula los valores de λ y μ que hacen que los sistemas sean equivalentes, es decir, con las mismas soluciones.

Resolvemos el primer sistema:

$$\begin{cases} 2x + y = (3+2\lambda)z \\ x - y = (\lambda-3)z \end{cases} \Rightarrow 3x = 3\lambda z \Rightarrow x = \lambda z,\ y = (3+2\lambda)z - 2\lambda z = 3z$$

Resolvemos el segundo sistema:

$$\begin{cases} x = -(1+\mu)z \\ (\mu-1)x + y = -\mu(\mu-1)z \end{cases} \Rightarrow -(\mu-1)(1+\mu)z + y = -\mu(\mu-1)z \Rightarrow y = (\mu-1)z,\ x = -(1+\mu)z$$

Hacemos coincidir ambas soluciones: $\begin{cases} -(1+\mu) = \lambda \\ \mu - 1 = 3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \lambda = -5 \\ \mu = 4 \end{cases}$

Se obtiene como solución común para los sistemas dados: $x = -5k, y = 3k, z = k$.

3.48. (PAU) Considera el siguiente sistema de ecuaciones lineales (en él, *a*, *b*, *c* son datos; las incógnitas son *x*, *y*, *z*):

$$\begin{cases} ay + bx = c \\ cx + az = b \\ bz + cy = a \end{cases}$$

Si *a, b* y *c* son no nulos, el sistema tiene solución única. Halla dicha solución.

$\begin{vmatrix} b & a & 0 \\ c & 0 & a \\ 0 & c & b \end{vmatrix} = -2abc \neq 0$. Se puede resolver el sistema usando la regla de Cramer:

$$x = \frac{\begin{vmatrix} c & a & 0 \\ b & 0 & a \\ a & c & b \end{vmatrix}}{-2abc} = \frac{-a^2 + b^2 + c^2}{2bc},\quad y = \frac{a^2 - b^2 + c^2}{2ac},\ z = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab}$$

PROBLEMAS

3.49. (PAU) Juan y Pedro invierten 20 000 € cada uno. Juan coloca una cantidad *A* al 4% de interés, una cantidad *B* al 5% y el resto al 6%. Pedro invierte la misma cantidad *A* al 5%, la *B* al 6% y el resto al 4%. Determina la cantidad *B*, sabiendo que Juan obtiene unos intereses de 1050 € y Pedro de 950 €.

$$,\begin{cases} A + B + C = 20\,000 \\ \dfrac{4A}{100} + \dfrac{5B}{100} + \dfrac{6C}{100} = 1050 \\ \dfrac{5A}{100} + \dfrac{6B}{100} + \dfrac{4C}{100} = 950 \end{cases} \text{ equivalente a } \begin{cases} A + B + C = 20\,000 \\ 4A + 5B + 6C = 105\,000 \\ 5A + 6B + 4C = 95\,000 \end{cases}$$

Solución: 5000 € cantidad A, 5000 € cantidad B, 10 000 € cantidad *C*.

3.50. (PAU) Una tienda vende una clase de calcetines a 12 € el par. Al llegar las rebajas, durante el primer mes realiza un 30% de descuento sobre el precio inicial y en el segundo mes un 40% también sobre el precio inicial. Sabiendo que vende un total de 600 pares de calcetines por 5976 € y que en las rebajas ha vendido la mitad de dicho total, ¿a cuántos pares de calcetines se les ha aplicado el descuento del 40%?

Llamamos *x*, *y*, *z*, al número de pares de calcetines que se han vendido sin descuento, con un 30% y un 40% de descuento, respectivamente. A partir de los datos del enunciado se obtiene el siguiente sistema:

$$\begin{cases} x + y + z = 600 \\ y + z = 300 \\ 12x + 0{,}7\cdot 12y + 0{,}6\cdot 12z = 5976 \end{cases}$$, de donde: $x = 300$; $y = 180$; $z = 120$.

Se han vendido 300 pares de calcetines sin rebaja, y 180 y 120 pares de calcetines con rebajas de un 30% y un 40% respectivamente.

3.51. (PAU) Un número capicúa de cinco cifras verifica:

a) La suma de sus cifras es 9.

b) La cifra de las centenas es igual a la suma de la de las unidades y de la de las decenas.

c) Si se intercambian las cifras de las unidades y de las decenas, el número resultante disminuye en 9.

Encuentra el número.

Tomamos el número capicúa *xyzyx* donde *x*, *y*, *z* son sus cifras. Del enunciado se deduce el siguiente sistema:

$$\begin{cases} x+y+z+y+x=9 \\ x+y-z=0 \\ 10^4x+10^3y+10^2z+10y+x=10^4x+10^3y+10^2z+10x+y+9 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} 2x+2y+z=9 \\ x+y-z=0 \\ x-y=-1 \end{cases}$$

Por Cramer, se obtiene: $x = 1$; $y = 2$; $z = 3$. El número pedido es 12 321.

3.52. (PAU) Roberto quiere hacer una gran fiesta e invitar a sus amigos a unas tortillas, así que va a la tienda y compra una docena de huevos, una bolsa de patatas y una botella de aceite. Dado el éxito obtenido, decide repetir la fiesta, y vuelve a comprar una docena de huevos, y dos botellas de aceite. Cuando llega a casa se acuerda de que no tiene patatas, vuelve a la tienda para comprar una bolsa de patatas y decide comprar también otra docena de huevos. En la primera ocasión se gastó 6 €; en la segunda ocasión se gastó 6,50 € y en la última 3,5 €. Calcula, si es posible, el precio de los huevos, de las patatas y del aceite.

Si llamamos *x*, *y*, *z* al precio de una docena de huevos, una bolsa de patatas y una botella de aceite, respectivamente, resulta el siguiente sistema de tres ecuaciones:

$$\begin{cases} x+y+z=6 \\ x+2z=6,50 \\ x+y=3,50 \end{cases} \quad x = 1,50;\ y = 2;\ z = 2,50.$$

Por tanto, una docena de huevos cuesta 1,50 €, una bolsa de patatas 2 € y una botella de aceite 2,50 €

3.53. (PAU) En un supermercado se ofrecen dos lotes formados por distintas cantidades de los mismos productos:

- **El primer lote está compuesto por una botella de refresco, tres bolsas de cacahuetes y siete vasos, y su precio es de 5,65 €.**
- **El segundo lote está compuesto por una botella de refresco, cuatro bolsas de cacahuetes y diez vasos, y su precio es de 7,40 €.**

Con estos datos, ¿podrías averiguar cuánto debería valer un lote formado por una botella de refresco, una bolsa de cacahuetes y un vaso? Justifica la respuesta.

Si llamamos *x*, *y*, *z* al precio en euros de la botella de refresco, de la bolsa de cacahuetes y del vaso, respectivamente, tenemos: $\begin{cases} x+3y+7z=5,65 \\ x+4y+10z=7,40 \end{cases}$

El sistema es compatible uniparamétrico; hallamos la solución: $x = 0;4 - \lambda$; $y = 1,75$; $z = \lambda$.

Entonces: $x + y + z = 0; 4 - \lambda + 1,75 + \lambda = 2,15$ €.

Luego el lote formado por una botella de refresco, una bolsa de cacahuetes y un vaso valdrá 2,15 €

3.54. (PAU) Un grupo de personas se reúne para ir de excursión, juntándose un total de 20 entre hombres, mujeres y niños. Contando hombres y mujeres juntos, su número resulta ser el triple del número de niños. Además, si hubiera acudido una mujer más, su número se igualaría al de hombres.

a) Plantea un sistema para averiguar cuántos hombres, mujeres y niños han ido de excursión.

b) Resuelve el problema.

Sean *x*, *y*, *z* el número de hombres, mujeres y niños, respectivamente. Del enunciado se deduce:

$$\begin{cases} x+y+z=20 \\ x+y=3z \\ x=y+1 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x+y+z=20 \\ x+y-3z=0 \\ x-y=1 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x=8 \\ y=7 \\ z=5 \end{cases}$$

Por tanto, en la excursión hay: 8 hombres, 7 mujeres y 5 niños.

3.55. (PAU) Si la altura de Carlos aumentase el triple de la diferencia entre las alturas de Toni y de Abel, Carlos sería igual de alto que Abel. Las alturas de los tres suman 515 cm. Ocho veces la altura de Toni es lo mismo que nueve veces la de Carlos. Halla las tres alturas.

Supongamos que las alturas de Carlos, Toni y Abel son x, y, z, respectivamente. Del enunciado se deduce:

$$\begin{cases} x+3(y-z)=z \\ x+y+z=515 \\ 8y=9x \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x+3y-4z=0 \\ x+y+z=515 \\ -9x+8y=0 \end{cases} \rightarrow x = 160 \text{ cm};\ y = 180 \text{ cm};\ z = 175 \text{ cm.}$$

3.56. (PAU) Calcula las edades actuales de una madre y sus dos hijos sabiendo que hace 14 años la edad de la madre era 5 veces la suma de las edades de los hijos, pero que dentro de 10 años la edad de la madre será la suma de las edades que los hijos tengan en ese momento, teniendo en cuenta que cuando el hijo mayor tenga la edad actual de la madre, el hijo menor tendrá 42 años.

Del enunciado se deduce:

$$\begin{cases} x-14=5(y-14+z-14) \\ x+10=y+10+z+10 \\ z+x-y=42 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x-5y-5y=-126 \\ x-y-z=10 \\ x-y+z=42 \end{cases} \quad x = 44;\ y = 18;\ z = 16.$$

La madre tiene actualmente 44 años, el hijo mayor 18 años y el hijo menor 16 años.

3.57. (PAU) Un pescadero compra el martes de una semana 96 kg de merluza y 130 kg de anchoas y paga por ello un total de 1836 €. El lunes siguiente, el precio de la merluza ha subido un 20% y el de las anchoas un 30%. Ese día compra 40 kg de merluza y 50 kg de anchoas, y paga un total de 918 €.

¿Hay datos suficientes para calcular el precio de la merluza y las anchoas el martes? Si la contestación es afirmativa calcula dichos precios, si es negativa razona por qué no se puede hacer dicho cálculo.

Martes: merluza = x € ; anchoas = y €

Lunes: merluza = 1,20x €; anchoas = 1,30y €

Del enunciado se deduce el sistema: $\begin{cases} 96x+130y=1836 \\ 40\cdot 1{,}20x+50\cdot 1{,}30y=918 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} 96x+130y=1836 \\ 48x+65y=918 \end{cases}$

La primera ecuación es el doble de la segunda. El sistema es compatible indeterminado, no se pueden hallar los precios pedidos.

3.58. Un supermercado hace el mismo pedido a tres proveedores diferentes *A*, *B* y *C*. El pedido consiste en diferentes cantidades de leche, aceite y vino, expresadas en litros. Cada proveedor marca para cada producto los precios recogidos en la siguiente tabla (expresados en € por litro):

Proveedor	Leche	Aceite	Vino
A	0,8	4	3
B	1,2	4	2,5
C	1,2	4	3

El pedido que envía el proveedor *A* cuesta 2000 €, el que recibe de *B* cuesta 60 € más que el anterior y, por último, el que recibe de *C* le supone 60 € más que el de *B*.

a) Formula el problema y determina la composición del pedido.

b) El sistema de ecuaciones obtenido, ¿de qué tipo es?

a) Sean x, y, z los litros de leche, aceite y vino que pide a cada proveedor. $\begin{cases} 0{,}8x+4y+3z=2000 \\ 1{,}2x+4y+2{,}5z=2060 \\ 1{,}2x+4y+3z=2120 \end{cases}$

b) El sistema es compatible determinado. La solución es x = 300, y = 350, z = 120.

3.59. (PAU) Luis, Marta y Óscar son tres amigos. Luis le dice a Marta: Si yo te doy la tercera parte del dinero que tengo, los tres tendremos la misma cantidad. Calcula lo que tiene cada uno de ellos sabiendo que entre los tres reúnen 60 €.

Sean x, y, z las cantidades de dinero que tienen Luis, Juan y Óscar, respectivamente.

Del enunciado se deduce: $\begin{cases} x+y+z=60 \\ \dfrac{2}{3}x=y+\dfrac{1}{3}x=z \end{cases}$ $x = 30;\ y = 10;\ z = 20.$

Por tanto, Luis tiene 30 €, Marta 10 € y Óscar 20 €.

3.60. Halla un número de 3* cifras que verifique las siguientes condiciones:

- **La suma de sus cifras es 8*.**
- **La cifra de las centenas es igual a la suma de la cifra de las unidades y la de las decenas.**
- **Si se intercambian las cifras de las unidades y de las decenas, el número resultante disminuye en 18.**

Si las cifras son x, y, z, el sistema que se obtiene es $\begin{cases} x+y+z=8 \\ x=y+z \\ 100x+10y+z=100x+10z+y+18 \end{cases}$

La solución es el número 431.

(* Estos datos han sido cambiados respecto del enunciado original.)

3.61. El sistema $\begin{cases} x+y+z=0 \\ x-y+z=1 \\ x+y-z=0 \end{cases}$ es compatible determinado.

a) Si se suprime una de las ecuaciones, ¿cómo es el sistema resultante? ¿Depende la respuesta de cuál sea la ecuación suprimida?

b) Si se añade al sistema una nueva ecuación, ¿puede el sistema resultante ser compatible determinado? ¿Y compatible indeterminado? ¿Puede ser incompatible? Pon un ejemplo de cada uno de los casos posibles.

a) El sistema resultante será compatible indeterminado, independientemente de qué ecuación se suprima.

b) Será compatible indeterminado si se añade una combinación de las ecuaciones del sistema, como $2x + 2z = 1$, suma de las dos primeras.

No se puede obtener un sistema compatible indeterminado, ya que el rango de la matriz de coeficientes seguirá siendo igual al número de incógnitas.

Se obtiene un sistema incompatible añadiendo, por ejemplo, $x+y+z = 1$, incompatible con la primera ecuación.

3.62. Se tienen tres lingotes, *A*, *B* y *C*, con la siguiente composición:

***A*: 20 g de oro, 30 g de plata y 40 g de cobre.**

***B*: 30 g de oro, 40 g de plata y 50 g de cobre.**

***C*: 40 g de oro, 50 g de plata y 90 g de cobre.**

¿Qué peso habrá que tomar de cada uno de estos lingotes si se quiere fabricar un nuevo lingote que tenga 34 g de oro, 46 g de plata y 65* de cobre?

Sean x, y, z los gramos que se toman de cada lingote. $\begin{cases} \frac{2}{9}x+\frac{3}{12}y+\frac{4}{18}z=34 \\ \frac{3}{9}x+\frac{4}{12}y+\frac{5}{18}z=46 \\ \frac{4}{9}x+\frac{5}{12}y+\frac{9}{18}z=65 \end{cases}$, $x = 39$, $y = 64$, $z = 42$

(* Este dato ha sido cambiado respecto del enunciado original.)

3.63. En una bodega han preparado 10 l de mezcla de vino y gaseosa. Al probarla, el bodeguero comprueba que lleva demasiado vino, por lo que decide añadir una cierta cantidad de gaseosa extra. Tras añadirla, la cantidad de gaseosa en la mezcla es igual al 30% del total. Como aún sigue estando demasiado fuerte, vuelve a añadir la misma cantidad de gaseosa que antes, con lo que consigue que el vino suponga el 60% de la mezcla.

¿Cuántos litros de gaseosa se añaden en cada ocasión?

¿Cuántos litros de vino hay en la mezcla?

Llamaremos x a los litros de vino, y a los litros de gaseosa que había al principio y z a la gaseosa añadida en cada ocasión.

$$\begin{cases} x+y=10 \\ y+z=0{,}3(x+y+z) \\ x=0{,}6(x+y+2z) \end{cases} \rightarrow x=8{,}4;\ y=1{,}6;\ z=2 .$$

Inicialmente había 8,4 l de vino y 1,6 l de gaseosa, y en cada ocasión se añaden 2 l de gaseosa.

PROFUNDIZACIÓN

3.64. (PAU) Considera las matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 2 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 9 \end{pmatrix}$, $C_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ \alpha \end{pmatrix}$, $C_2 = \begin{pmatrix} -6 \\ -11 \\ \beta \end{pmatrix}$, $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$

a) Determina el valor o valores de α para los que el sistema $AX = C_1$ es incompatible.

b) Determina el valor o valores de β para los que el sistema $AX = C_2$ es compatible y, para cada uno de estos valores, resuelve dicho sistema.

c) Para $\alpha = 3$ y $\beta = -13$, estudia el sistema $AX = C_1 + C_2$. Si es posible, resuélvelo, y si no es posible, indica por qué.

a) $|A| = -18$. El sistema es compatible determinado para cualquier valor del parámetro.

b) $x = \dfrac{-b-43}{6}, y = \dfrac{5b+47}{18}, z = \dfrac{b+13}{18}$

c) $x = \dfrac{-25}{6}, y = \dfrac{-13}{18}, z = \dfrac{1}{18}$

3.65. (PAU) Se considera el sistema de ecuaciones $\begin{pmatrix} 1 & \alpha \\ \beta & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1-\beta \\ \alpha \end{pmatrix}$

a) Calcula los valores de α y β sabiendo que el punto *P* (2, –1) satisface la primera ecuación y el punto *Q* (2, 0) satisface la segunda.

b) ¿Es compatible determinado el sistema que resulta al sustituir los valores de α y β calculados? Justifica la respuesta.

a) $\begin{pmatrix} 1 & \alpha \\ \beta & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1-\beta \\ \alpha \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x+\alpha y = 1-\beta \\ \beta x + y = \alpha \end{cases}$

Por satisfacer el punto *P*(2, –1), la primera ecuación se verifica: $2 - \alpha = 1 - \beta$.

Por satisfacer el punto *Q*(2, 0), la segunda ecuación se verifica: $2\beta = \alpha$.

Resolviendo el sistema $\begin{cases} 2-\alpha = 1-\beta \\ 2\beta = \alpha \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \alpha = 2 \\ \beta = 1 \end{cases}$

b) El sistema resultante es: $\begin{cases} x+2y = 0 \\ x+y = 2 \end{cases}$ que es compatible determinado.

Su solución es: $x = 4$, $y = -2$.

3.66. PAU Sea el sistema de ecuaciones $\begin{cases} x\cos a + y \operatorname{sen} a = 1 \\ x \operatorname{sen} a - y\cos a = 1 \end{cases}$

a) Resuélvelo determinando *x* e *y* en función de *a*.

b) Calcula *a* para que *x* + *y* = 1.

a) $\begin{cases} x\cos a + y \operatorname{sen} a = 1 \\ x \operatorname{sen} a - y\cos a = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x\cos^2 a + y \operatorname{sen} a \cos a = \cos a \\ x \operatorname{sen}^2 a - y \cos a \operatorname{sen} a = \operatorname{sen} a \end{cases}$

Sumando miembro a miembro, se obtiene: $x(\operatorname{sen}^2 a + \cos^2 a) = \operatorname{sen} a + \cos a$.

$x = \operatorname{sen} a + \cos a$, $\quad y = \operatorname{sen} a - \cos a$

b) $x + y = 1$; $\operatorname{sen} a + \cos a + \operatorname{sen} a - \cos a = 1$

$2 \operatorname{sen} a = 1 \Rightarrow \operatorname{sen} a = \dfrac{1}{2} \Rightarrow \begin{cases} a = \dfrac{\pi}{6} + 2k\pi \\ a = \dfrac{5\pi}{6} + 2k\pi \end{cases}$ $k = 0, 1, 2 \ldots$

3.67. Se sabe que existen números *x* e *y* que verifican el sistema: $\begin{cases} (m^2-1)\,x+3my=0 \\ (2mn-1)\,x+2ny=0 \\ x+y^2=1 \end{cases}$

¿Qué relación existe entre los parámetros *m* y *n*?

El sistema no es lineal debido a la tercera ecuación, que es cuadrática. Además, la última ecuación no puede verificar la solución x = 0; y = 0, que sí satisfacen las ecuaciones primera y segunda.

$\begin{vmatrix} m^2-1 & 3m \\ 2mn-1 & 2n \end{vmatrix} = -4m^2 n - 2n + 3m$

Dado que el sistema tiene solución, $-4m^2 n - 2n + 3m = 0$, o lo que es lo mismo, $n = \dfrac{3m}{4m^2+2}$.

3.68. Se considera el sistema de ecuaciones: $\begin{cases} ax+by+2cz=a+b \\ bx-cz=b \\ ay-cz=a \end{cases}$ **, donde *a*, *b,* y *c* son números reales arbitrarios. Demuestra que el sistema es compatible determinado si y solo si *c* = 0 y *a* = −*b,* y resuélvelo.**

Como $|M| = c(a+b)^2 = 0 \Leftrightarrow c = 0$ ó $a = -b$, el sistema será compatible determinado si y solo si no se verifican estas dos condiciones. La solución del sistema la obtenemos mediante la regla de Cramer: x =1; y =1; z =0.

3.69. (PAU) Tres amigos acuerdan jugar tres partidas de dados de forma que cuando uno pierda una partida entregará a cada uno de los otros dos una cantidad igual a la que cada uno de ellos posea en ese momento. Cada uno perdió una partida y al final cada uno tenía 24 €. ¿Cuánto dinero tenía cada jugador al comenzar el juego?

Sean x, y, z las cantidades del primero, segundo y tercer jugador, respectivamente, al principio del juego. Es evidente que se juegan tres partidas, ya que cada uno pierde una.

Supongamos que la primera partida la pierde el primer jugador; el saldo de cada uno en ese instante será:

1.º: $x-y-z$ 2.º: $2y$ 3.º: $2z$

Supongamos que la segunda partida la pierde el segundo jugador; el saldo de cada uno en ese instante será:

1.º: $2(x-y-z)$ 2.º: $2y-(x-y-z)-2z = 3y-x-z$ 3.º: $4z$

Supongamos que la tercera partida la pierde el tercer jugador; el saldo de cada uno en ese instante será:

1.º: $4(x-y-z)$ 2.º: $2(3y-x-z)$ 3.º: $4z-2(x-y-z)-(3y-x-z)$.

Como todos terminan con la misma cantidad de dinero, 24 €, se tienen las siguientes ecuaciones:

$\begin{cases} 4(x-y-z)=24 \\ 2(3y-x-z)=24 \\ -x-y+7z=24 \end{cases}$, equivalente a: $\begin{cases} x-y-z=6 \\ -x+3y-z=12 \\ -x-y+7z=24 \end{cases}$

Resolviendo: x = 39; y = 21; z = 12. Los tres amigos tenían 39 €, 21 € y 12 € antes de la partida.

3.70. (PAU) Dado el sistema $\begin{cases} x-1=4a+b \\ y-2=3a-b \\ z=-a+2b \end{cases}$ **elimina los parámetros *a* y *b*.**

(Eliminar parámetros en un sistema es encontrar un sistema equivalente en el que no aparecen dichos parámetros y en el que sus ecuaciones se expresen solo en función de las incógnitas)

Eliminamos el parámetro b.

Sumando E_1 y E_2, se tiene: $x + y - 3 = 7a$.

Sumando $E_3 + 2E_2$, se tiene: $2y + z - 4 = 5a$

Ahora eliminamos el parámetro a haciendo $5E_1 - 7E_2$:

$5x + 5y - 15 = 35a$

$-14y - 7z + 28 = -35a$

$5x - 9y - 7z + 13 = 0$

con lo que los parámetros a y b quedan eliminados.

3.71. Elimina los parámetros *a* y *b* en el siguiente sistema: $\begin{cases} \boldsymbol{x+y=3a+3} \\ \boldsymbol{2x+y-z=3a+3b+1} \\ \boldsymbol{x-2y+z=-2a+5b-8} \end{cases}$

Estudiamos el determinante de la matriz de los coeficientes: $|M|= \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & -1 \\ 1 & -2 & 1 \end{vmatrix} \neq 0$

Entonces el sistema tiene solución única cualquiera que sean los valores de *a* y *b*.

Eliminamos los parámetros *a* y *b*; primero eliminamos el parámetro *b* entre las ecuaciones segunda y tercera.

$$\begin{cases} 2x+y-z=3a+3b+1 \\ x-2y+z=-2a+5b-8 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} 10x+5y-5z=15a+15b+5 \\ 3x-6y+3z=-6a+15b-24 \end{cases}$$

Restando miembro a miembro, se obtiene:$7x + 11y - 8z = 21a + 29$.

Ahora eliminamos el parámetro *a* entre la primera ecuación y la que acabamos de obtener:

$$\begin{cases} x+y=3a+a \\ 7x+11y-8z=21a+29 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} 7x+7y=21a+21 \\ 7x+11y-8z=21a+29 \end{cases}$$

Restando miembro a miembro, se obtiene: $4y - 8z = 8$

Y simplificando, resulta: $y - 2z = 2$.

3.72. Se sabe que en el plano, la ecuación de una recta viene dada por una expresión del tipo *ax* + *by* + *c* = 0. De forma análoga, en el espacio tridimensional, una ecuación de la forma *ax* + *by* + *cz* + *d* = 0 representa un plano. Con esta información, determina la ecuación del plano que pasa por los puntos *A* (–1, 3, 2), *B* (0, 4, 3) y *C* (1, 0, –1), (Los números en cada paréntesis representan, respectivamente, las coordenadas *x, y* y *z* del punto.

Sustituyendo las coordenadas de cada punto, se obtiene el sistema $\begin{cases} -a+3b+2c+d=0 \\ 4b+3c+d=0 \\ a-c+d=0 \end{cases} \Rightarrow a=0,\ b=-d,\ c=d$

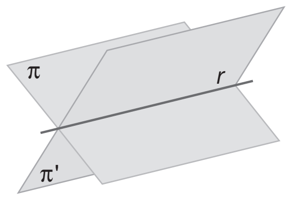
La ecuación del plano es $\pi: -y+z+1=0$

3.73. En el espacio, la ecuación de un plano viene dada por la expresión *x* – 3*y* + *z* + 3 = 0. Demuestra que esta ecuación equivale a un sistema compatible indeterminado y biparamétrico (con dos grados de libertad) y encuentra la solución de dicho sistema.

La solución es $x=3a-b-3,\ y=a,\ z=b$

3.75. Una recta en el espacio tridimensional se puede definir como el lugar geométrico de los puntos de intersección de dos planos, tal y como se ilustra en la figura.

De esta forma se observa que, en tres dimensiones, son necesarias dos ecuaciones independientes para determinar una recta.



Encuentra las ecuaciones paramétricas de la recta definida por la intersección de los planos:

π: *x* + *y* – *z* – 3 = 0, π': 2*x* + 3*z* + 1 = 0

(Indicación: resuelve el sistema indeterminado que forman las ecuaciones de los dos planos).

$$\begin{cases} x+y-z-3=0 \\ 2x \quad +3z+1=0 \end{cases} \Rightarrow z=\lambda,\ x=\frac{-1-3\lambda}{2}, y=\frac{5\lambda+7}{2} \Rightarrow \begin{cases} x=\frac{-1}{2}-\frac{3}{2}\lambda \\ y=\frac{7}{2}+\frac{5}{2}\lambda \\ z=\lambda \end{cases}$$

RELACIONA Y CONTESTA

Elige la única respuesta correcta en cada caso:

3.1. La solución del sistema $\begin{cases} 2x+y-3z=-5 \\ x+y+z=6 \\ 2x-z=-1 \end{cases}$ **es:**

A) $x = 2$; $y = 1$; $z = 3$

B) $x = 1$; $y = 2$; $z = 3$

C) $x = 3$; $y = 1$; $z = 2$

D) $x = -3$; $y = 1$; $z = 2$

E) Ninguna de las anteriores

B) El sistema es compatible determinado, la solución es $x = 1$; $y = 2$; $z = 3$

3.2. Halla un número de tres cifras, tal que la suma de sus cifras sea 9, la cifra de las decenas sea la media aritmética de las otras dos cifras, y que si se invierte el orden de las cifras, la diferencia entre el número obtenido y el inicial sea 396.

A) 432 **B) 126** **C) 234** **D) 531** **E) 630**

D) El sistema correspondiente es $\begin{cases} x+y+z=9 \\ y=2(x+z) \\ 100z+10y+x-(100x-10y+z)=396 \end{cases}$ $x = 5$, $y = 3$, $z = 1$

3.3. El sistema de ecuaciones $\begin{cases} ax+y=1 \\ x+2y=5 \\ -3x+2y=2 \end{cases}$

A) Tiene solución única si $a = \frac{2}{3}$

B) Tiene infinitas soluciones para $a = -\frac{2}{3}$

C) Tiene solución única si $a = -\frac{3}{2}$

D) Tiene solución única para cualquier valor de *a*.

E) Ninguna de las anteriores.

C) La solución del sistema formado por las dos últimas ecuaciones es $x=\frac{3}{4}$, $y=\frac{17}{8}$. Para que el sistema tenga solución, *a* debe valer $-\frac{3}{2}$.

3.4. Dadas las rectas r y s de ecuaciones $\begin{cases} r: ax + 2y = 3 \\ s: x + by = 5 \end{cases}$**:**

A) Si *a*, *b* = 2, *r* y *s* son paralelas.

B) Son secantes para cualquier valor de *a* y *b*.

C) Si *a*, *b* $\neq$ **2, *r* y *s* son secantes.**

D) No existe ningún valor de *a* y *b* para que *r* y *s* sean coincidentes.

E) Ninguna de las anteriores.

C) $\begin{vmatrix} a & 2 \\ 1 & b \end{vmatrix} = ab - 2 = 0$ solo si *ab* =2. En los demás casos, la solución es única, las rectas son secantes.

3.5. Un sistema de tres ecuaciones, con tres incógnitas, se puede resolver mediante la matriz inversa:

A) Siempre.

B) Siempre que no sea homogéneo.

C) Siempre que no tenga dos filas proporcionales.

D) Cuando el rango de la matriz de coeficientes sea 3.

E) Ninguna de las anteriores.

D) El determinante de la matriz será distinto de 0, luego tendrá inversa.

Señala, en cada caso, las respuestas correctas:

3.6. Un sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas:

A) Puede tener solución única.

B) Puede tener infinitas soluciones.

C) Puede ser incompatible.

D) Para poder resolverlo le falta una ecuación.

E) Si los coeficientes de las ecuaciones son proporcionales, las soluciones dependen de dos parámetros.

A), B), C) son correctas.

3.7. Un sistema de ecuaciones lineales homogéneo:

A) Siempre tiene solución.

B) Solo tiene la solución trivial.

C) Para que tenga solución distinta de la trivial, el rango de la matriz de coeficientes ha de ser igual que el rango de la matriz ampliada.

D) Si tiene solución distinta de la trivial, entonces tiene infinitas soluciones.

E) Los rangos de la matriz de coeficientes y la matriz ampliada siempre son iguales.

A), D), E) son correctas.

Elige la relación correcta entre las dos afirmaciones dadas:

3.8. En un sistema de ecuaciones lineales:

a) Los rangos de las matrices de coeficientes y de las ampliadas son iguales.

b) El sistema tiene infinitas soluciones.

A) a $\Leftrightarrow$ b

B) a $\Rightarrow$ b, pero b $\not\Rightarrow$ a

C) b $\Rightarrow$ a, pero a $\not\Rightarrow$ b

D) a y b son excluyentes entre sí

E) Ninguna de las anteriores

C) es la relación correcta.

Señala el dato innecesario para contestar:

3.9. Consideremos un sistema de cinco ecuaciones lineales con tres incógnitas. Sea *A* la matriz de coeficientes y *A la matriz ampliada. Para que el sistema sea compatible determinado:**

a) rg(A) = rg(A^*) = 3 = número de incógnitas

b) rg(A) = 3; rg(A^*) = 3

c) Solo hay tres ecuaciones linealmente independientes y, además, rg(A) = rg(A^*).

d) rg(A) = rg(A^*); $|A| \neq 0$, rg(A^*) = 3

A) En a no hay un dato innecesario.

B) En b no hay un dato innecesario.

C) En c no hay un dato innecesario.

D) En d no hay un dato innecesario.

E) Todos los datos son necesarios.

B) No hay un dato innecesario en b.

Analiza si la información suministrada es suficiente para contestar la cuestión:

10. Un sistema de *m* ecuaciones lineales con *n* incógnitas es de Cramer si se verifica:

a) Si *A* es la matriz de coeficientes rg(A) = min(m, n).

b) $m = n$ y $|A| \neq 0$

A) Cada afirmación es suficiente por sí sola.

B) a es suficiente por sí sola, pero b no.

C) b es suficiente por sí sola, pero a no.

D) Las dos son equivalentes.

E) Hacen falta más datos.

C) b es suficiente por sí sola, pero a no.