55 EJERCICIOS de SISTEMAS de ECUACIONES

Sistemas en forma matricial:

1. Expresar y resolver en forma matricial los sistemas de los ejercicios 4, 5, 6… de esta hoja.

Discusión y resolución de sistemas (sin parámetro):

2. Enunciar la regla de Cramer para un sistema 3x3. Aplicarla a la resolución –previa discusión por Rouché-Fröbenius– del siguiente sistema:

$$\left.\begin{array}{l} x-2y+z=8 \\ 2x+y-3z=-9 \\ x+y+z=2 \end{array}\right\}$$

(Soluc: comp. dtdo.; x=1, y=-2, z=3)

3. Enunciar el teorema de Rouché-Fröbenius. Aplicarlo a la discusión del sistema que figura a continuación. Posteriormente, resolverlo por el método deseado (Gauss o Cramer):

$$\left.\begin{array}{l} x-2y+z=8 \\ 2x+y-3z=-9 \\ 3x-y-2z=-1 \end{array}\right\}$$

(Soluc: comp. indtdo.; x=-2+ λ, y=-5+ λ, z= λ)

- Discutir y resolver los siguientes SS.EE.LL., e indicar de qué tipo se tratan:

4. $$\left.\begin{array}{l} x+y+z=11 \\ 2x-y+z=5 \\ 3x+2y+z=24 \end{array}\right\}$$

(comp. dtdo.; x=4, y=5, z=2)

5. $$\left.\begin{array}{l} -x+y+z=3 \\ x-y+z=7 \\ x+y-z=1 \end{array}\right\}$$

(comp. dtdo.; x=4, y=2, z=5)

6. $$\left.\begin{array}{l} x+y+z=2 \\ 2x+3y+5z=11 \\ x-5y+6z=29 \end{array}\right\}$$

(comp. dtdo.; x=1, y=-2, z=3)

7. $$\left.\begin{array}{l} x+y+z=6 \\ x\quad\;\; +z=4 \\ \quad\;\; y+z=5 \end{array}\right\}$$

(comp. dtdo.; x=1, y=2, z=3)

8. $$\left.\begin{array}{l} x+y-z+t=-8 \\ x-y+z+t=2 \\ x+y+z-t=6 \\ -x+y+z+t=-4 \end{array}\right\}$$

(comp. dtdo.; x=1, y=-2, z=3, t=-4)

9. $$\left.\begin{array}{l} x+y+z+t=2 \\ 2x-y-z-2t=5 \\ 3x+2y+3z-t=20 \\ -x+y-z+2t=-10 \end{array}\right\}$$

(comp. dtdo.; x=1, y=2, z=3, t=-4)

10. $$\left.\begin{array}{l} x-y+z=2 \\ x+2y-3z=-4 \\ x-y+z=1 \end{array}\right\}$$

(incompatible)

11. $$\left.\begin{array}{l} 4x-3y=-5 \\ 6x-5y=-9 \end{array}\right\}$$

(comp. dtdo.; x=1, y=3)

12. $\left.\begin{array}{l} x + y = 12 \\ y + z = 8 \\ x + z = 6 \end{array}\right\}$

(comp. dtdo.; x=5, y=7, z=1)

13. $\left.\begin{array}{l} x - y + z = 3 \\ 2y + 3z = 15 \\ 3x + y = 12 \end{array}\right\}$

(comp. dtdo.; x=3, y=3, z=3)

14. $\left.\begin{array}{l} x + y + z = 3 \\ 2x - y + 3z = 4 \\ x - 2y + 2z = 1 \end{array}\right\}$

Ayuda: la 3ª fila es comb. lin. de las otras
(comp. indtdo.; x=5−4λ, z=−2+3λ, y=λ)

15. $\left.\begin{array}{l} x-2y+z=0 \\ -3x+3z=4 \\ -2x+y+z=2 \end{array}\right\}$

(comp. indtdo.; x=λ−4/3, y=λ−2/3, z=λ)

16. $\left.\begin{array}{l} y+9z=2 \\ 2x+y+3z=-1 \\ -x+3z=-2 \end{array}\right\}$

(incompatible)

*** 17**. $\left.\begin{array}{l} x-y+z=-1 \\ -x+y-z=1 \\ x-y-z=0 \end{array}\right\}$

(comp. indtdo.; x=λ, y=1/2+ λ, z=−1/2)

18. $\left.\begin{array}{l} y-t+w=1 \\ 2x+y+z-t+2w=2 \\ 2x-y+z+t=0 \\ 4x-3y+2z+3t-w=-1 \end{array}\right\}$

(comp. indtdo.; x=(1−λ−v)/2, y=1+μ−w;
λ,μ,v arbitrarios)

19. $\left.\begin{array}{l} 2x + 3y - 7z = -1 \\ 3x + 4y - 6z = 5 \\ 5x - 2y + 4z = -7 \end{array}\right\}$

(comp. dtdo.; x=−1, y=5, z=2)

20. $\left.\begin{array}{l} x-2y+z=1 \\ 2x+y-z=0 \\ 3x-y=1 \\ x+3y-2z=0 \end{array}\right\}$

(incompatible)

21. $\left.\begin{array}{l} x - y + z = -1 \\ x + y + z = 1 \\ x + 3y + z = 3 \end{array}\right\}$

(comp. indtdo.; x=−λ, y=1, z=λ)

22. $\left.\begin{array}{l} 2x-2y+z=1 \\ x+y-z=-2 \\ 3x-y=-1 \\ x+2y-z=-1 \end{array}\right\}$

(comp. dtdo.; x=0, y=1, z=3)

23. $\left.\begin{array}{l} 2x+y-4z=1 \\ x-y-2z=3 \\ 4x-y-8z=2 \end{array}\right\}$

(incompatible)

24. $\left.\begin{array}{l} x+y-2z-3t=0 \\ x+y-3z+2t=-2 \\ 2x-y+z-t=1 \\ x+2y-2z+2t=3 \end{array}\right\}$

(comp. dtdo.; x=1, y=3, z=2, t=0)

25. Inventar un sistema que sea compatible determinado, otro indeterminado y otro incompatible.

26. ¿Por qué se hace la discusión de un SS.EE.LL. antes de resolverlo?

Sistemas homogéneos (sin parámetro):

27. $\left.\begin{array}{l} 2x-y+z=0 \\ x-2y+3z=0 \\ y-z=0 \end{array}\right\}$

(Soluc: x=0, y=0, z=0)

28. $\left.\begin{array}{l} -3x+y-2z=0 \\ x-2y+z=0 \\ -x-3y=0 \end{array}\right\}$

(Soluc: x=−3λ/5, y=λ/5, z=λ)

29. $\left.\begin{array}{r} 7x+9y+9z=0 \\ 3x+2y+z=0 \\ x+y-z=0 \end{array}\right\}$

(Soluc: x=0, y=0, z=0)

30. $\left.\begin{array}{l} 4x+12y+4z=0 \\ 2x-13y+2z=0 \\ 12x-12y+12z=0 \end{array}\right\}$

(Soluc: x=-λ, y=0, z=λ)

Discusión y resolución de sistemas con un parámetro:

31. *(S)* Discutir según los valores de **m**, el sistema

$$\left.\begin{array}{r} x-2y+z=3 \\ 5x-5y+2z=m \\ 2x+y-z=1 \end{array}\right\}$$

Resolverlo además para m=10. *(Soluc: m=10⇒ comp.indtdo.; m≠10⇒ incomp.)*

32. *(S)* Se considera el sistema

$$\left.\begin{array}{r} 5x-2y-pz=3 \\ -y+z=1 \\ x-y+z=p \end{array}\right\}$$

y se pide: **a)** Discutir el sistema según los valores de **p** *(Soluc: p=-2⇒ incomp.; p≠2⇒ comp.dtdo.)*

b) Resolverlo para p=2.

33. *(S)* Determinar para qué valores de **k** tiene solución el sistema

$$\left.\begin{array}{r} x+3y-3z=4 \\ 2x-y+z=1 \\ 3x+2y+kz=5 \end{array}\right\}$$

y resolverlo cuando tenga infinitas soluciones. *(Soluc: k≠-2⇒ comp. dtdo.; k=-2⇒ comp. indtdo.)*

34. *(S)* Se considera el sistema

$$\left.\begin{array}{r} 3x-2y-mz=4 \\ x-y+z=1 \\ 2x-y+z=m \end{array}\right\}$$

a) Discutir el sistema según los valores de **m**. *(Soluc: m≠2⇒ comp. dtdo.; m=-2⇒ incomp.)*

b) Resolver el sistema para m=1

35. *(S)* Dado el sistema de ecuaciones lineales

$$\left.\begin{array}{r} ax-y+z=2 \\ x+ay-z=1 \\ x-z=0 \end{array}\right\}$$

se pide: **a)** Discutir el sistema según los valores de **a** *(Soluc: a≠0 y a≠1⇒ comp. dtdo.; a=0 o a=-1⇒ incomp.)*

b) Resolverlo para a=1

36. *(S)* Discutir el sistema según los valores del parámetro **a** y resolverlo cuando sea compatible:

$$\left.\begin{array}{r} -x-y-z=-2 \\ (a-1)x+(a-1)y-2z=-2 \\ ax+(a+1)y=1 \end{array}\right\}$$

(Soluc: a≠1⇒ comp. dtdo.;a=−1⇒ incomp.)

37. *(S)* Hallar los valores del parámetro **a** que hacen compatible el sistema

$$\left.\begin{array}{r} ax+3y=2 \\ 3x+2y=-5 \\ 2x+ay=3 \end{array}\right\}$$

y resolverlo para uno de ellos. *(Soluc: a=13/5 y a=−5)*

38. *(S)* Determinar los valores de **a** para los que el sistema siguiente sea incompatible:

$$\left.\begin{array}{r} (a+3)x+4y=1 \\ (a-1)y+z=0 \\ -4x-4y+(a-1)z=-1 \end{array}\right\}$$

(Soluc: a=−1)

39. *(S)* Discutir el siguiente sistema, según los valores de **m** y resolverlo cuando sea posible:

$$\left.\begin{array}{r} mx+y+mz=m \\ x+2y+z=m \\ -x+y-z=m^2 \end{array}\right\}$$

(Soluc: m≠0⇒ incomp.; m=0⇒ comp. indtdo.)

40. *(S)* Resolver el sistema de ecuaciones

$$\left.\begin{array}{r} 3x-2y+4z=8 \\ 2x+3y-3z=4 \\ x-3y-5z=-6 \\ 4x+4y+6z=18 \end{array}\right\}$$

Ayuda: se recomienda previamente estudiar el carácter de dicho sistema. *(Soluc: x=2, y=z=1)*

41. *(S)* Discutir el siguiente sistema según los valores del parámetro **a**:

$$\left.\begin{array}{r} 2x+y-z=0 \\ ax-y-z=a-1 \\ 3x-2az=a-1 \end{array}\right\}$$

(Soluc: a≠1 y a≠3⇒ comp. dtdo.; a=1⇒ comp. indtdo.; a=−3⇒ incomp.)

42. *(S)* Estudiar según los valores de **a** el sistema

$$\left.\begin{array}{r} x - ay + z = -1 \\ -x + y - z = a \\ x - y - z = 0 \end{array}\right\}$$

y resolverlo cuando no tenga solución única. *(Soluc: $a\neq 1 \Rightarrow$ comp. dtdo.; $a=1 \Rightarrow$ comp. indtdo.)*

43. *(S)* Discutir el siguiente sistema para los diferentes valores de **a** y resolverlo para a=0:

$$\left.\begin{array}{r} (a+1)x + y + 2z = -2 \\ 2x + y + (a+1)z = 3 \\ x + (a+1)y + 2z = -2 \end{array}\right\}$$

(Ayuda: hacer el cambio a+1=t)

(Soluc: $a\neq 4$ y $a\neq 1$ y $a\neq 0 \Rightarrow$ comp. dtdo.; $a=1 \Rightarrow$ incomp.; $a=0$ o $a=-4 \Rightarrow$ comp. indtdo.)

Sistemas homogéneos con parámetro:

44. *(S)* Se considera el sistema

$$\left.\begin{array}{r} 7x+9y+9z=0 \\ 3x+2y+mz=0 \\ x+my-z=0 \end{array}\right\}$$

Se pide: **a)** Discutir el sistema según los valores de **m**. **b)** Resolverlo para m=5.

(Soluc: $m\neq 5$ y $m\neq 1/7 \Rightarrow$ comp. dtdo.; $m=5$ o $m=1/7 \Rightarrow$ comp. indtdo.)

45. *(S)* Dado el sistema de ecuaciones lineales

$$\left.\begin{array}{r} 4x+12y+4z=0 \\ 2x-13y+2z=0 \\ (m+2)x-12y+12z=0 \end{array}\right\}$$

a) Determinar el valor de **m** para que tenga solución distinta de la trivial. *(Soluc: m=10)*

b) Resolverlo para el valor de **m** encontrado.

46. *(S)* Resolver el siguiente sistema para los valores de λ que lo hacen compatible indeterminado:

$$\begin{pmatrix} -7-\lambda & 6 & 6 \\ -3 & 2-\lambda & 3 \\ -6 & 6 & 5-\lambda \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

(Soluc: es comp. indtdo. para $\lambda=-1$ y $\lambda=2$)

47. *(S)* Determinar los valores de λ para los cuales el sistema:

$$\left.\begin{array}{r} \lambda x+y-z=0 \\ -\lambda x+(\lambda-1)y=0 \\ -x-2y+(\lambda+1)z=0 \end{array}\right\}$$

tiene solución distinta de la trivial y obténgase la solución para uno de los valores de λ. *(Soluc: $\lambda=1$, $\lambda=-1\pm\sqrt{2}$)*

Problemas de planteamiento de sistemas:

48. En un almacén un mayorista compra 5 unidades de un producto *A*, 4 de *B* y 3 de *C*, pagando un total de 8.600 €. Otro cliente compra 2 paquetes de *A*, 7 de *B* y 4 de *C*, gastando 7.300 €. Un tercer cliente compra 8 de *A*, 13 de *B* y 5 de *C*, pagando lo que los otros dos juntos. ¿Cuánto vale cada producto?
(Soluc: A=1.000, B=300 y C=800 €.)

49. Una gran multinacional destina 900.000 € para gratificar a sus 51 empleados. Concede 25.000 € a los empleados de nivel *A*, 20.000 a los de nivel *B* y 15.000 a los de nivel *C*. Teniendo en cuenta que para los de nivel *B* destina en total el doble que para los del *A*, ¿cuántos empleados hay en cada nivel?
(Soluc: A=6, B=15 y C=30 empleados)

50. La suma de las edades de tres personas es, en el momento actual, 73 años. Dentro de 10 años la edad de la mayor de ellas será el doble de la edad de la persona más joven. Hace doce años la persona con edad intermedia tenía el doble de años que la más joven. Hallar las edades de las tres personas.
(Soluc: 15, 18 y 40 años)

51. La edad de un padre es igual a la suma de las de sus dos hijos. Cuando pasen tantos años como tiene el hijo mayor, el padre tendrá 70 años y la suma de las edades de los tres será de 164 años. ¿Qué edad tiene ahora cada uno? *(Soluc: 22, 24 y 46 años)*

52. Tres amigos suben a una báscula de dos en dos: Andrés y Benjamín suman 173 kg, Andrés y Carlos 152 kg, mientras que entre Benjamín y Carlos pesan 165 kg. ¿Cuánto pesa cada uno?
(Soluc: Andrés=80 kg; Benjamín=93 kg; Carlos=72 kg)

53. Un modisto ofrece cuatro tipos de tejido de gran calidad a distintos precios. Un comprador gastó 7.000 € en 2 m del primero, 3 m del segundo y 1 m del tercero. Otro gastó 6.500 € comprando 1 m del primero, 2 m del segundo y 2 m del cuarto. Un tercero compró 3 m del primero, 3 m del tercero y 2 m del cuarto, gastando 7.000 €. Al vendedor le sobraron 2 m, 1 m, 2 m y 1 m respectivamente, por un valor de 5.750 €. ¿Cuál era el precio de cada tejido? *(Soluc: 1.000, 1.500, 500 y 1.250 €, respectivamente)*

54. En una mesa de una cafetería tomaron dos cafés, 1 refresco y dos tés, costándoles 5,30 €. En otra mesa pagaron 8,40 € por tres cafés, 3 refrescos y 1 té. Por otra parte, dos amigos tomaron un café y un refresco en la barra, donde el precio es un 10% más barato, pagando 2,25 €. ¿Qué cuesta cada bebida?
(Soluc: café=1 €, refresco=1,50 €, té=0,90 €)

55. Un especulador tiene colocado su dinero en tres depósitos bancarios diferentes X, Y y Z. El dinero invertido en X le produce un 4% de beneficio, en Y un 7%, y en Z un 6%. Sus beneficios totales fueron de 327.000 € anuales. Debido a la bajada de tipos motivada por la crisis, el segundo año el rendimiento es del 3.5% en X, el 6% en Y y el 5% en Z, siendo sus beneficios de 278.000 €. ¿Cuánto dinero tiene invertido en cada depósito si en total tiene 5.000.000 €? *(Soluc: X=200.000 €; Y=3.100.000 €; Z=1.700.000 €)*