1 LÍMITE DE FUNCIONES TRIGONOMÉTRICAS. FUNCIONES EQUIVALENTES

Vamos a calcular dos límites necesarios para la derivación de funciones trigonométricas.

1.1.- Cálculo de $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\operatorname{sen} x}{x}$

Consideremos la función f(x) = $\frac{\operatorname{sen} x}{x}$.

Esta función no está definida para x = 0. Sin embargo, como ahora veremos, existe el límite para x = 0.

Construimos una tabla de valores próximos a 0:

Por la izquierda:

$x\to 0^-$	-0,4	-0,3	-0,2	-0,1	…
$\frac{\operatorname{sen} x}{x}$	0,973	0,985	0,993	0,998	…

Por la derecha:

$x\to 0^+$	0,1	0,2	0,3	0,4	…
$\frac{\operatorname{sen} x}{x}$	0,998	0,993	0,985	0,973	…

Los resultados de la tabla sugieren que el límite es 1. Esto implica que x y sen x toman valores prácticamente iguales en el entorno de 0, ya que su cociente se aproxima a 1.

En las proximidades del 0 se verifica que sen x < x < tg x

Dividiendo la desigualdad por sen x, obtenemos: $1<\frac{x}{\operatorname{sen} x}<\frac{1}{\cos x} \Rightarrow \cos x<\frac{\operatorname{sen} x}{x}<1$

$\lim\limits_{x\to 0}1\le \lim\limits_{x\to 0}\frac{\operatorname{sen} x}{x}\le \lim\limits_{x\to 0}\cos x \Rightarrow$ Como $\lim\limits_{x\to 0}\cos x=1$ y $\lim\limits_{x\to 0}1=1$ se verifica $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\operatorname{sen} x}{x}=1$

Cuando x→ 0, las funciones sen x y x son infinitésimos equivalentes.

Para su aplicación se puede sustituir x por cualquier variable $\alpha(x)$ que también sea un infinitésimo.

Ejemplos:

a) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\operatorname{sen} 3x}{3x}=1$ b) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\operatorname{sen} x^2}{x^2}=1$ c) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\operatorname{sen}\sqrt{x}}{\sqrt{x}}=1$

1.2.- Cálculo de $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\operatorname{tg} x}{x}$

La sustitución directa conduce a la indeterminación $\frac{0}{0}$, pero expresando tg x = $\frac{\operatorname{sen} x}{\cos x}$ obtenemos:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{tg} x}{x}=\lim_{x\to 0}\left(\frac{\operatorname{sen} x}{\cos x}\right)\frac{1}{x}=\lim_{x\to 0}\left(\frac{\operatorname{sen} x}{x}\right)\left(\frac{1}{\cos x}\right)=1\cdot 1=1$$

Por tanto, $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\operatorname{tg} x}{x}=1$

Cuando x→ 0, las funciones tg x y x son infinitésimos equivalentes.

Ejemplos:

a) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\operatorname{tg} 2x}{2x}=1$ b) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\operatorname{tg} 3x^2}{3x^2}=1$ c) $\lim\limits_{x\to 1}\frac{\operatorname{tg}(x-1)}{x-1}=1$

1.3.- Funciones equivalentes

Consideremos dos funciones f(x) y g(x) que verifican: $\lim_{x\to a} f(x)=0 \;\; \lim_{x\to a} g(x)=0$

Si el límite del cociente de ambas funciones tiene por límite 1 en el punto x = a toman valores prácticamente iguales en un entorno de ese punto. Las funciones que tienen esta propiedad se llaman ***funciones infinitésimos equivalentes***.

f(x) y g(x) son infinitésimos equivalentes si $\lim_{x\to a}\dfrac{f(x)}{g(x)}=1$

Un resultado interesante y útil en el cálculo de límites es el siguiente teorema que permite sustituir en el cálculo de límites una función por otra equivalente.

Si en una expresión figura como factor o divisor una función, el límite de la expresión no varía al sustituir dicha función por otra equivalente.

Vamos a ver algunos ejemplos en los cuales para resolver la indeterminación aplicamos funciones equivalentes.

Ejemplo 1

$$\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{sen}7x}{x}=\frac{0}{0}$$

$\lim_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{sen}7x}{x}=\lim_{x\to 0}7\cdot\dfrac{\operatorname{sen}7x}{7x}=7\cdot 1=7$ O bien, sustituyendo directamente sen 7x por 7x (funciones equivalentes).

$$\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{sen}7x}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{7x}{x}=7$$

Ejemplo 2

$$\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{sen}6x}{\operatorname{tg}2x}=\frac{0}{0}$$

$\lim_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{sen}6x}{\operatorname{tg}2x}=\lim_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{sen}6x}{6x}\cdot\dfrac{2x}{\operatorname{tg}2x}\cdot\dfrac{6x}{2x}=1\cdot 1\cdot 3=3$ O bien, sustituyendo directamente sen 6x por 6x y tg 2x por 2x

$$\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{sen}6x}{\operatorname{tg}2x}=\lim_{x\to 0}\frac{6x}{2x}=\lim_{x\to 0}3=3$$

Ejemplo 3

$\lim_{x\to 0}\dfrac{1-\cos x}{\frac{x^2}{2}}=\dfrac{0}{0}$ (Demostraremos que $\dfrac{x^2}{2}$ y 1- cos x son funciones equivalentes)

Para hallar este límite basta tener en cuenta la fórmula del ángulo mitad: $\operatorname{sen}^2\dfrac{x}{2}=\dfrac{1-\cos x}{2}$

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{\frac{x^2}{2}}=\lim_{x\to 0}\frac{2\operatorname{sen}^2\left(\frac{x}{2}\right)}{\frac{x^2}{2}}=\lim_{x\to 0}\frac{2\left(\frac{x}{2}\right)^2}{\frac{x^2}{2}}=\lim_{x\to 0}\frac{4x^2}{4x^2}=1 \Rightarrow \lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{\frac{x^2}{2}}=1$$

Los infinitésimos equivalentes más empleados son: ($\alpha(x) \to 0$)

$\operatorname{sen} \alpha(x)$	$\alpha(x)$
$1 - \cos \alpha(x)$	$\frac{1}{2}\alpha(x)^2$
$\operatorname{tg} \alpha(x)$	$\alpha(x)$
$\operatorname{Ln}[1 + \alpha(x)]$	$\alpha(x)$
$e^{\alpha(x)} - 1$	$\alpha(x)$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)}{x} = \lim_{x\to 0}\frac{1}{x}\ln(1+x) = \lim_{x\to 0}\ln(1+x)^{\frac{1}{x}} = \ln\lim_{x\to 0}(1+\frac{1}{\frac{1}{x}})^{\frac{1}{x}} = \ln e = 1$$

$\operatorname{Ln}(1+x) \sim x \Rightarrow e^{\ln(1+x)} \sim e^x \Rightarrow (1+x) \sim e^x \Rightarrow e^x - 1 \sim x$

Por tanto, $\lim_{x\to 0}\frac{e^x - 1}{x} = 1$

Ejemplo 4

$$\lim_{x\to 0}\frac{2\operatorname{sen}^2\left(\frac{x}{2}\right)}{x} = \lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{sen}^2\left(\frac{x}{2}\right)}{\frac{x}{2}} = \lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{sen}\left(\frac{x}{2}\right)}{\frac{x}{2}}\operatorname{sen}\left(\frac{x}{2}\right) = 1\cdot 0 = 0$$

Ejemplo 5

$$\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{sen}5x}{\operatorname{sen}2x} = \frac{0}{0} = \lim_{x\to 0}\frac{5x}{2x} = \frac{5}{2}$$

Ejemplo 6

$$\lim_{x\to 0}\frac{x(1-\cos x)}{\operatorname{sen}^3 x} = \frac{0}{0}$$

Aplicamos la equivalencia de las funciones $\frac{x^2}{2}$ y 1- cos x y la de sen x y x

$$\lim_{x\to 0}\frac{x(1-\cos x)}{\operatorname{sen}^3 x} = \lim_{x\to 0}\frac{x\cdot\frac{x^2}{2}}{x^3} = \lim_{x\to 0}\frac{x^3}{2x^3} = \frac{1}{2}.$$

Ejemplo 7

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos 2x}{3x^2} = \frac{0}{0} = \lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{2}(2x)^2}{3x^2} = \lim_{x\to 0}\frac{\frac{4x^2}{2}}{3x^2} = \lim_{x\to 0}\frac{2x^2}{3x^2} = \frac{2}{3}$$

Ejemplo 8

$$\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{sen}^2 3x}{x\operatorname{sen}2x} = \frac{0}{0} = \lim_{x\to 0}\frac{(3x)^2}{x\cdot 2x} = \lim_{x\to 0}\frac{9x^2}{2x^2} = \frac{9}{2}$$

Ejercicio 1. Calcular los siguientes límites utilizando funciones equivalentes en x = 0:

1) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{sen}8x}{4x}$ 2) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{sen}14x}{7x}$ 3) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{tg}2x}{\operatorname{sen}5x}$

4) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{tg}8x}{4x}$ 5) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(1-\cos x)}{\operatorname{sen}^2 x}$ 6) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos 2x}{x^2}$

7) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x\operatorname{sen}x}{1-\cos x}$ 8) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2+\operatorname{sen}x}{x}$

SOLUCIONES

1) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{sen}8x}{4x}=\dfrac{0}{0}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{8x}{4x}=2$

2) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{sen}14x}{7x}=\dfrac{0}{0}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{14x}{7x}=2$

3) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{tg}2x}{\operatorname{sen}5x}=\dfrac{0}{0}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2x}{5x}=\dfrac{2}{5}$

4) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{tg}8x}{4x}=\dfrac{0}{0}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{8x}{4x}=2$

5) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(1-\cos x)}{\operatorname{sen}^2 x}=\dfrac{0}{0}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\frac{1}{2}x^2}{x^2}=\dfrac{1}{2}$

6) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos 2x}{x^2}=\dfrac{0}{0}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\frac{1}{2}4x^2}{x^2}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2x^2}{x^2}=2$

7) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x\operatorname{sen}x}{1-\cos x}=\dfrac{0}{0}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2}{\frac{1}{2}x^2}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2x^2}{x^2}=2$

8) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2+\operatorname{sen}x}{x}=\dfrac{0}{0}=\lim\limits_{x\to 0}\left(x+\dfrac{\operatorname{sen}x}{x}\right)=1$

Ejercicio 2. Calcular los siguientes límites utilizando funciones equivalentes en x = 1:

1) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\operatorname{sen}(x-1)}{x-1}$ 2) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\operatorname{tg}(x-1)}{x-1}$

SOLUCIONES

1) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\operatorname{sen}(x-1)}{x-1}=\dfrac{0}{0}=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x-1}{x-1}=1$

2) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\operatorname{tg}(x-1)}{x-1}=\dfrac{0}{0}=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x-1}{x-1}=1$