

ECUACIONES DE PLANOS

1 Sean $A(1, 0, -1)$, $B(1, 3, 0)$ y $C(2, -1, 3)$ tres puntos, hallar la ecuación del plano que pasa por los tres puntos.

SOLUCIÓN:

Determinamos el plano que pasa por el punto A (o cualquiera de los otros dos puntos) y es paralelo a los vectores \overline{AB} y \overline{AC} .

- Ecuación vectorial: $\vec{x} = \overline{OA} + t \cdot \overline{AB} + k \cdot \overline{AC}$, siendo $t, k \in \mathbb{R}$: $(x, y, z) = (1, 0, -1) + t \cdot (0, 3, 1) + k \cdot (1, -1, 4)$

- Ecuaciones paramétricas:
$$\begin{cases} x = 1+k \\ y = 3t-k \\ z = -1+t+4k \end{cases}$$

- Ecuación implícita:

$$\begin{vmatrix} x-1 & y & z+1 \\ 0 & 3 & 1 \\ 1 & -1 & 4 \end{vmatrix} = 0 \rightarrow 13(x-1) + y - 3(z+1) = 0 \rightarrow 13x + y - 3z - 16 = 0$$

2 ¿Es posible que un plano quede determinado por el punto $A(2, 3, 4)$ y los vectores $\vec{u} = (1, 2, 3)$ y $\vec{v} = (-4, -8, -12)$?

SOLUCIÓN:

Un plano queda determinado por un punto y dos vectores linealmente independientes.

Los vectores \vec{u} y \vec{v} son proporcionales ya que $\vec{v} = -4\vec{u}$

3 Dado el plano π cuyas ecuaciones paramétricas son:

$$\pi \equiv \begin{cases} x = 3 - t + 2s \\ y = 3t + s \\ z = 8 - 2t \end{cases}$$

Halla la ecuación implícita del plano.

SOLUCIÓN:

El plano está determinado por el punto $A(3, 0, 8)$ y los vectores $\vec{u}(-1, 3, -2)$ y $\vec{v}(2, 1, 0)$.

$$\begin{vmatrix} x-3 & y & z-8 \\ -1 & 3 & -2 \\ 2 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 0 \rightarrow 2(x-3) - 4y - 7(z-8) = 0 \rightarrow 2x - 4y - 7z + 50 = 0$$

4 a) ¿Es cierto que tres puntos cualesquiera del plano determinan un plano?
b) ¿Qué condición vectorial deben cumplir cuatro puntos, A, B, C y D para que sean coplanarios?

SOLUCIÓN:

a) No, para que tres puntos del espacio determinen un plano los puntos han de ser no alineados.

b) Para que los puntos A, B, C y D sean coplanarios deben verificar que los vectores \overline{AB} , \overline{AC} , \overline{AD} sean linealmente dependientes, aunque no proporcionales, es decir, uno de ellos es combinación lineal de los otros dos. Por tanto, es necesario que:

$$\text{rango}(\overline{AB}, \overline{AC}, \overline{AD}) = 2$$

5

¿Cómo son los vectores normales de los planos:

$$\pi_1 \equiv 3x + 2y - 5z + 5 = 0$$

$$\pi_2 \equiv 6x + 4y - 10z + 12 = 0$$

SOLUCIÓN:

Los vectores normales son: $\vec{n}_1(3, 2, -5)$ y $\vec{n}_2(6, 6, -10)$.

Los vectores normales son proporcionales con lo cual los planos son paralelos, no coincidentes ya que el punto $A(0,0,1)$ es un punto de π_1 pero no de π_2 .

6

Una recta y un punto, ¿determinan siempre un plano? Razona tu respuesta.

SOLUCIÓN:

Determinan un plano si el punto no pertenece a la recta.

7

Un plano π queda determinado por:a) Un punto A y dos vectores directores \vec{u} y \vec{v} linealmente independientes.b) Un punto B y un vector normal \vec{n} .

¿Qué relaciones tienen que cumplirse para que ambas determinaciones representen el mismo plano?

SOLUCIÓN:a) \vec{n} sea proporcional a $\vec{u} \times \vec{v}$.b) rango $(\overline{AB}, \vec{u}, \vec{v}) = 2$

8

Hallar la ecuación del plano que pasa por el punto $A(1, 0, 1)$ y tiene como vectores directores $\vec{u} = (2, -1, 0)$ y $\vec{v} = (0, 3, 2)$ linealmente independientes.SOLUCIÓN:

La ecuación viene dada por el determinante: $|\overline{AX}, \vec{u}, \vec{v}| = 0$

$$\begin{vmatrix} x-1 & y & z-1 \\ 2 & -1 & 0 \\ 0 & 3 & 2 \end{vmatrix} = 0 \rightarrow -2(x-1) - 4y + 6(z-1) = 0 \rightarrow -2x - 4y + 6z - 4 = 0 \rightarrow x + y - 3z + 2 = 0.$$

9

Hallar la ecuación del plano que por la recta r y por el punto $A(2, -1, 2)$, siendo

$$r \equiv \begin{cases} x = 2t \\ y = 3 + t \\ z = 1 - t \end{cases}$$

SOLUCIÓN:

La ecuación del plano viene dado por $\det(\overline{AX}, \overline{AB}, \vec{u}) = 0$, siendo $B(0, 3, 1)$ punto de r y $\vec{u}(2, 1, -1)$ vector director de r .

$$\begin{vmatrix} x-2 & y+1 & z-2 \\ -2 & 4 & -1 \\ 2 & 1 & -1 \end{vmatrix} = 0 \rightarrow -3(x-2) - 4(y+1) - 10(z-2) = 0 \rightarrow -3x - 4y - 10z + 22 = 0$$

10 Comprobar si los planos que pasan los puntos A(1, 0, 0), B(0, 2, 0) y C(0, 0, -1), y por los puntos A'(3, 0, 0), B'(0, 6, 0) y C'(0, 0, -3) tienen el mismo vector normal.

SOLUCIÓN:

El vector normal del plano que pasa por A, B y C es:

$$\vec{n} = \overline{AB} \times \overline{AC} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -1 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & -1 \end{vmatrix} = -2\vec{i} - \vec{j} + 2\vec{k} \rightarrow \vec{n} = (-2, -1, 2)$$

El vector normal del plano que pasa por A', B' y C' es:

$$\vec{n}' = \overline{A'B'} \times \overline{A'C'} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -3 & 6 & 0 \\ -3 & 0 & -3 \end{vmatrix} = -18\vec{i} - 9\vec{j} + 18\vec{k} \rightarrow \vec{n}' = (-18, -9, 18)$$

Los vectores normales de ambos planos son proporcionales.

11 Comprobar si los puntos A(1, 2, 3), B(4, 7, 8), C(3, 5, 5), D(-1, -2, -3) y E(2, 2, 2) son coplanarios.

SOLUCIÓN:

Los puntos A, B, C, D y E son coplanarios si $\text{rango}(\overline{AB}, \overline{AC}, \overline{AD}, \overline{AE}) = 2$

$$\left. \begin{array}{l} \overline{AB} = (3, 5, 5) \\ \overline{AC} = (2, 3, 2) \\ \overline{AD} = (-2, -4, -6) \\ \overline{AE} = (1, 0, -1) \end{array} \right\} \rightarrow \text{Determinamos rang} \begin{pmatrix} 3 & 5 & 5 \\ 2 & 3 & 2 \\ -2 & -4 & -6 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\text{rang} \begin{pmatrix} 3 & 5 & 5 \\ 2 & 3 & 2 \\ -2 & -4 & -6 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} = \text{rang} \begin{pmatrix} 0 & 5 & 8 \\ 0 & 3 & 4 \\ 0 & -4 & -8 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} = \text{rang} \begin{pmatrix} 0 & 5 & 8 \\ 0 & 3 & 4 \\ 0 & -1 & -2 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} = \text{rang} \begin{pmatrix} 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & -2 \\ 0 & -1 & -2 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} = 3$$

Por tanto no son coplanarios.

12 Hallar la ecuación del plano que pasa por el origen y por la recta de ecuaciones:

$$r \equiv \frac{x-3}{3} = \frac{y+2}{-2} = \frac{z-1}{1}$$

SOLUCIÓN:

La ecuación del plano viene dado por $\det(\overline{AX}, \overline{OA}, \vec{u}) = 0$, siendo A(3, -2, 1) punto de r y $\vec{u}(3, -2, 1)$ vector director de r.

$$\begin{vmatrix} x-3 & y+2 & z-1 \\ 3 & -2 & 1 \\ 3 & -2 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

No se puede determinar ningún plano con estas condiciones ya que el punto origen pertenece a la recta r.

13 ¿Qué relación se ha de verificar entre los parámetros a , b y c para que los puntos $A(1, 0, 1)$, $B(1, 1, 0)$, $C(0, 1, 1)$ y $D(a, b, c)$ sean coplanarios?

SOLUCIÓN:

Los puntos A , B , C y D son coplanarios si se verifica:

$$\text{rango}(\overline{AB}, \overline{AC}, \overline{AD}) = 2$$

$$\left. \begin{array}{l} \overline{AB} = (0, 1, -1) \\ \overline{AC} = (-1, 1, 0) \\ \overline{AD} = (a-1, b, c-1) \end{array} \right\} \rightarrow \text{Imponemos que } \text{rang} \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \\ a-1 & b & c-1 \end{pmatrix} = 2 \Leftrightarrow \begin{vmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \\ a-1 & b & c-1 \end{vmatrix} = 0 \quad c-1 - (-b-a+1) = 0$$

Por tanto, la relación es: $a + b + c = 2$

14 Dada la recta r :

$$r \equiv \begin{cases} 3x + 2y - 5z + 2 = 0 \\ 4x - 3y - 2z + 1 = 0 \end{cases}$$

hallar la ecuación del plano que pasa por r y por el punto $A(0, 2, 1)$

SOLUCIÓN:

Un vector director de la recta es proporcional al vector normal del plano:

$$\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & -2 & -1 \\ 1 & -3 & 1 \end{vmatrix} = (-5, -2, -1) \rightarrow \text{Sea } \vec{u} = (5, 2, 1) \text{ un vector director de } r.$$

La ecuación del plano es:

$$5x + 2(y - 2) + (z - 1) = 0 \rightarrow 5x + 2y + z - 5 = 0.$$

15 Hallar la ecuación de un plano que pasa por el punto $M(0,1,1)$ y es paralelo a los vectores $\vec{u}(1,2,3)$ y $\vec{v}(2,0,1)$

SOLUCIÓN:

- Ecuación vectorial: $\vec{x} = \overline{OM} + t \cdot \vec{u} + k \cdot \vec{v}$, siendo $t, k \in \mathbb{R}$: $(x, y, z) = (0, 1, 1) + t \cdot (1, 2, 3) + k \cdot (2, 0, 1)$

- Ecuaciones paramétricas:
$$\begin{cases} x = t + 2k \\ y = 1 + 2t \\ z = 1 + 3t + k \end{cases}$$

- Ecuación implícita:

$$\begin{vmatrix} x & y-1 & z-1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 2 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 0 \rightarrow 2x + 5(y-1) - 4(z-1) = 0 \rightarrow 2x + 5y - 4z - 1 = 0$$