ECUACIONES DE PLANOS

1	**Sean A(1, 0, -1), B(1, 3, 0) y C(2, -1, 3) tres puntos, hallar la ecuación del plano que pasa por los tres puntos.**

SOLUCIÓN:

Determinamos el plano que pasa por el punto A (o cualquiera de los otros dos puntos) y es paralelo a los vectores $\overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{AC}$.

- Ecuación vectorial: $\vec{x} = \overrightarrow{OA} + t\cdot\overrightarrow{AB} + k\cdot\overrightarrow{AC}$, siendo $t,k \in \mathbb{R}$: (x, y, z) = (1,0,-1) + t ·(0, 3, 1) + k·(1,-1, 4)
- Ecuaciones paramétricas: $\begin{cases} x = 1+k \\ y = 3t-k \\ z = -1+t+4k \end{cases}$
- Ecuación implícita:

$$\begin{vmatrix} x-1 & y & z+1 \\ 0 & 3 & 1 \\ 1 & -1 & 4 \end{vmatrix} = 0 \rightarrow 13(x-1) + y - 3(z+1) = 0 \rightarrow 13x + y - 3z - 16 = 0$$

2	**¿Es posible que un plano quede determinado por el punto A(2, 3,4) y los vectores $\vec{u} = (1,2,3)$ y $\vec{v} = (-4,-8,-12)$?**

SOLUCIÓN:

Un plano queda determinado por un punto y dos vectores linealmente independientes.
Los vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$ son proporcionales ya que $\vec{v} = -4\vec{u}$

3	**Dado el plano π cuyas ecuaciones paramétricas son:** $\pi \equiv \begin{cases} x = 3-t+2s \\ y = 3t+s \\ z = 8-2t \end{cases}$ **Halla la ecuación implícita del plano.**

SOLUCIÓN:

El plano está determinado por el punto A(3, 0, 8) y los vectores $\vec{u}$(-1, 3, -2) y $\vec{v}$(2, 1, 0).

$$\begin{vmatrix} x-3 & y & z-8 \\ -1 & 3 & -2 \\ 2 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 0 \rightarrow 2(x-3) - 4y - 7(z-8) = 0 \rightarrow 2x - 4y - 7z + 50 = 0$$

4	**a) ¿Es cierto que tres puntos cualesquiera del plano determinan un plano?** **b) ¿Qué condición vectorial deben cumplir cuatro puntos, A, B, C y D para que sean coplanarios?**

SOLUCIÓN:

a) No, para que tres puntos del espacio determinen un plano los puntos han de ser no alineados.

b) Para que los puntos A, B, C y D sean coplanarios deben verificar que los vectores $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD}$ sean linealmente dependientes, aunque no proporcionales, es decir, uno de ellos es combinación lineal de los otros dos. Por tanto, es necesario que:

$$\text{rango}\left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD}\right) = 2$$

5 **¿Cómo son los vectores normales de los planos:**

$$\pi_1 \equiv 3x + 2y - 5z + 5 = 0 \qquad \pi_2 \equiv 6x + 4y - 10z + 12 = 0$$

SOLUCIÓN:

Los vectores normales son: $\vec{n}_1(3, 2, -5)$ y $\vec{n}_2$ $(6, 6, -10)$.

Los vectores normales son proporcionales con lo cual los planos son paralelos, no coincidentes ya que el punto A(0,0,1) es un punto de π_1 pero no de π_2.

6 **Una recta y un punto, ¿determinan siempre un plano? Razona tu respuesta.**

SOLUCIÓN:

Determinan un plano si el punto no pertenece a la recta.

7 **Un plano π queda determinado por:**

- **a) Un punto A y dos vectores directores $\vec{u}$ y $\vec{v}$ linealmente independientes.**
- **b) Un punto B y un vector normal $\vec{n}$.**

¿Qué relaciones tienen que cumplirse para que ambas determinaciones representen el mismo plano?

SOLUCIÓN:

a) $\vec{n}$ sea proporcional a $\vec{u} \times \vec{v}$.

b) rango $\left(\overrightarrow{AB}, \vec{u}, \vec{v}\right) = 2$

8 **Hallar la ecuación del plano que pasa por el punto A(1, 0, 1) y tiene como vectores directores $\vec{u} = (2, -1, 0)$ y $\vec{v} = (0, 3, 2)$ linealmente independientes.**

SOLUCIÓN:

La ecuación viene dada por el determinante: $\left|\overrightarrow{AX}, \vec{u}, \vec{v}\right| = 0$

$$\begin{vmatrix} x-1 & y & z-1 \\ 2 & -1 & 0 \\ 0 & 3 & 2 \end{vmatrix} = 0 \rightarrow -2(x-1) - 4y + 6(z-1) = 0 \rightarrow -2x - 4y + 6z - 4 = 0 \rightarrow x + y - 3z + 2 = 0.$$

9 **Hallar la ecuación del plano que por la recta r y por el punto A(2, -1, 2), siendo**

$$r \equiv \begin{cases} x = 2t \\ y = 3 + t \\ z = 1 - t \end{cases}$$

SOLUCIÓN:

La ecuación del plano viene dado por det$\left(\overrightarrow{AX}, \overrightarrow{AB}, \vec{u}\right) = 0$, siendo B(0, 3, 1) punto de r y $\vec{u}$ (2, 1, -1) vector director de r.

$$\begin{vmatrix} x-2 & y+1 & z-2 \\ -2 & 4 & -1 \\ 2 & 1 & -1 \end{vmatrix} = 0 \rightarrow -3(x-2) - 4(y+1) - 10(z-2) = 0 \rightarrow -3x - 4y - 10z + 22 = 0$$

www.yoquieroaprobar.es

10	**Comprobar si los planos que pasan los puntos A(1, 0, 0), B(0, 2, 0) y C(0, 0, -1), y por los puntos A´(3, 0, 0), B´(0, 6, 0) y C´(0, 0, -3) tienen el mismo vector normal.**

SOLUCIÓN:

El vector normal del plano que pasa por A, B y C es:

$$\vec{n} = \overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -1 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & -1 \end{vmatrix} = -2\vec{i} - \vec{j} + 2\vec{k} \rightarrow \vec{n} = (-2, -1, 2)$$

El vector normal del plano que pasa por A´, B´ y C´ es:

$$\vec{n}' = \overrightarrow{A'B'} \times \overrightarrow{A'C'} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -3 & 6 & 0 \\ -3 & 0 & -3 \end{vmatrix} = -18\vec{i} - 9\vec{j} + 18\vec{k} \rightarrow \vec{n} = (-18, -9, 18)$$

Los vectores normales de ambos planos son proporcionales.

11	**Comprobar si los puntos A(1, 2, 3), B(4, 7, 8), C(3, 5, 5), D(-1, -2, -3) y E(2, 2, 2) son coplanarios.**

SOLUCIÓN:

Los puntos A, B, C, D y E son coplanarios si rango $\left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AE}\right) = 2$

$$\left.\begin{array}{l} \overrightarrow{AB} = (3,5,5) \\ \overrightarrow{AC} = (2,3,2) \\ \overrightarrow{AD} = (-2,-4,-6) \\ \overrightarrow{AE} = (1,0,-1) \end{array}\right\} \rightarrow \text{ Determinamos rang} \begin{pmatrix} 3 & 5 & 5 \\ 2 & 3 & 2 \\ -2 & -4 & -6 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\text{rang}\begin{pmatrix} 3 & 5 & 5 \\ 2 & 3 & 2 \\ -2 & -4 & -6 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} = \text{rang}\begin{pmatrix} 0 & 5 & 8 \\ 0 & 3 & 4 \\ 0 & -4 & -8 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} = \text{rang}\begin{pmatrix} 0 & 5 & 8 \\ 0 & 3 & 4 \\ 0 & -1 & -2 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} = \text{rang}\begin{pmatrix} 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & -2 \\ 0 & -1 & -2 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} = 3$$

Por tanto no son coplanarios.

12	**Hallar la ecuación del plano que pasa por el origen y por la recta de ecuaciones:** $r \equiv \dfrac{x-3}{3} = \dfrac{y+2}{-2} = \dfrac{z-1}{1}$

SOLUCIÓN:

La ecuación del plano viene dado por det $\left(\overrightarrow{AX}, \overrightarrow{OA}, \vec{u}\right) = 0$, siendo A(3, -2, 1) punto de r y $\vec{u}$ (3, -2, 1) vector director de r.

$$\begin{vmatrix} x-3 & y+2 & z-1 \\ 3 & -2 & 1 \\ 3 & -2 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

No se puede determinar ningún plano con estas condiciones ya que el punto origen pertenece a la recta r.

www.yoquieroaprobar.es

13 **¿Qué relación se ha de verificar entre los parámetros a, b y c para que los puntos A(1, 0, 1), B(1, 1, 0), C(0, 1, 1) y D(a , b, c) sean coplanarios?**

SOLUCIÓN:

Los puntos A, B, C y D son coplanarios si se verifica:

$$\text{rango}\left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD}\right) = 2$$

$$\left.\begin{array}{l} \overrightarrow{AB} = (0,1,-1) \\ \overrightarrow{AC} = (-1,1,0) \\ \overrightarrow{AD} = (a-1,b,c-1) \end{array}\right\} \rightarrow \text{Imponemos que rang}\begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \\ a-1 & b & c-1 \end{pmatrix} = 2 \leftrightarrow \begin{vmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \\ a-1 & b & c-1 \end{vmatrix} = 0 \quad c-1-(-b-a+1) = 0$$

Por tanto, la relación es: $a + b + c = 2$

14 **Dada la recta r:**

$$r \equiv \begin{cases} 3x + 2y - 5z + 2 = 0 \\ 4x - 3y - 2z + 1 = 0 \end{cases}$$

hallar la ecuación del plano que pasa por r y por el punto A(0, 2, 1)

SOLUCIÓN:

Un vector director de la recta es proporcional al vector normal del plano:

$$\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & -2 & -1 \\ 1 & -3 & 1 \end{vmatrix} = (-5, -2, -1) \rightarrow \text{Sea } \vec{u} = (5,2,1) \text{ un vector director de r.}$$

La ecuación del plano es:

$5x + 2(y - 2) + (z - 1) = 0 \rightarrow 5x + 2y + z - 5 = 0.$

15 **Hallar la ecuación de un plano que pasa por el punto M(0,1,1) y es paralelo a los vectores $\vec{u}(1,2,3)$ y $\vec{v}(2,0,1)$**

SOLUCIÓN:

- Ecuación vectorial: $\vec{x} = \overrightarrow{OM} + t\cdot\vec{u} + k\cdot\vec{v}$, siendo $t,k \in \mathbb{R}$: $(x, y, z) = (0, 1, 1) + t\cdot(1, 2, 3) + k\cdot(2, 0, 1)$
- Ecuaciones paramétricas: $\begin{cases} x = t + 2k \\ y = 1 + 2t \\ z = 1 + 3t + k \end{cases}$
- Ecuación implícita:

$$\begin{vmatrix} x & y-1 & z-1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 2 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 0 \rightarrow 2x + 5(y - 1) - 4(z - 1) = 0 \rightarrow 2x + 5y - 4z - 1 = 0$$

www.yoquieroaprobar.es