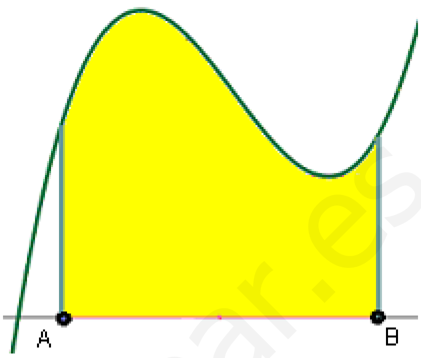
1 APROXIMACIÓN AL VALOR DEL ÁREA BAJO UNA CURVA

La integral definida está históricamente relacionada con el problema de definir y calcular el área de figuras planas.

En geometría se calcula el área de regiones poligonales (triángulo, polígonos regulares). Sin embargo, cuando las regiones están limitadas por arcos de curvas, la geometría o tiene recursos para calcular sus áreas.

En principio, vamos a calcular el área de regiones limitadas por la gráfica de una función continua f en un intervalo cerrado [a, b], el eje horizontal y las rectas verticales x = a y x = b.

Supongamos que para todo valor x del intervalo [a, b] verifica que $f(x) \geq 0$.



La idea intuitiva para calcular el área de la región consiste en dividir dicha región en rectángulos verticales.

a) Vamos a dividir el intervalo [a,b] en 2 intervalos, para ello consideramos la siguiente partición:

$P_1 = \{a = x_0, x_1, x_2 = b\}$

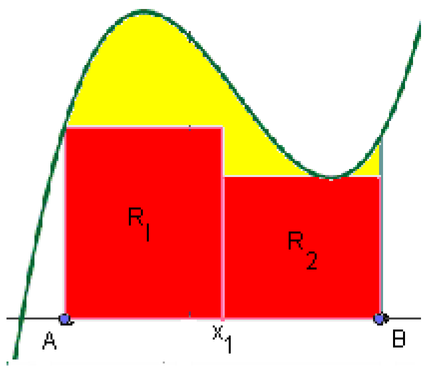
Por ser la función continua en cada uno de esos subintervalos alcanza mínimo en cada uno de ellos.

Llamamos:

- $m_1 = \text{mín } f(x)$ en $[x_0, x_1]$
- $m_2 = \text{mín } f(x)$ en $[x_1, x_2]$

Tenemos dos rectángulos:

- R_1 de base $x_1 - x_0$ y altura m_1
- R_2 de base $x_2 - x_1$ y altura m_2



La suma de las áreas de los dos rectángulos es inferior al área del recinto, por ello, se llama suma inferior.

$$s(f, P_1) = m_1(x_1 - x_0) + m_2(x_2 - x_1) \leq \text{Área}$$

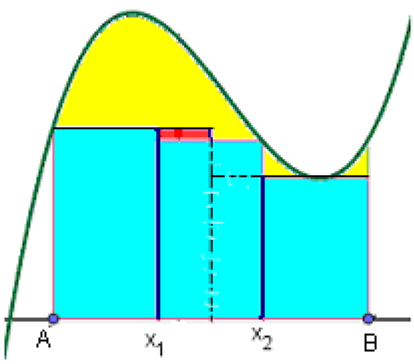
b) Si dividimos [a,b] en 3 intervalos, consideramos la partición: $P_2 = \{a = x_0, x_1, x_2, x_3 = b\}$

Llamamos:

- $m_1 = \text{mín } f(x)$ en $[x_0, x_1]$
- $m_2 = \text{mín } f(x)$ en $[x_1, x_2]$
- $m_3 = \text{mín } f(x)$ en $[x_2, x_3]$

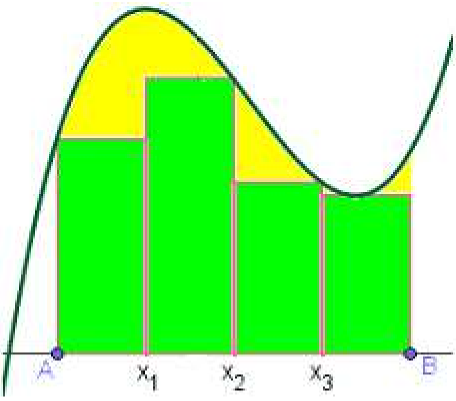
La suma de las áreas de los tres rectángulos es:

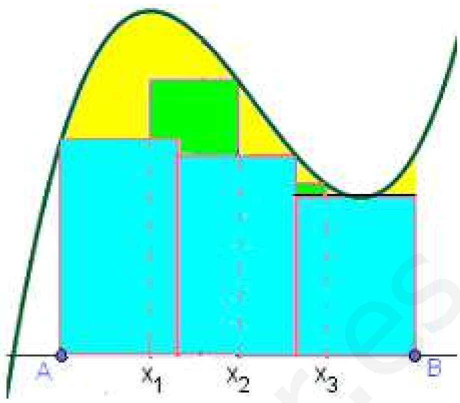
$$s(f, P_2) = m_1(x_1 - x_0) + m_2(x_2 - x_1) + m_3(x_3 - x_2) \leq \text{Área}$$



Al dividir [a,b] en más subintervalos, observamos que la suma de los rectángulos es mayor que la suma en la partición anterior, es decir, se verifica:

$$s(f, P_2) > s(f, P_1)$$





Se observa que a medida que tomamos particiones más finas, los rectángulos van disminuyendo su base, las sumas inferiores se van incrementando y aproximándose por defecto al área del recinto.

Generalizando:

Vamos a dar una definición de ***suma inferior***:

Dividimos el intervalo de [a,b]en n partes de igual longitud.

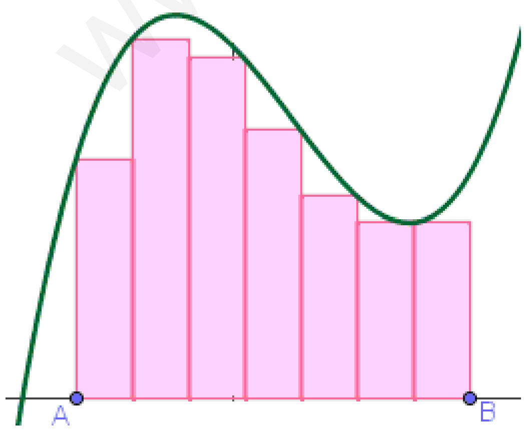
Llamamos $\Delta x = \dfrac{b-a}{n}$ a las medidas de las bases de todos los rectángulos

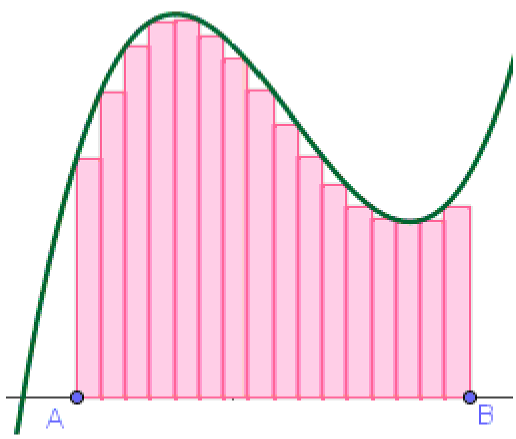
Los puntos extremos de los n intervalos son $x_0, x_1, \ldots, x_n$.

Llamamos m_i al mínimo que toma la función en cada intervalo de la forma $[x_{i-1}, x_i]$

La suma inferior es:

$$s(f,P_n) = m_1(x_1 - x_0) + m_2(x_2 - x_1) + \ldots + m_n(x_n - x_{n-1}) = \sum_{i=1}^{n} m_i \cdot (x_i - x_{i-1}) = \sum_{i=1}^{n} m_i \cdot \Delta x$$





Ahora vamos a realizar el mismo procedimiento pero tomando los rectángulos con alturas el máximo en cada intervalo.

a) Considero la partición

$P_1 = \{a = x_0, x_1, x_2 = b\}$

Sea M_1 = máx f(x) en $[x_0, x_1]$ y M_2 = máx f(x) en $[x_1, x_2]$

Tenemos dos rectángulos:

- R_1 de base $x_1 - x_0$ y altura M_1
- R_2 de base $x_2 - x_1$ y altura M_2

La suma de las áreas de los dos rectángulos es superior al área del recinto, por ello, se llama **suma superior**:

$$S(f, P_1) = M_1(x_1 - x_0) + M_2(x_2 - x_1) \geq \text{Área}$$

Por ser $M_i \geq m_i$ en cada intervalo $[x_{i-1}, x_i]$ se verifica que

$$S(f, P_1) \geq s(f, P_1)$$

b) Si dividimos [a,b] en 3 intervalos, consideramos la partición: $P_2 = \{a = x_0, x_1, x_2, x_3 = b\}$

Sea M_1 = máx f(x) en $[x_0, x_1]$; M_2 = máx f(x) en $[x_1, x_2]$; M_3 = máx f(x) en $[x_2, x_3]$

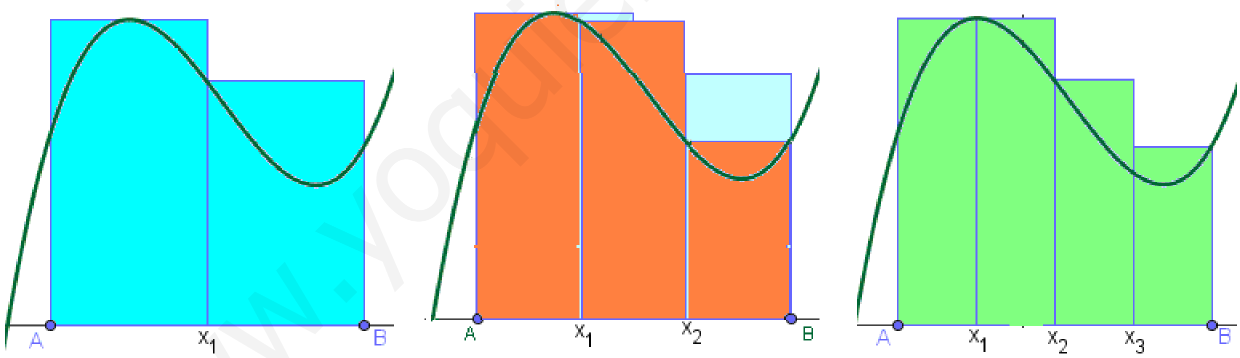
Con esta partición, tenemos tres rectángulos de igual base $x_i - x_{i-1}$ y altura M_i = máx f(x) en $[x_{i-1}, x_i]$

$$S(f, P_2) = M_1(x_1 - x_0) + M_2(x_2 - x_1) + M_3(x_3 - x_2)$$

Se verifica:

1) $S(f, P_2) \geq \text{Área} \geq s(f, P_2)$

2) Al dividir [a,b] en más subintervalos se verifica $S(f, P_2) < S(f, P_1)$



Se observa que a medida que tomamos particiones más finas, los rectángulos van disminuyendo su base, las sumas superiores se van disminuyendo y aproximándose, por exceso, al área del recinto.

Generalizando:

Vamos a dar una definición de suma superior:

Dividimos el intervalo de [a,b]en n partes de igual longitud.

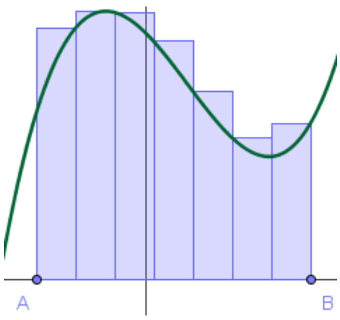
Llamamos $\Delta x = \dfrac{b-a}{n}$ a las medidas de las bases de todos los rectángulos

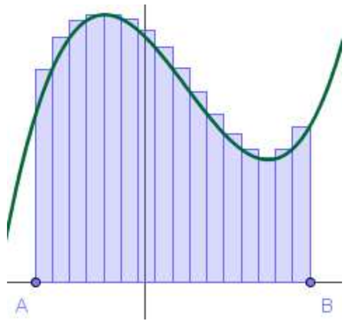
Los puntos extremos de los n intervalos son $x_0, x_1, \ldots\ldots, x_n$.

Llamamos M_i al máximo que toma la función en cada intervalo de la forma $[x_{i-1}, x_i]$

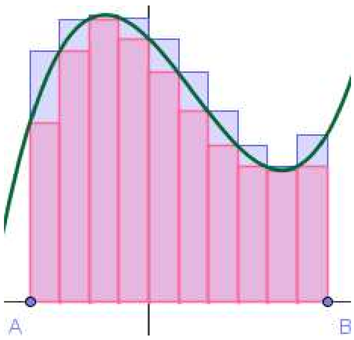
La suma superior es:

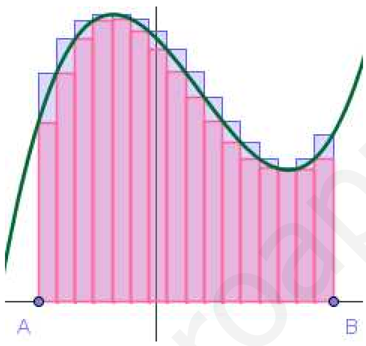
$$S(f,P_n) = M_1(x_1 - x_0) + M_2(x_2 - x_1) + \ldots + M_n(x_n - x_{n-1}) = \sum_{i=1}^{n} M_i \cdot (x_i - x_{i-1}) = \sum_{i=1}^{n} M_i \cdot \Delta x$$

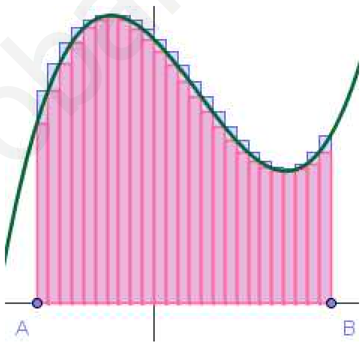




Además, a medida que la partición es más fina la diferencia entre la suma superior e inferior se va aproximando a cero, es decir, el área por defecto y el área por exceso se aproximan más al área del recinto.







Parece razonable que el límite de la suma (cuando $\Delta x = x_i - x_{i-1} \rightarrow 0$ y por lo tanto representaría el área total bajo la curva f(t).

$$\lim_{\substack{n\to\infty \\ \Delta x \to 0}} \sum_{i=1}^{n} M_i \cdot (x_i - x_{i-1}) = \lim_{\substack{n\to\infty \\ \Delta x \to 0}} \sum_{i=1}^{n} m_i \cdot (x_i - x_{i-1}) = \int_a^b f(x)\,dx$$

Definición:

Si f es continua y no negativa en un intervalo cerrado I = [a,b], definiremos la ***integral definida*** entre a y b de f como el área de la región limitada por la gráfica de f, el eje x y las rectas verticales x = a y x = b.
Se denota por:

$$\int_a^b f(x)\,dx$$

A los extremos del intervalo a y b se les llama ***límite inferior*** y ***superior*** de integración, respectivamente.

2 PROPIEDADES ELEMENTALES DE LA INTEGRAL DEFINIDA

1.- Si c en un punto interior al intervalo [a,b], entonces

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx$$

2.- $\int_a^a f(x)\,dx = 0$

3.- $\int_a^b f(x)\,dx = -\int_b^a f(x)\,dx$

Al permutar los límites de integración, la integral cambia de signo.

4.- La integral definida es lineal.

- La integral de la suma (o diferencia) de dos funciones es la suma (o diferencia) de sus integrales.

$$\int_a^b [f(x) \pm g(x)]\,dx = \int_a^b f(x)\,dx + \int_a^b g(x)\,dx$$

- La integral de una función multiplicada por un número es igual al número multiplicado por la integral de la función.

$$\int_a^b k\cdot f(x)\,dx = k\cdot\int_a^b f(x)\,dx$$

5.- Si f(x)$\leqslant$ g(x) para cualquier x $\in$ [a,b] se verifica $\int_a^b f(x)\,dx \leq \int_a^b g(x)\,dx$

3 TEOREMA FUNDAMENTAL DEL CÁLCULO INTEGRAL. REGLA DE BARROW

3.1. Teorema Fundamental de Cálculo

Consideramos la función integral como el área entre un punto fijo del dominio a y cualquier otro punto x:

$$F(x) = \int_a^x f(t)\,dt$$

A esta función F(x) la llamaremos ***función integral*** o ***función área***.

Una vez calculada nuestra función área, podemos hallar el área para cada valor de x, es decir, podremos hacer:

$$F(b) = \int_a^b f(x)\,dx$$

Sea f(x) una función continua en el intervalo I = [a,b]. Entonces la función:

$$F(x) = \int_a^x f(t)\,dt \text{ es derivable y } F'(x) = f(x)\text{ , } x\in(a,b)$$

El teorema demuestra que la función que nos determina el área limitada por la función f entre a y x para cada valor de x, F(x), es una función cuya derivada es la función f(x).

3.2. Regla de Barrow

Sea f una función continua en un intervalo [a,b] y G(x) una primitiva cualquiera de f(x) en [a,b]. Entonces:

$$\int_a^b f(x)\,dx = G(b) - G(a)$$

Este resultado es la ***Regla de Barrow*** y nos relaciona la integral definida (y por tanto el cálculo de áreas) y la teoría de la integración (como cálculo de primitivas).

Para calcular integrales definidas

- Calculamos una primitiva de f
- Evaluamos la primitiva en los límites de integración, a y b
- Realizamos la diferencia del valor obtenido en b menos el obtenido en a

Ejemplos

1) $\int_0^{\pi/2} \cos x\,dx$

$$\int_0^{\pi/2} \cos x\,dx = [-\operatorname{sen} x]_0^{\pi/2} = \operatorname{sen}\frac{\pi}{2} - \operatorname{sen}0 = 1 - 0 = 1$$

2) $\int_1^6 (4x^3 - 4x^4 - 3)\,dx$

$$\int_1^6 (4x^3 - 4x^4 - 3)\,dx = \left[x^4 - \frac{4}{5}x^5 - 3x\right]_1^6 = -4942{,}8 - (-2{,}8) = -4940$$

3) $\int_0^2 \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}\,dx$

$$\int_0^2 \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}\,dx = \frac{1}{2}\int_0^2 \frac{2x}{\sqrt{x^2+1}}\,dx = \left[\frac{1}{2}\frac{\sqrt{x^2+1}}{1/2}\right]_0^2 = \left[\sqrt{x^2+1}\right]_0^2 = \sqrt{5} - 1$$

4) $\int_1^4 \frac{x-1}{\sqrt{x}}\,dx$

$$\int_1^4 \frac{x-1}{\sqrt{x}}\,dx = \int_1^4 \left(\frac{x}{\sqrt{x}} - \frac{1}{\sqrt{x}}\right)dx = \int_1^4 \left(x^{\frac{1}{2}} - x^{-\frac{1}{2}}\right)dx = \left[\frac{x^{\frac{3}{2}}}{3/2} - \frac{x^{\frac{1}{2}}}{1/2}\right]_1^4 = \left[\frac{2}{3}\sqrt{x^3} - 2\sqrt{x}\right]_1^4 =$$

$$\left(\frac{2}{3}\sqrt{64} - 2\sqrt{4}\right) - \left(\frac{2}{3} - 2\right) = \frac{4}{3} + \frac{4}{3} = \frac{8}{3}$$

5) $\displaystyle\int_{1/e}^{e} 2\ln x\,dx$

Integramos por partes: $\displaystyle\int \ln x\,dx$

$u = \ln x \rightarrow du = \dfrac{1}{x}dx \qquad \displaystyle\int \ln x\,dx = x\ln x - \int \frac{1}{x}x\,dx = x\ln x - x$

$dv = dx \rightarrow v = x$

$$\int_{1/e}^{e} 2\ln x\,dx = \left[2x(\ln x - 1)\right]_{1/e}^{e} = 2e(1-1) - \frac{2}{e}\left[\ln\left(\frac{1}{e}\right) - 1\right] = -\frac{2}{e}(-1-1) = \frac{4}{e}$$

6) $\displaystyle\int_{0}^{\pi/4} \operatorname{sen}x\cos x\,dx$

$$\int_{0}^{\pi/4} \operatorname{sen}x\cos x\,dx = \left[\frac{\operatorname{sen}^2 x}{2}\right]_0^{\pi/4} = \frac{1}{2}\left(\operatorname{sen}^2\frac{\pi}{4} - \operatorname{sen}^2 0\right) = \frac{1}{4}$$

7) $\displaystyle\int_{0}^{2}\left[\frac{1}{x+1} - 3\cos(2\pi x)\right]dx$

$$\int_{0}^{2} \frac{1}{x+1} - 3\cos(2\pi x)dx = \left[\ln|x+1| - \frac{3}{2\pi}\operatorname{sen}(2\pi x)\right]_0^2 = \ln 3 - \ln 1 = \ln 3$$

4 APLICACIONES. CÁLCULO DE ÁREAS

4.1. Áreas limitadas por una función y el eje OX

4.1. a) La función f(x) es positiva en [a,b]

Si función f(x) es positiva en [a,b], entonces la integral definida es positiva:

$$\text{Área} = \int_a^b f(x)dx$$

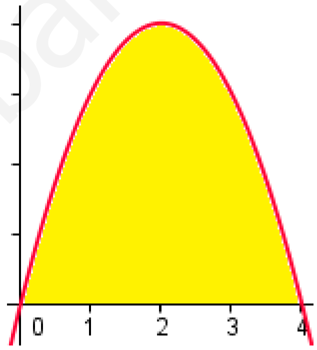
Ejemplos

1. Calcula el área encerrada por la parábola $y = 4x - x^2$ y el eje X.

La curva corta al eje X en los puntos donde y = 0:

$4x - x^2 = 0 \rightarrow x(4-x) = 0 \rightarrow x = 0 \,;\, x = 4.$

$$\text{Área} = \int_0^4 (4x - x^2)dx = 2x^2 - \frac{x^3}{3}\Big|_0^4 = 32 - \frac{64}{3} = \frac{32}{3}\ u^2$$



2. Calcula el área comprendida entre la curva $y = 3x^2 - x + 1$, el eje X y as rectas x = 0 y x = 4.

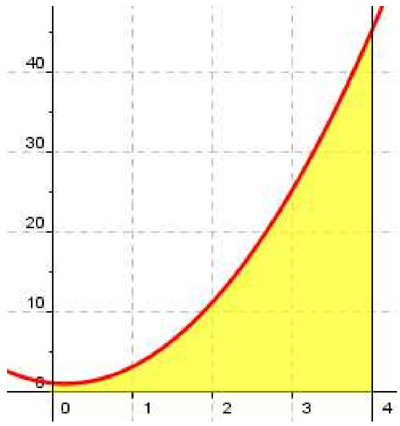
I. Calculamos las soluciones de la ecuación: $3x^2 - x + 1 = 0$

No tiene soluciones, por lo que no corta al eje *X*.

II. Buscamos una primitiva:

$$G(x) = \int (3x^2 - x + 1)dx = x^3 - \frac{1}{2}x^2 + x$$

III. Área = G(4) – G(0) = (64 – 8 + 4) – 0 = 60 u^2

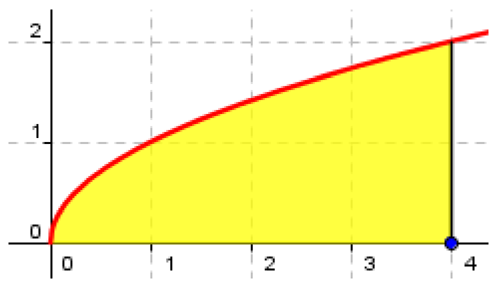


3. Halla el área bajo la curva $y = \sqrt{x}$ entre x = 0 y x = 4

I. Buscamos una primitiva:

$$G(x) = \int \sqrt{x}\,dx = \frac{3}{2}\sqrt{x^3}$$

$$\text{III. Área} = \int_0^4 \sqrt{x}\,dx = \left[\frac{2}{3}\sqrt{x^3}\right]_0^4 = \frac{2}{3}\cdot 8 = \frac{16}{3}\ u^2$$



Ejemplos

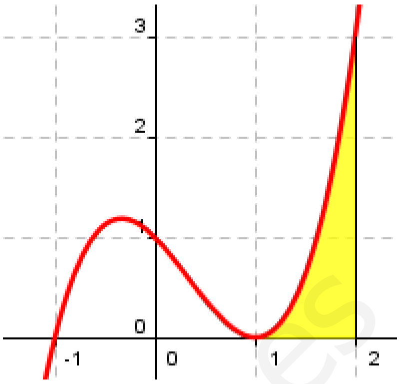
4. Calcula el área de la región limitada por la curva y = $(x-1)^2(x+1)$ y las rectas y = 0, x = 2, x = 1

Las raíces de la función son x = -1 y x = 1, a partir de x = 1 la función es positiva.

$(x-1)^2(x+1) = x^3 - x^2 - x + 1$

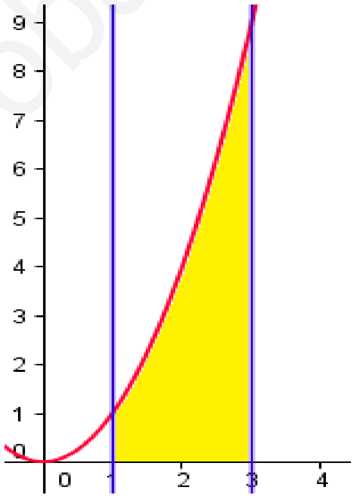
$$\text{Área} = \int_1^2 (x^3 - x^2 - x + 1)dx = \left[\frac{x^4}{4} - \frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} + x\right]_1^2$$

$$\text{Área} = \left(4 - \frac{8}{3} - 2 + 2\right) - \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{3} - \frac{1}{2} + 1\right) = \frac{4}{3} - \frac{5}{12} = \frac{11}{12}\,u^2$$



5. Calcula el área limitada por la parábola y = x^2 , el eje X y las rectas x = 1, x = 3.

$$\text{Área} = \int_1^3 x^2 dx = \left.\frac{x^3}{3}\right|_1^3 = 9 - \frac{1}{3} = \frac{26}{3}\,u^2$$



6.- Calcula el área de la región limitada por la curva $y = \dfrac{x}{x^2-2}$ y las rectas y = 0, x = 2, x = 3

$$\text{Área} = \int_2^3 \frac{x}{x^2-2}dx = \left[\frac{1}{2}\ln(x^2-2)\right]_2^3 = \frac{1}{2}\ln 7 - \frac{1}{2}\ln 2 = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{7}{2}\right)u^2$$

4.1.b) La función f(x) es negativa en [a,b]

Si f(x) es negativa en [a,b], entonces la integral definida es negativa.

$$\text{Área} = -\int_a^b f(x)\,dx = \left|\int_a^b f(x)\,dx\right|$$

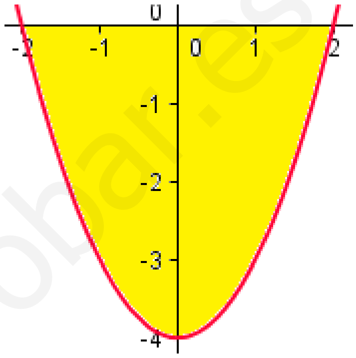
Ejemplos

1. Calcula el área comprendida entre la parábola $y = x^2 - 4$ y el eje X.

El área es el mismo que la comprendida entre la parábola

$y = -x^2 + 4$ y el eje X

$$A = \int_{-2}^{2} (-x^2+4)\,dx$$



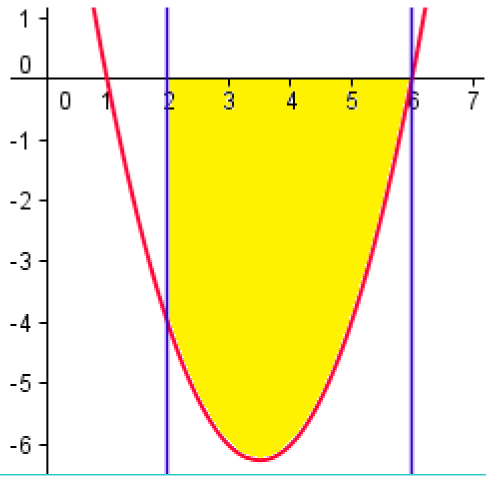
Por ser simétrica respecto eje Y, se verifica:

$$A = 2\int_0^2 (-x^2+4)\,dx = \left[-\frac{x^3}{3}+4x\right]_0^2 = 2\left(-\frac{8}{3}+8\right) = \frac{32}{3}u^2$$

2. Calcula el área limitada por la parábola $y = x^2 - 7x + 6$, el eje X y las rectas $x = 2$, $x = 6$.

$$\text{Área} = \left|\int_2^6 (x^2-7x+6)\,dx\right| = \left|\left[\frac{x^3}{3}-\frac{7}{2}x^2+6x\right]_2^6\right|$$

$$\text{Área} = = \left|72-126+36-\frac{8}{3}+14-12\right| = \frac{56}{3}u^2$$



4.1. c) La función toma valores positivos y negativos en [a,b]

Si la función toma valores positivos y negativos en [a,b], determinamos los puntos de corte de la función con el eje OX.

Se divide el recinto en varios recintos de forma que en cada uno de ellos la función mantiene el mismo signo. Se calcula por separado la integral definida de la función en cada intervalo tomando sus valores en valor absoluto.

El área del recinto será la suma de las áreas de cada recinto.

Ejemplos

1. Calcula el área comprendida entre la parábola $y = x^3 - 6x^2 + 8x$ y el eje X.

La curva corta al eje X en x = 0, x = 2, x = 4

En [0,2] la curva es positiva ya que f(1) = 3

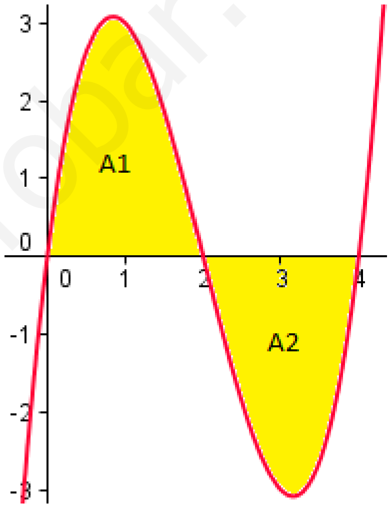
En [2,4] la curva es negativa ya que f(3) = -3

$$A1 = \int_0^2 (x^3 - 6x^2 + 8x)\,dx = \left[\frac{x^4}{4} - 2x^3 + 4x^2\right]_0^2 = 4 - 16 + 16 = 4u^2$$

$$A2 = \left|\int_2^4 (x^3 - 6x^2 + 8x)\,dx\right| = \left|\left[\frac{x^4}{4} - 2x^3 + 4x^2\right]_2^4\right|$$

$$A2 = |64 - 128 + 64 - 4 + 16 - 16| = 4u^2$$

Por tanto, el área vale 8 u^2.



2. Halla el área comprendida entre la función $y = x^3 - x^2 - 6x$ y el eje X.

I. Hallamos las soluciones de la ecuación: $y = x^3 - x^2 - 6x$

$x(x^2 - x - 6) = 0 \rightarrow x = 0,\ x = 3,\ x = -2$

II. Buscamos su primitiva:

$$G(x) = \int (x^3 - x^2 - 6x)\,dx = \frac{x^4}{4} - \frac{x^3}{3} - 3x^2$$

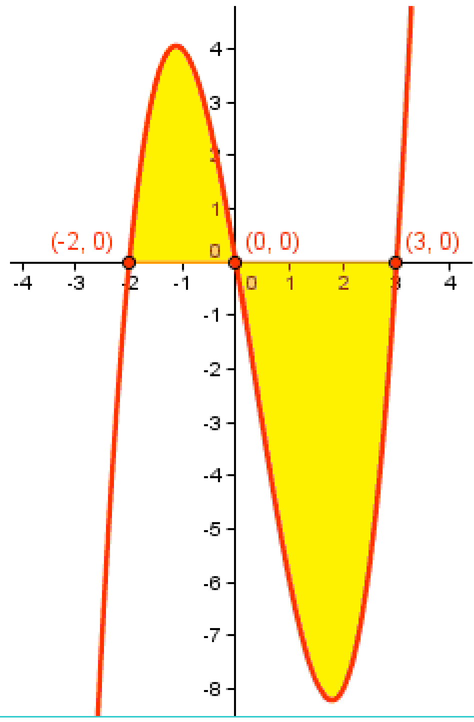
III. Área:

$$A = \int_{-2}^{0} f(x)\,dx + \left|\int_0^3 f(x)\,dx\right|$$

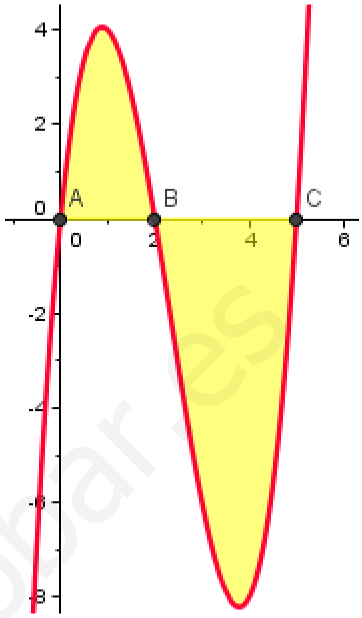
$$\int_{-2}^{0} f(x)\,dx = G(0) - G(-2) = 0 - \left(-\frac{16}{3}\right) = \frac{16}{3}$$

$$\left|\int_0^3 f(x)\,dx\right| = |G(3) - G(0)| = \left|-\frac{63}{4}\right| = \frac{63}{4}$$

$$A = \frac{16}{3} + \frac{63}{4} = \frac{253}{12}\,u^2$$



3. Calcular el área que encierra con el eje x la gráfica de la función: $f(x) = x^3 - 7x^2 + 10x$



Calculamos los puntos de corte con el eje *x*:

$x^3 - 7x^2 + 10x = x(x^2 - 7x + 10) = x(x - 5)(x - 2) = 0$

Puntos de cortes: x = 0, x = 2, x = 5

La función es positiva en [0, 2] y negativa en [2,5]

- o $f(1) = 1 - 7 + 10 = 4 > 0$
- o $f(3) = 3^3 - 7 \cdot 3^2 + 10 \cdot 3 = 27 - 63 + 30 = -7 < 0$

$$\int_0^5 f(x)\,dx = \int_0^2 f(x)\,dx + \left|\int_2^5 f(x)\,dx\right|$$

En [0, 2] la función es positiva, luego el área es:

$$\int_0^2 f(x)\,dx = \int_0^2 (x^3 - 7x^2 + 10x)\,dx = \left[\frac{x^4}{4} - \frac{7x^3}{3} + 5x^2\right]_0^2 = 4 - \frac{56}{3} + 20 = \frac{16}{3}\,u^2$$

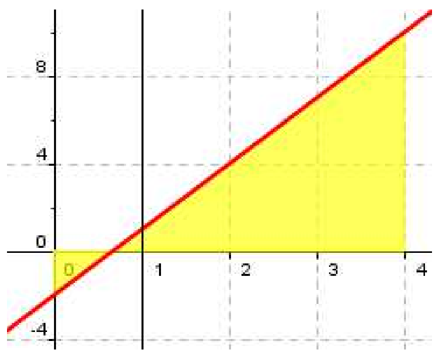
En [2,5] la función es negativa, luego el área es:

$$\left|\int_2^5 f(x)\,dx\right| = \left[\frac{x^4}{4} - \frac{7x^3}{3} + 5x^2\right]_2^5 = \left|\left(\frac{625}{4} - \frac{875}{3} + 125\right) - \frac{16}{3}\right| = \left|-\frac{125}{12} - \frac{16}{3}\right| = \frac{63}{4}\,u^2$$

Por tanto, el área total es:

$$\text{Área} = \int_0^5 f(x)\,dx = \frac{16}{3} + \frac{63}{4} = \frac{253}{12}\,u^2$$

4. Calcula el área bajo la curva y = 3x – 2 entre x = -1 y x = 1



I. Calculamos las soluciones de la ecuación: $3x - 2 = 0$

$$x = \frac{2}{3}$$

II. Buscamos una primitiva:

$$G(x) = \int (3x - 2)dx = \frac{3}{2}x^2 - 2x$$

III. $\text{Área} = \left|\int_{-1}^{2/3} (3x - 2)dx\right| + \int_{2/3}^{1} (3x - 2)dx$

Área = $|G(2/3) - G(-1)| + G(1) - G(2/3) = \frac{25}{6} + \frac{1}{6} = \frac{26}{6} = \frac{13}{3}\ u^2$

4.2. Áreas limitadas por dos curvas.

Si las curvas son $f(x)$ y $g(x)$, siendo $f(x) > g(x)$ en todo el intervalo $[a, b]$, se cumple que el área limitada por las dos curvas en el intervalo $[a, b]$ es:

$$\text{Área} = \int_a^b [f(x) - g(x)]dx$$

Si las curvas se cortan en el intervalo, se subdivide el intervalo en otros menores, en cada uno de los cuales se aplican la integral anterior, determinando qué curva está por encima, y se suma el resultado.

En todo caso siempre es necesario hallar los puntos de corte entre las curvas, que se calculan igualando las expresiones algebraicas de ambas funciones:

$$f(x) = g(x)$$

y resolviendo la ecuación resultante.

Ejemplos

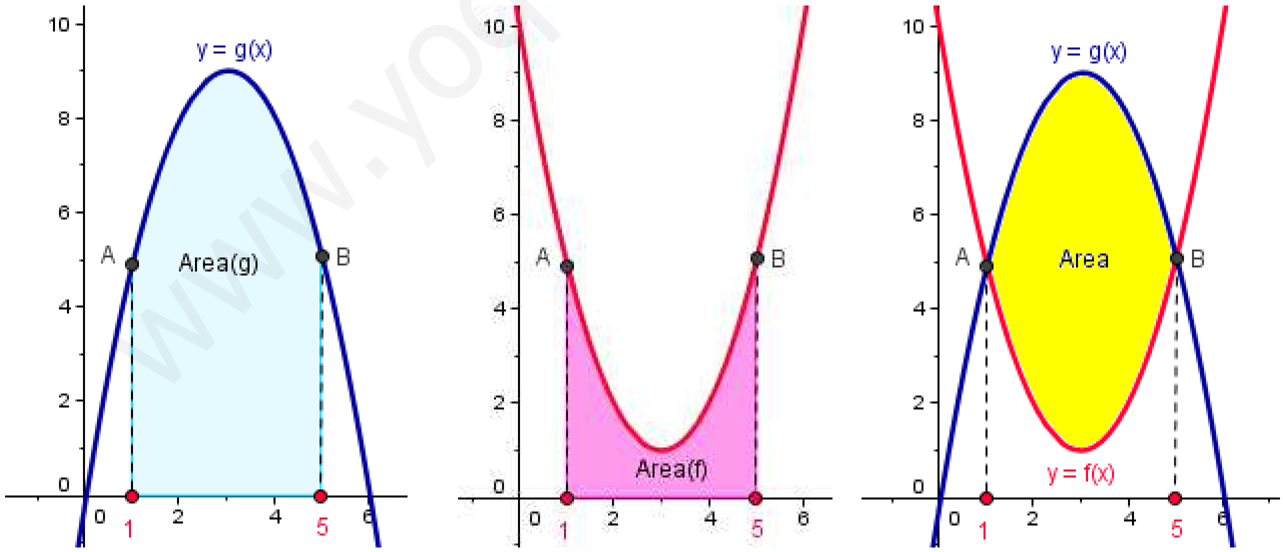
1. Determine el área encerrada entre las curvas $f(x) = x^2 - 6x + 10$ y $g(x) = 6x - x^2$.

Determinamos los puntos de corte entre ambas curvas:

$f(x) = g(x) \to x^2 - 6x + 10 = 6x - x^2$

$2x^2 - 12x + 10 = 0 \to x^2 - 6x + 5 = 0 \to x = 1, x = 5$

Observando las gráficas de f y g en distintos sistemas coordenados podemos ver que el área buscada es la diferencia de las áreas calculadas en los ejemplos anteriores.



Calculamos el área aplicando la fórmula:

$$\text{Área} = \int_1^5 [g(x) - f(x)]dx = \int_1^5 [6x - x^2 - x^2 + 6x - 10]dx = \int_1^5 [-2x^2 + 12x - 10]dx = \left[\frac{2}{3}x^3 + 6x^2 - 10x\right]_1^5$$

$$\text{Área} = \frac{50}{3} + \frac{14}{3} = \frac{64}{3}\, u^2$$

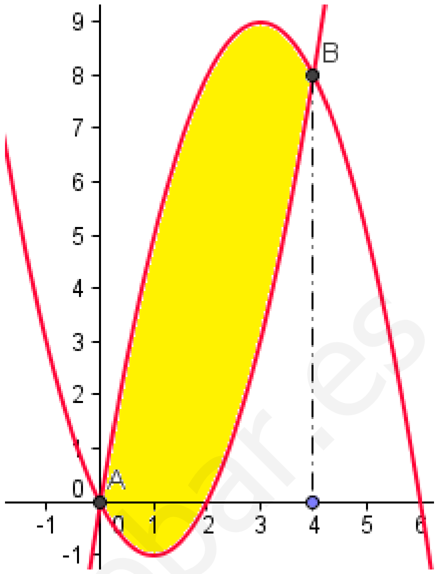
2. Calcula el área comprendida entre las parábolas $y = 6x - x^2$, $y = x^2 - 2x$

Calculamos los puntos de cortes entre las parábolas:

$6x - x^2 = x^2 - 2x \rightarrow 8x - 2x^2 = 0 \rightarrow x = 0,\ x = 4$

$$\text{Área} = \int_0^4 \left[(6x - x^2) - (x^2 - 2x)\right] dx = \int_0^4 (8x - 2x^2)dx$$

$$\text{Área} = \left[4x^2 - \frac{2}{3}x^3\right]_0^4 = 64 - \frac{128}{3} = \frac{64}{3}\ u^2$$



3. Calcula el área comprendida entre las parábolas $y = x^2 - 5$ e $y = -x^2 + 5$.

I. Calculamos los límites de integración determinando los puntos de corte entre ambas curvas:

$x^2 - 5 = -x^2 + 5 \rightarrow x = \pm\sqrt{5}$

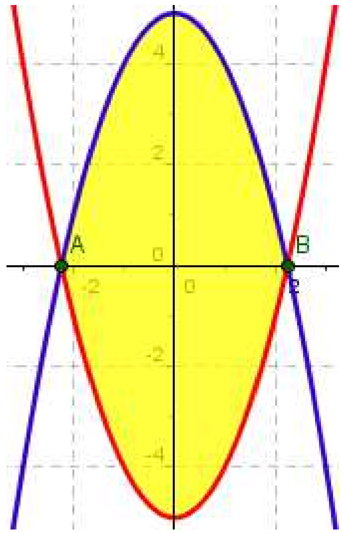
II. Área:

$$\int_{-\sqrt{5}}^{\sqrt{5}} \left[(-x^2 + 5) - (x^2 - 5)\right] dx = \int_{-\sqrt{5}}^{\sqrt{5}} (-2x^2 + 10)\,dx =$$

$$= \left[-\frac{2}{3}x^3 + 10x\right]_{-\sqrt{5}}^{\sqrt{5}} = -\frac{10}{3}\sqrt{5} + 10\sqrt{5} - \left(\frac{10}{3}\sqrt{5} - 10\sqrt{5}\right) =$$

$$= \frac{20}{3}\sqrt{5} + \frac{20}{3}\sqrt{5} = \frac{40}{3}\sqrt{5}\ u^2$$

$$\text{Área} = \frac{40}{3}\sqrt{5}$$



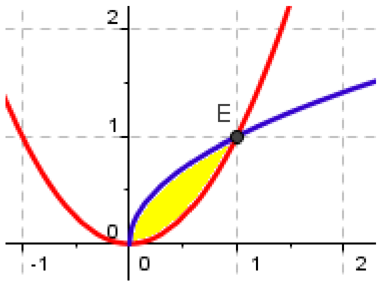
4. Calcular el área limitada entre las curvas $y = x^2$ e $y^2 = x$.

I. Calculamos los límites de integración determinando los puntos de corte entre ambas curvas:

$x = x^4 \rightarrow x = 0\ ,\ x = 1$

II. Área:

$$\int_0^1 (\sqrt{x} - x^2)\,dx = \left[\frac{2}{3}\sqrt{x^3} - \frac{x^3}{3}\right]_0^1 = \frac{2}{3} - \frac{1}{3} = \frac{1}{3}\ u^2$$



5.- Calcula el área comprendida entre las curvas dadas en cada uno de los ejercicios siguientes:

a) $y = 4 - x^2$; $y = 8 - 2x^2$

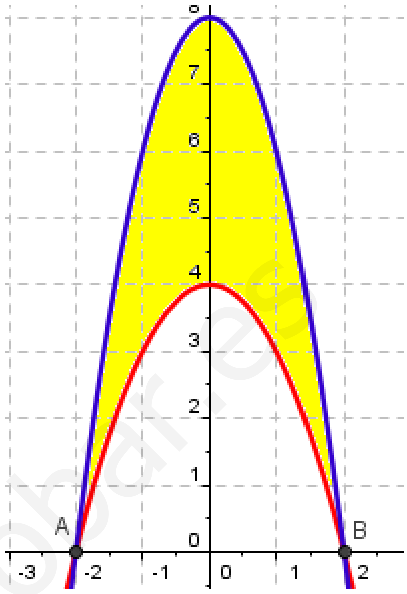
I. Calculamos los límites de integración determinando los puntos de corte entre ambas curvas:

$4 - x^2 = 8 - 2x^2 \rightarrow x^2 = 4 \rightarrow x = -2 \;, x = 2$

II. Área:

$$\int_{-2}^{2}\left[\left(8-2x^2\right)-\left(4-x^2\right)\right]dx = \int_{-2}^{2}\left(-x^2+4\right)dx =$$

$$\left[-\frac{x^3}{3}+4x\right]_{-2}^{2} = \left(-\frac{8}{3}+8\right)-\left(\frac{8}{3}-8\right)=\frac{16}{3}+\frac{16}{3}=\frac{32}{3}\ u^2$$



b) $y = x^2$; $y = 4 - x^2$

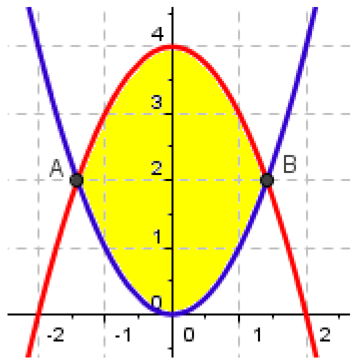
I. Calculamos los límites de integración determinando los puntos de corte entre ambas curvas:

$4 - x^2 = x^2 \rightarrow x^2 = 2 \rightarrow x = \pm\sqrt{2}$

II. Área:

$$\int_{-\sqrt{2}}^{\sqrt{2}}\left[\left(4-x^2\right)-\left(x^2\right)\right]dx = \int_{-\sqrt{2}}^{\sqrt{2}}\left(4-2x^2\right)dx = \left[4x-\frac{2}{3}x^3\right]_{-\sqrt{2}}^{\sqrt{2}} =$$

$$=\left(4\sqrt{2}-\frac{4\sqrt{2}}{3}\right)-\left(-4\sqrt{2}+\frac{4\sqrt{2}}{3}\right)=\frac{8\sqrt{2}}{3}+\frac{8\sqrt{2}}{3}=\frac{16\sqrt{2}}{3}\ u^2$$



c) $y = x^3 - 3x^2 + 3x$; $y = x$

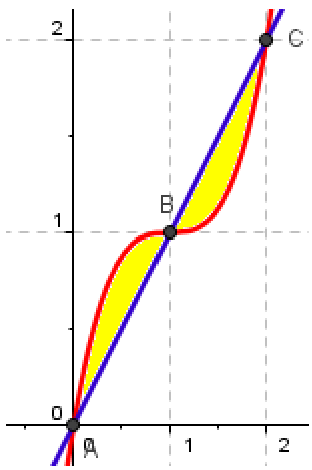
I. Calculamos los límites de integración determinando los puntos de corte entre ambas curvas:

$x^3 - 3x^2 + 3x = x \rightarrow x^3 - 3x^2 + 2x = 0 \rightarrow x = 0,\ x = 1,\ x = 2$

II. Área:

$$\int_{0}^{1}(x^3-3x^2+2x)dx + \int_{1}^{2}(-x^3+3x^2-2x)dx =$$

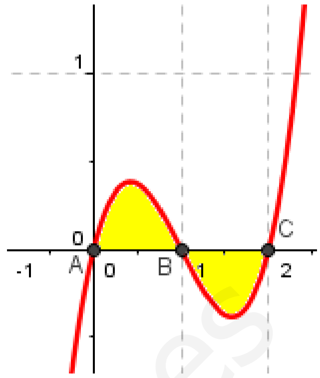
$$\left[\frac{x^4}{4}-x^3+x^2\right]_0^1 + \left[-\frac{x^4}{4}+x^3-x^2\right]_1^2 = \frac{1}{4}+\frac{1}{4}=\frac{1}{2}\ u^2$$



d) y = x(x – 1)(x – 2) ; y = 0

I. Calculamos los límites de integración determinando los puntos de corte entre ambas curvas:

$x^3 - 3x^2 + 2x = 0 \rightarrow x = 0,\ x = 1,\ x = 2$



II. Área:

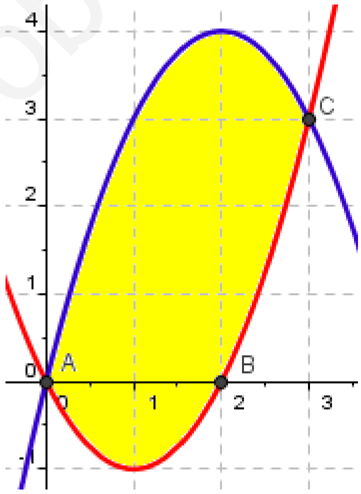
$$\int_0^1 (x^3 - 3x^2 + 2x)dx + \left|\int_1^2 (-x^3 + 3x^2 - 2x)dx\right| =$$

$$\left[\frac{x^4}{4} - x^3 + x^2\right]_0^1 + \left|-\frac{x^4}{4} + x^3 - x^2\right|_1^2 = \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{1}{2}\ u^2$$

e) y = x² – 2x ; y = –x² + 4x

I. Calculamos los límites de integración determinando los puntos de corte entre ambas curvas:

$-x^2 + 4x = x^2 - 2x \rightarrow 2x^2 - 6x = 0 \rightarrow x = 0,\ x = 3$



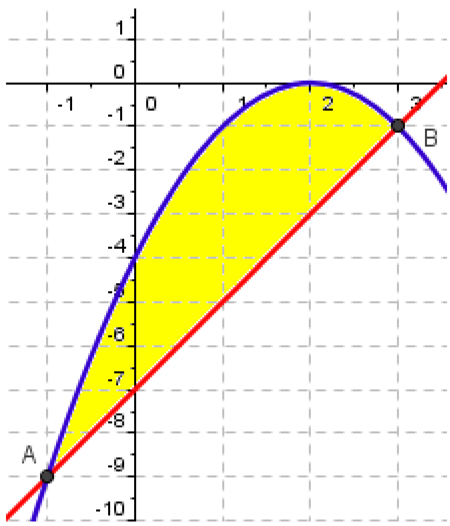
II. Área:

$$\int_0^3 (-2x^2 + 6x)dx = \left[-\frac{2}{3}x^3 + 3x^2\right]_0^3 = (-18 + 27) = 9\ u^2$$

f) y = –x² + 4x – 4 ; y = 2x – 7

I. Calculamos los límites de integración determinando los puntos de corte entre ambas curvas:

$-x^2 + 4x - 4 = 2x - 7 \rightarrow x^2 - 2x - 3 = 0 \rightarrow x = -1\ ,\ x = 3$



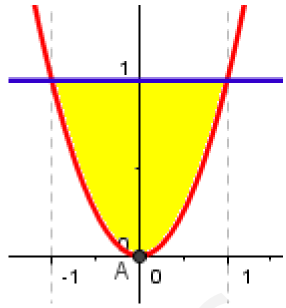
II. Área:

$$\int_{-1}^3 (-x^2 + 2x + 3)dx = \left[-\frac{x^3}{3} + x^2 + 3x\right]_{-1}^3 = 9 + \frac{5}{3} = \frac{32}{3}\ u^2$$

g) $y = x^2$; $y = 1$

I. Calculamos los límites de integración determinando los puntos de corte entre ambas curvas:

$x^2 = 1 \rightarrow x = -1$; $x = 1$



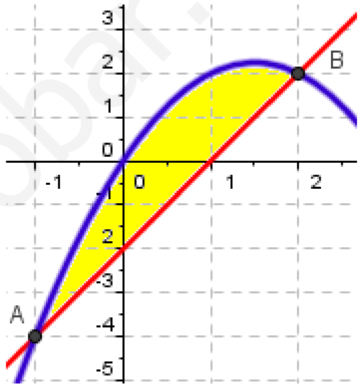
II. Área:

$$\int_{-1}^{1}(1-x^2)dx = \left[x - \frac{1}{3}x^3\right]_{-1}^{1} = \left(1-\frac{1}{3}\right)-\left(-1+\frac{1}{3}\right) = \frac{4}{3}\ u^2$$

h) $y = x(3 - x)$ y la recta $y = 2x - 2$.

I. Calculamos los límites de integración determinando los puntos de corte entre ambas curvas:

$-x^2 + 3x = 2x - 2 \rightarrow x^2 - x - 2 = 0 \rightarrow x = -1$, $x = 2$



II. Área:

$$\int_{-1}^{2}(-x^2 + x + 2)dx = \left[-\frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} + 2x\right]_{-1}^{2} = \frac{10}{3} + \frac{7}{6} = \frac{27}{6} = \frac{9}{2}\ u^2$$