UNIDAD 1 MATRICES Y DETERMINANTES

1.- Efectuar las siguientes operaciones con matrices:

$$a)\quad \begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 0 & -1 & -2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 3 & -1 \\ -1 & -2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}^2$$

$$b)\quad \left[\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} - \frac{1}{2} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 4 \end{pmatrix} \right]^2$$

2.- Hallar el valor de x e y para que se verifique: $A^2 - xA - yI = 0$. Siendo x e y números reales, I la matriz identidad de orden 2, y A la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$$

3.- Sean $A = (a_{ij})$ y $B = (b_{ij}) \in M_{3x4}$, y tales que $a_{ij} = i - j$ y $b_{ij} = (-1)^{i+j} + 2^{j+1}$.
Hallar A + B.

4.- Hallar una matriz X que verifique $X - B^2 = A \cdot B$, siendo:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \quad y \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

5.- La tabla adjunta muestra la cantidad de vitaminas A, B y C que posee cada uno de los productos P, Q, R y S por unidad de peso:

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{ccc} A & B & C \end{array} \\ \begin{array}{c} P \\ Q \\ R \\ S \end{array} & \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \end{array}$$

a) Queremos elaborar una dieta en la que entren todos los productos y de manera que contenga 20 u. de vitamina A, 25 u. de vitamina B y 6 u. de C. ¿Es posible hacerlo?.¿De cuántas formas?.
b) Si la cantidad de producto Q es de 2 u., ¿cuáles serán las cantidades de los otros productos en esa dieta?.
c) Obtén, en función de la cantidad de producto Q, las cantidades de los otros productos.¿Entre qué valores debe estar la cantidad de producto Q?

6.- Calcular el valor de los determinantes siguientes:

$$a)\ \begin{vmatrix} 29 & -1 \\ 3 & 5 \end{vmatrix} \qquad b)\ \begin{vmatrix} 3 & 4 & 1 \\ 4 & -1 & 2 \\ 0 & -5 & 2 \end{vmatrix} \qquad c)\begin{vmatrix} 1 & 5 & 2 \\ 2 & -2 & 1 \\ 3 & -9 & 0 \end{vmatrix}$$

7.- Demostrar que si todas las filas de un determinante de orden 3 son múltiplos de k, el determinante es múltiplo de k y de k^3.

8.- Calcular el valor de los determinantes (usando las propiedades)

$$\begin{vmatrix} x & 1/x & yz \\ y & 1/y & xz \\ z & 1/z & xy \end{vmatrix} \ ; \ \begin{vmatrix} 1+a & 1 & 1 \\ 1 & 1+b & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} \ ; \ \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x & y & z \\ y+z & x+z & x+y \end{vmatrix} \ ; \ \begin{vmatrix} x+y & z & z \\ x & y+z & x \\ y & y & x+z \end{vmatrix}$$

9.- Sabiendo que $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ x & y & z \end{vmatrix} = 5$, hallar el valor de los siguientes determinantes:

$$a)\ \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a+7 & b+7 & c+7 \\ x/2 & y/2 & z/2 \end{vmatrix} \ , \ b)\ \begin{vmatrix} a & b & c \\ x & y & z \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} \ , \ c)\ \begin{vmatrix} 1-x & 1-y & 1-z \\ a+2x & b+2y & c+2z \\ 2x & 2y & 2z \end{vmatrix}$$

10.- Hallar los valores de x para los que A posee inversa:

$$A = \begin{pmatrix} 1+x & 1 & 1 \\ 1 & 1+x & 1 \\ 1 & 1 & 1+x \end{pmatrix}$$

11.- Demostrar la igualdad siguiente:

$$\begin{vmatrix} 1 & a^2 & a^3 \\ 1 & b^2 & b^3 \\ 1 & c^2 & c^3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} bc & a & a^2 \\ ac & b & b^2 \\ ab & c & c^2 \end{vmatrix}$$

12.- Demostrar, sin calcular su valor, que el siguiente determinante es múltiplo de 15:

$$\begin{vmatrix} 1 & 5 & 0 \\ 2 & 2 & 5 \\ 2 & 5 & 5 \end{vmatrix}$$

13.- Demostrar: $\begin{vmatrix} 1 & a & b+c \\ 1 & b & c+a \\ 1 & c & a+b \end{vmatrix} = 0$

14.- Resolver la ecuación: $\begin{vmatrix} x & -1 & -1 & 0 \\ -x & x & -1 & 1 \\ 1 & -1 & x & 1 \\ 1 & -1 & 0 & x \end{vmatrix} = 0$.

15.- Hallar el valor de x para que el rango de la siguiente matriz sea 2:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 4 & 2 & x \\ 6 & 1 & 5 \end{pmatrix}$$

16.- Hallar el valor de k para que la siguiente matriz sea de rango 2

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 & 3 & 1 \\ 2 & -1 & 3 & 0 & 2 \\ 4 & k & -1 & 6 & 4 \end{pmatrix}$$

17.- a) Calcular el rango de la matriz siguiente:

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 1 & m & m \\ m & m & 1 & 1 \\ 1 & m & 1 & m \end{pmatrix}$$ en función de los valores de m.

b) Para m =0, estudiar si existe una matriz X de la forma:

$$X=\begin{pmatrix} a & c & a \\ b & d & c \\ c & a & b \\ d & b & d \end{pmatrix}$$ tal que $A\cdot X = I$ (Con I la identidad de orden 3)

18.- Estudiar el rango de :

$$A=\begin{pmatrix} \cos\alpha & -\operatorname{sen}\alpha & 0 \\ \operatorname{sen}\alpha & \cos\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

19.- Sean las matrices:

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ -2 & 1 & -3 \end{pmatrix}\quad y\quad C=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

a) Halla la inversa de $2A-B\cdot C$

b) Resuelve la ecuación $2A\cdot X = B\cdot C\cdot X + A^2$

20.- Sean las matrices:

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}\quad y\quad B=\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

a) Determina paso a paso A^{-1}.

b) Resuelve la ecuación $A\cdot X - B = A\cdot B$

21.- Resuelve la ecuación:

$$\begin{vmatrix} 2x-1 & 3x & x-2 \\ 2x+1 & x & 2x+1 \\ 2x-1 & 3x & 3x-2 \end{vmatrix} = 0$$

22.- a) Despeja la matriz X en función de A e I_2 en la ecuación $(X+A)^2 = X^2 + X\cdot A + I_2$, siendo X y A matrices cuadradas de orden 2, e I_2 la matriz identidad de orden 2.

b) Resuelve la ecuación $B\cdot X + B^2 = I_2$ *si* $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, e I_2 la matriz identidad de orden 2.

23.- Sabiendo que $\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} = x$,

y además $\begin{vmatrix} 3b & 6c & 6a \\ e & 2f & 2d \\ 5h & 10i & 10g \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} a+2b & b-c & 7c \\ d+2e & e-f & 7f \\ g+2h & h-i & 7i \end{vmatrix} = 50x+6$, calcula el valor de x.

24.- Dada la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, se pide:

a) Encuentra la expresión general de la potencia n-ésima de A. En otras palabras, calcula la expresión de A^n donde n es un número natural cualquiera.

b) Razona que la matriz A^n tiene inversa para cualquier $n \in N$, $n \geq 1$, y calcula dicha matriz inversa.

25.- Sean $A = \begin{pmatrix} 4 & 5 \\ -3 & -4 \end{pmatrix}$ *y* $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$. Se pide:

a) Resuelve el sistema matricial $\begin{cases} 2X+3Y=A \\ X+Y=B \end{cases}$

b) Encuentra, razonadamente, una fórmula general para B^n.

26.- Consideremos la matriz $A=\begin{pmatrix} 1 & 0 & k \\ 0 & k & 1 \end{pmatrix}$. Demostrar que

$rg\left(A\cdot A^t\right)=rg\left(A^t\cdot A\right) \quad \forall k\in R$

27.- Sea A la matriz $A=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ Calcula razonadamente: $\left|A^{101}\right| \;\; y \;\; \left|A^{1000}\right|$

SOLUCIONES

1.- a) $\begin{pmatrix} 13 & -1 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}$ b) $\begin{pmatrix} -\frac{3}{4} & \frac{9}{2} \\ -\frac{3}{2} & \frac{33}{4} \end{pmatrix}$ **2.-** x = 3 , y = -8

3.- $A+B=\begin{pmatrix} 5 & 6 & 15 & 28 \\ 4 & 9 & 14 & 31 \\ 7 & 8 & 17 & 30 \end{pmatrix}$ **4.-** $X=\begin{pmatrix} 2 & 0 & -2 \\ 4 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$

5.- a) Sí, infinitas. b) 10 u de P, 2 u de Q, 3 u de R y 2 u de S.

c) P: 8 + x ; Q: x ; R: 3 ; S: 6 – 2x $0 < x < 3$.

6.- a) 148 b) –28 c) 0 **8.-** 1) 0 2) ab 3) 0 4) 4xyz

9.- a) $\frac{5}{2}$ b) 5 c) 10 **23.-** $\left(a^2-b^2\right)^4$

10.- $x\neq 0\,,-3$ **14.-** x = 1

15.- x = 3 **16.-** k = -1

17.- a) m = 1 , rg(A) = 1 ; m = -1 , rg(A) = 2 ; $m\neq\pm 1$, rg(A) = 3 b) No existe

18.- Siempre rg(A) = 3 porque $|A|=1 \quad \forall\alpha\in R.$

19.- a) $\frac{1}{3}\cdot\begin{pmatrix}-1 & 2\\ 1 & -1\end{pmatrix}$ b) $X=\frac{1}{3}\cdot\begin{pmatrix}1 & 8\\ 3 & -1\end{pmatrix}$

20.- a) $A^{-1}=\frac{1}{2}\cdot\begin{pmatrix}2 & 0 & -1\\ -2 & 2 & 1\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$ *b*) $X=\frac{1}{2}\cdot\begin{pmatrix}4 & 0 & -5\\ 2 & 4 & 7\\ 0 & 0 & 3\end{pmatrix}$

21.- x = 0 , x = -1

22.- a) $X=A^{-1}\cdot(I_2-A^2)$ b) $X=-I_2$ **23.-** $60x-7x=50x+6\Rightarrow x=x=2$

24.- $A^n=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ n & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$ $\left(A^n\right)^{-1}=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ -n & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$

25.- a) $X=\begin{pmatrix}-4 & -2\\ 6 & 4\end{pmatrix}$, $Y=\begin{pmatrix}4 & 3\\ -5 & -4\end{pmatrix}$

27.- $\left|A^{101}\right|=-1$; $\left|A^{1000}\right|=1$