

1 Una recta es paralela a dos planos secantes, ¿a quién es también paralela?

SOLUCIÓN:

Una recta paralela a dos planos secantes también es paralela a la arista que determinan ambos planos.

2 Hallar la ecuación de la recta s que pasa por el punto $A(1, 0, 1)$ y es paralela a la recta de r

$$r \equiv \begin{cases} x + y + z - 3 = 0 \\ 2x - 2y + z - 1 = 0 \end{cases}$$

SOLUCIÓN:

Vector director de la recta r : $\vec{u} = (1, 1, 1) \times (2, -2, 1) = (3, 1, -4)$

Ecuación de la recta s : $\frac{x-1}{1} = \frac{y}{1} = \frac{z-1}{-4}$

3 Dados los puntos $M(-3,0,1)$, $P(3,2,-8)$ y la recta r :

$$r \equiv \frac{x+1}{-2} = \frac{y-4}{1} = \frac{z+2}{3}$$

Trazar por M y P sendas rectas paralelas a r y averiguar si son distintas de r o coincidentes con ellas.

SOLUCIÓN:

Dos rectas son paralelas si sus vectores de dirección son paralelos, es decir, proporcionales.

Recta paralela a r que pase por M : $s \equiv \frac{x+3}{-2} = \frac{y}{1} = \frac{z-1}{3}$

Recta paralela a r que pase por P : $t \equiv \frac{x-3}{-2} = \frac{y-2}{1} = \frac{z+8}{3}$

Dos rectas con vectores de dirección paralelos pueden ser paralelas o coincidentes.

Sea $r \equiv A + \langle \vec{u} \rangle$ y $s \equiv B + \langle \vec{v} \rangle$

- r es paralela a s si el rango de la matriz formada por $\{\vec{u}, \vec{v}, \overline{AB}\}$ es de rango 2.
- r es coincidente con s si el rango de la matriz formada por $\{\vec{u}, \vec{v}, \overline{AB}\}$ es de rango 1.

Sea $A = (-1, 4, -2)$ un punto de r y $\vec{u} = (-2, 1, 3)$ un vector de dirección de r .

$\overline{AM} = (-2, -4, 3) \rightarrow \{\vec{u}, \overline{AM}\}$ no son proporcionales $\rightarrow r$ y s son paralelas.

$\overline{AP} = (4, -2, -6) \rightarrow \{\vec{u}, \overline{AP}\}$ son proporcionales $\rightarrow r$ y t son coincidentes.

4 Dado el plano $\pi \equiv x + y + z + 1 = 0$, ¿cuál es la ecuación del haz de planos paralelos al mismo? Justifica tu respuesta.

SOLUCIÓN:

La ecuación del haz de planos es:

$$x + y + z + k = 0 \text{ siendo } k \text{ cualquier } n^{\circ} \text{ real.}$$

Al tener todos los planos el mismo vector normal son paralelos.

5 ¿Qué condición han de cumplir las coordenadas de los vectores direccionales de dos rectas para que sean paralelas?

SOLUCIÓN:

Sea $\vec{u} = (a, b, c)$ y $\vec{v} = (a', b', c')$ los vectores direccionales de r y s , respectivamente.

Si las rectas r y s son paralelas sus vectores direccionales también lo son, luego las coordenadas son proporcionales:

$$r \parallel s \rightarrow \frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} = \frac{c}{c'}$$

6 a) ¿Cuál es la forma general de los planos paralelos al plano OXY?
b) ¿Cuál es la forma general de los planos paralelos al plano OXZ?
c) ¿Cuál es la forma general de los planos paralelos al plano OYZ?

SOLUCIÓN:

a) Los planos paralelos a OXY están definidos por (A, \vec{i}, \vec{j}) , siendo $A(x_0, y_0, z_0)$ un punto del plano.

Su vector normal es: $\vec{i} \times \vec{j} = \vec{k}$.

Su ecuación general es:

$$(x - x_0, y - y_0, z - z_0) \cdot (0, 0, 1) = 0 \rightarrow z - z_0 = 0 \rightarrow z = z_0$$

b) Los planos paralelos a OXZ están definidos por (A, \vec{i}, \vec{k}) , siendo $A(x_0, y_0, z_0)$ un punto del plano.

Su vector normal es: $\vec{i} \times \vec{k} = -\vec{j}$.

Su ecuación general es:

$$(x - x_0, y - y_0, z - z_0) \cdot (0, 1, 0) = 0 \rightarrow y - y_0 = 0 \rightarrow y = y_0$$

c) Los planos paralelos a OYZ están definidos por (A, \vec{j}, \vec{k}) , siendo $A(x_0, y_0, z_0)$ un punto del plano.

Su vector normal es: $\vec{j} \times \vec{k} = \vec{i}$.

Su ecuación general es:

$$(x - x_0, y - y_0, z - z_0) \cdot (1, 0, 0) = 0 \rightarrow x - x_0 = 0 \rightarrow x = x_0$$

7 ¿Qué condición deben verificar los coeficientes de dos planos dados en forma general para que sean paralelos?

SOLUCIÓN:

Dos planos $ax + by + cz + d = 0$ y $a'x + b'y + c'z + d' = 0$ son paralelos si los vectores normales son proporcionales, es decir, se verifica:

$$\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} = \frac{c}{c'} :$$

8 Hallar la ecuación de la recta s que pasa por el punto $A(0, 1, 2)$ y es paralela a la recta

$$r \equiv \frac{x-1}{2} = \frac{y-2}{3} = \frac{z-1}{5}$$

SOLUCIÓN:

La ecuación de la recta viene determinada por el punto A y el vector director de r $\vec{u} = (2, 3, 5)$:

$$s \equiv \frac{x}{2} = \frac{y-1}{3} = \frac{z-2}{5}$$

9 Calcular la ecuación de un plano que pasa por el punto $P(1, -1, 2)$ y es paralelo al plano π de ecuación $2x + 3y - z - 4 = 0$

SOLUCIÓN:

Dos planos $ax + by + cz + d = 0$ y $a'x + b'y + c'z + d' = 0$ son paralelos si verifican $\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} = \frac{c}{c'}$:

- Serán distintos si $\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} = \frac{c}{c'} \neq \frac{d}{d'}$
- Serán coincidentes si $\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} = \frac{c}{c'} = \frac{d}{d'}$

Un plano $\pi' \parallel \pi$ es de la forma $2(x - x_0) + 3(y - y_0) - (z - z_0) = 0$, siendo $P(x_0, y_0, z_0)$ un punto de π' :

$$\pi': 2(x - 1) + 3(y + 1) - (z - 2) = 0 \rightarrow \pi': 2x + 3y - z + 3 = 0$$

10 a) ¿Cuál es la forma general de los planos paralelos al eje OX?
 b) ¿Cuál es la forma general de los planos paralelos al eje OY?
 c) ¿Cuál es la forma general de los planos paralelos al eje OZ?
 Calcula el vector normal de dichos planos.

SOLUCIÓN:

Sea $\pi: Ax + By + Cz + D = 0$. Su vector normal es $\vec{n} = (A, B, C)$.

a) El vector direccional de eje OX es $\vec{i} = (1, 0, 0)$.

Si π es un plano paralelo a OX $\rightarrow \vec{n} \perp \vec{i} \rightarrow \vec{n} \cdot \vec{i} = 0 \rightarrow A = 0$

El vector normal del plano es de la forma: $(0, B, C) \rightarrow$ Ecuación general: $By + Cz + D = 0$

b) El vector direccional de eje OY es $\vec{j} = (0, 1, 0)$.

Si π es un plano paralelo a OY $\rightarrow \vec{n} \perp \vec{j} \rightarrow \vec{n} \cdot \vec{j} = 0 \rightarrow B = 0$

El vector normal del plano es de la forma: $(A, 0, C) \rightarrow$ Ecuación general: $Ax + Cz + D = 0$

c) El vector direccional de eje OZ es $\vec{k} = (0, 0, 1)$.

Si π es un plano paralelo a OZ $\rightarrow \vec{n} \perp \vec{k} \rightarrow \vec{n} \cdot \vec{k} = 0 \rightarrow C = 0$

El vector normal del plano es de la forma: $(A, B, 0) \rightarrow$ Ecuación general: $Ax + By + D = 0$

11 Hallar la ecuación del plano que pasa por el origen y es paralelo a las rectas:

$$r \equiv \frac{x-3}{2} = \frac{y-7}{3} = \frac{z-8}{4} \quad s \equiv x = y = z$$

SOLUCIÓN:

El plano está determinado por el punto $O(0, 0, 0)$ y por los vectores direccionales $\vec{u} = (2, 3, 4)$ y $\vec{v} = (1, 1, 1)$:

$$\begin{vmatrix} x & y & z \\ 2 & 3 & 4 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0 \rightarrow -x + 2y - z = 0 \rightarrow x - 2y + z = 0$$

12 Averiguar si la recta r de ecuación:

$$r \equiv \begin{cases} x = 2 - t \\ y = -1 + 3t \\ z = -2t \end{cases} \text{ es paralela al plano } \pi \equiv 2x + 3y + z - 2 = 0$$

SOLUCIÓN:

El vector normal al plano es $\vec{n} = (2, 3, 1)$

El vector de dirección de r es $\vec{u} = (-1, 3, -2)$ y uno de sus puntos es $P(2, -1, 0)$

- $\pi \parallel r$ si $\vec{n} \perp \vec{u} \Leftrightarrow \vec{n} \cdot \vec{u} = 0$ y $P \notin \pi$
- r está contenida en el plano π ($r \subset \pi$) si $\vec{n} \cdot \vec{u} = 0$ y $P \in \pi$
- π y r se cortan si $\vec{n} \cdot \vec{u} \neq 0$

$(2, 3, 1) \cdot (-1, 3, -2) = -2 + 9 - 2 = 5 \neq 0 \rightarrow \pi$ y r se cortan en un punto.

Para determinar el punto de corte sustituimos las ecuaciones de r en la ecuación del plano:

$$2(2 - t) + 3(-1 + 3t) - 2t - 2 = 0 \rightarrow 5t - 1 = 0 \rightarrow t = \frac{1}{5}$$

Por tanto, el punto de intersección es (sustituyendo en las ecuaciones paramétricas de r):

$$Q\left(\frac{9}{5}, -\frac{2}{5}, -\frac{2}{5}\right)$$

13 Hallar la ecuación de un plano que pasa por la recta r :

$$r \equiv \begin{cases} 3x + 2y - 5z + 2 = 0 \\ 4x - 3y - 2z + 1 = 0 \end{cases} \text{ y es paralelo a la recta } s \equiv \frac{x-5}{3} = \frac{y+2}{-2} = \frac{z-17}{-1}$$

SOLUCIÓN:

El haz de planos que contiene a r es de la forma:

$$\alpha(3x + 2y - 5z + 2) + \beta(4x - 3y - 2z + 1) = 0, \text{ siendo } \alpha, \beta \in \mathbb{R} \quad [1]$$

$$(3\alpha + 4\beta)x + (2\alpha - 3\beta)y + (-5\alpha - 2\beta)z + (2\alpha + \beta) = 0$$

Como es paralelo a la recta s debe verificarse que el vector normal del plano y el vector director de la recta deben ser perpendiculares, es decir:

$$3 \cdot (3\alpha + 4\beta) - 2(2\alpha - 3\beta) - (-5\alpha - 2\beta) = 0 \rightarrow 10\alpha + 20\beta = 0 \rightarrow \alpha = -2\beta$$

Sustituyendo en [1]:

$$-2\beta x - 7\beta y + 12\beta z - 3\beta = 0 \rightarrow -2x - 7y + 12z - 3 = 0$$

14 Calcular la ecuación del plano que pasa por el punto $P(1, 0, 0)$ y es paralelo al plano π de ecuación $x - 2y + 4z + 2 = 0$

SOLUCIÓN:

Un plano $\pi' \parallel \pi$ es de la forma $(x - x_0) - 2(y - y_0) + 4(z - z_0) = 0$, siendo $P(x_0, y_0, z_0)$ un punto de π' :

$$\pi': (x - 1) - 2y + 4z = 0 \rightarrow \pi': x - 2y + 4z - 1 = 0$$

15 Hallar la ecuación del plano que pasa por el punto $A(1, 1, 2)$ y es paralelo a las rectas r y s :

$$r \equiv \begin{cases} 3x + y = 0 \\ 4x + z = 0 \end{cases} \quad y \quad s \equiv \begin{cases} 2x - 2y = 4 \\ y - z = -3 \end{cases}$$

SOLUCIÓN:

Vector director de r : $\vec{u} = (3, 1, 0) \times (4, 0, 1) = (1, -3, -4)$

Vector director de s : $\vec{v} = (2, -2, 0) \times (0, 1, -1) = (2, 2, 2) \rightarrow \vec{v} = (1, 1, 1)$

El plano está determinado por el punto $A(1, 1, 2)$ y por los vectores direccionales $\vec{u} = (1, -3, -4)$ y $\vec{v} = (1, 1, 1)$:

$$\begin{vmatrix} x-1 & y-1 & z-2 \\ 1 & -3 & -4 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0 \rightarrow (x-1) - 5(y-1) + 4(z-2) = 0 \rightarrow x - 5y + 4z - 4 = 0$$

16 Dados los puntos $A(1, 0, 2)$, $B(0, 1, 3)$, $C(-1, 2, 0)$ y $D(2, -1, 3)$, hallar la ecuación del plano que contiene a la recta AB y es paralelo a la recta CD .

SOLUCIÓN:

El plano está determinado por el punto $A(1, 0, 2)$ y por los vectores directores $\overline{AB} = (-1, 1, 1)$ y $\overline{CD} = (3, -3, 3)$:

$$\begin{vmatrix} x-1 & y & z-2 \\ -1 & 1 & 1 \\ 3 & -3 & 3 \end{vmatrix} = 0 \rightarrow 6(x-1) + 6y = 0 \rightarrow x + y - 1 = 0$$

17 Hallar la ecuación del plano que pasa por el punto $A(1, 0, 0)$ y contiene a la recta r dada por

$$r \equiv \begin{cases} x = 2 + t \\ y = 3 - 3t \\ z = 4 + 2t \end{cases}$$

SOLUCIÓN:

Sea $B(2, 3, 4)$ un punto de r y $\vec{u} = (1, -3, 2)$ un vector director de r .

La ecuación del plano viene determinada por el punto A y por los vectores direccionales \vec{u} y \overline{AB} :

$$\begin{vmatrix} x-1 & y & z \\ 1 & -3 & 2 \\ 1 & 3 & 4 \end{vmatrix} = 0 \rightarrow -18(x-1) - 2y + 6z = 0 \rightarrow 9x + y - 3z - 9 = 0$$

18 Hallar la ecuación del plano que pasa por el punto $A(-1, 2, 0)$ y contiene a la recta

$$r \equiv \begin{cases} x - 2y + z - 3 = 0 \\ y + 3z - 5 = 0 \end{cases}$$

SOLUCIÓN:

El plano pertenece al haz de planos determinado por la recta r :

$x - 2y + z - 3 + k(y + 3z - 5) = 0$ siendo k cualquier n° real.

Como pasa por el punto $A(-1, 2, 0)$, se obtiene: $-1 - 4 - 3 + k(2 - 5) = 0 \rightarrow k = -8/3$

Por tanto la ecuación del plano es: $x - 2y + z - 3 - \frac{8}{3}(y + 3z - 5) = 0 \rightarrow 3x - 14y - 21z + 31 = 0$

19 Hallar la ecuación del plano que pasa por el origen de coordenadas y contiene a la recta

$$r \equiv \frac{x-1}{2} = \frac{y-1}{3} = \frac{z-1}{4}$$

SOLUCIÓN:

Vector director de r: $\vec{u} = (2, 3, 4)$

Punto de r: $A(1, 1, 1)$

La ecuación del plano viene determinada por el origen y por los vectores direccionales \vec{u} y $\vec{OA} = (1, 1, 1)$

$$\begin{vmatrix} x & y & z \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 4 \end{vmatrix} = 0 \rightarrow x - 2y + z = 0$$

20 Hallar la ecuación del plano que pasa por la recta

$$r \equiv \frac{x-1}{2} = \frac{y-1}{3} = \frac{z}{1}$$

y es paralela a la recta s que pasa por los puntos $B(2, 0, 0)$ y $C(0, 1, 0)$

SOLUCIÓN:

Un punto de la recta r es $A(1, 1, 0)$ y un vector director $\vec{u} = (2, 3, 1)$

Un vector director de la recta s es $\vec{BC} = (-2, 1, 0)$.

La ecuación del plano viene determinada por el punto A y por los vectores direccionales \vec{u} y \vec{BC} :

$$\begin{vmatrix} x-1 & y-1 & z \\ -2 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 1 \end{vmatrix} = 0 \rightarrow x - 1 + 2(y - 1) - 8z = 0 \rightarrow x + 2y - 8z - 3 = 0$$

21 Hallar la ecuación de un plano que contiene a la recta

$$r \equiv \begin{cases} x+y-1=0 \\ 2x-y+z=0 \end{cases} \text{ y es paralelo a la recta } s \equiv \frac{x-1}{2} = \frac{y}{3} = \frac{z+2}{-4}$$

SOLUCIÓN:

Resolviendo el sistema obtenemos las ecuaciones paramétricas de la recta r:

$$\begin{cases} x+y-1=0 \\ 2x-y+z=0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x=1-y \\ 2x+z=y \end{cases} \xrightarrow{y=t} \begin{cases} x=1-t \\ y=t \\ z=y-2x=t-2+2t=-2+3t \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x=1-t \\ y=t \\ z=-2+3t \end{cases}$$

Un punto de la recta r es $A(1, 0, -2)$ y un vector director es $\vec{u} = (-1, 1, 3)$.

Un vector director de la recta s es $\vec{v} = (2, 3, -4)$.

La ecuación del plano viene determinada por el punto A y por los vectores direccionales \vec{u} y \vec{v} :

$$\begin{vmatrix} x-1 & y & z+2 \\ -1 & 1 & 3 \\ 2 & 3 & -4 \end{vmatrix} = 0 \rightarrow -13(x-1) + 2y - 5(z+2) = 0 \rightarrow 13x - 2y + 5z + 3 = 0$$

22 Hallar la ecuación de un plano que contiene a la recta

$$r \equiv \begin{cases} 3x - 2y - z + 2 = 0 \\ x - y - 2z + 1 = 0 \end{cases} \text{ y es paralelo a la recta } s \equiv \frac{x-5}{3} = \frac{y+2}{-2} = \frac{z-17}{-1}$$

SOLUCIÓN:

Resolviendo el sistema obtenemos las ecuaciones paramétricas de la recta r:

$$\begin{cases} 3x - 2y - z + 2 = 0 \\ x - y - 2z + 1 = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} 3x - 2y = z - 2 \\ x - y = 2z - 1 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} 3x - 2y = z - 2 \\ -2x + 2y = -4z + 2 \\ x = -3z \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x = -3z \\ y = 1 - 5z \end{cases} \xrightarrow{z=t} \begin{cases} x = -3t \\ y = 1 - 5t \\ z = t \end{cases}$$

Un punto de la recta r es A(0, 1, 0) y un vector director es $\vec{u} = (-3, -5, 1)$.

Un vector director de la recta s es $\vec{v} = (3, -2, -1)$.

La ecuación del plano viene determinada por el punto A y por los vectores direccionales \vec{u} y \vec{v} :

$$\begin{vmatrix} x & y-1 & z \\ -3 & -5 & 1 \\ 3 & -2 & -1 \end{vmatrix} = 0 \rightarrow 7x + 21z = 0 \rightarrow x + 3z = 0$$