1. DERIVADA DE UNA FUNCIÓN EN UN PUNTO APLICANDO LA DEFINICIÓN.

1.1. Halla la derivada de las siguientes funciones en $x = 1$, aplicando la definición de derivada:

a) $f(x) = x^2 + 1$　　b) $g(x) = \dfrac{x-1}{3}$　　c) $h(x) = \dfrac{2}{x}$

1.2. Halla la derivada de las siguientes funciones en $x = 2$, aplicando la definición de derivada

a) $f(x)= (x - 1)^2$　　b) $g(x) = \sqrt{x+1}$　　c) $h(x) = \dfrac{x-1}{x+2}$

2. INTERPRETACIÓN GEOMÉTRICA: RECTA TANGENTE

- Ecuación de la ***recta tangente a la curva en el punto $P(x_0, f(x_0))$***:

$$y - f(x_0) = f'(x_0)\,(x - x_0)$$

- Ecuación de la ***recta normal a una curva en el punto $P(x_0, y_0)$***:

$$y - f(x_0) = -\frac{1}{f'(x_0)}(x - x_0)$$

2.1. Calcula la ecuación de la recta tangente y de la recta normal a la curva $y = x^2 - 2x$ en el punto $P(2,0)$

2.2. Halla la ecuación de la recta tangente y normal a la gráfica de la función $f(x) = \dfrac{x}{x-1}$ en el punto $Q(2,2)$

3. DERIVADA DE UNA FUNCIÓN APLICANDO LA DEFINICIÓN.

La ***función derivada*** de una función f, que simbolizamos por f', es la función que a cada valor x del dominio de f, donde f es derivable, se le asigna el valor de la derivada de f en dicho punto, $f'(x)$.

$$f': \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$x \longrightarrow f'(x)$$

siendo: $f'(x) = \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{f(x+h) - f(x)}{h}$

2.1. Calcula la función derivada de las siguientes funciones**:**

a) Función constante: $f(x) = a$ siendo $a \in \mathbb{R}$　　b) Función identidad: $f(x) = x$

c) Función lineal: $f(x) = ax + b$, siendo $a, b \in \mathbb{R}$　　d) Función cuadrática: $f(x) = x^2$

e) Función raiz cuadrada: $f(x) = \sqrt{x}$　　f) Función irracioanal: $f(x) = \sqrt[n]{x^m}$

g) Función potencia: $f(x) = x^n$

(Ayuda: Calcula la derivada de $f(x) = x^3$, $f(x) = x^4$ y generaliza a $f(x) = x^n$)

4. OPERACIONES CON LAS DERIVADAS

Recuerda:

1.- ***Derivada de una suma***: $[f(x) + g(x)]' = f'(x) + g'(x)$

2.- ***Derivada de un producto de funciones***: $[f(x) \cdot g(x)]' = f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x)$

En particular : Si $k \in \mathbb{R}$, $[k \cdot f(x)]' = k \cdot f'(x)$

3.- ***Derivada de un cociente de funciones***: $\left[\dfrac{f(x)}{g(x)}\right]' = \dfrac{f'(x)\cdot g(x) - f(x)\cdot g'(x)}{[g(x)]^2}$

En particular : Si $k \in \mathbb{R}$, $\left[\dfrac{k}{f(x)}\right]' = \dfrac{-k\cdot f'(x)}{[f(x)]^2}$

3.1. Calcula la derivada de las siguientes funciones:

a) $f(x) = 2x^2$ b) $f(x) = 3x^4$ c) $f(x) = \dfrac{1}{2}x^6$ d) $f(x) = \dfrac{2}{3}x^3$

3.2. Calcula la derivada de las siguientes funciones polinómicas:

a) $f(x) = x^4 + 3x^2 + 6$ b) $f(x) = 6x^3 - x^2$ c) $f(x) = 5x^4 - 3x^2 + 6x$

d) $f(x) = \dfrac{x^4}{2} - \dfrac{x^2}{4} - x$ e) $f(x) = \dfrac{5x^3}{3} - \dfrac{x}{2} - 1$ f) $f(x) = \dfrac{1}{4}x^6 - \dfrac{3}{2}x^3 + 3x^2 - 2x$

3.3. Calcula la derivada de los siguientes productos:

a) $f(x) = x^2(x + 6)$ b) $f(x) = (2x - 1)(x^2 + 1)$ c) $f(x) = (3x + 2)(4x + 5)$

d) $f(x) = (x^3 - 1)(x^3 + 1)$ e) $f(x) = (2x^2 + 1)(x^3 + 6)$ f) $f(x) = (3x^2 + 6x + 1)(x^2 - 1)$

3.4. Calcula la derivada de las siguientes funciones racionales:

a) $f(x) = \dfrac{2x^4}{1-x^2}$ b) $f(x) = \dfrac{6}{x^4+2}$ c) $f(x) = \dfrac{1}{x^2+1}$

d) $f(x) = \dfrac{x^3}{1+x^2}$ e) $f(x) = \dfrac{x^3+1}{x^2-x-2}$ f) $f(x) = \dfrac{x^2+5}{2x-3}$

3.5. Calcula la derivada de las siguientes funciones irracionales:

a) $f(x) = x - \sqrt{x}$ b) $f(x) = \dfrac{2\sqrt{x}}{x^2+2}$ c) $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x}+1}$

d) $f(x) = \sqrt{2x} + \sqrt[3]{x}$ e) $f(x) = \dfrac{x^2+1}{2\sqrt{x}}$ f) $f(x) = \dfrac{x+1}{\sqrt{x^3}}$

4. DERIVADA DE FUNCIONES EXPONENCIALES

Recuerda:

1) Si $f(x) = a^x \Rightarrow f'(x) = a^x \cdot \text{Ln } a$

2) Si $f(x) = e^x \Rightarrow f'(x) = e^x$

4.1. Calcula la derivada de las siguientes funciones:

a) $f(x) = e^x + x^2$

b) $f(x) = (x - 1)\, e^x$

c) $f(x) = (1 + x + x^2)\, e^x$

d) $f(x) = \dfrac{e^x - 1}{e^x + 1}$

e) $f(x) = \dfrac{2^x}{x}$

f) $f(x) = x^2 + 2^x + 1$

g) $f(x) = \dfrac{x^2 - 1}{e^x}$

h) $f(x) = \dfrac{e^x + 1}{x}$

i) $f(x) = \dfrac{e^x + e^{-x}}{2}$

5. DERIVADA DE FUNCIONES LOGARÍTMICAS

Recuerda:

1) Si $f(x) = \log_a(x) \Rightarrow f'(x) = \dfrac{1}{x}\log_a e$

2) Si $f(x) = \ln x \Rightarrow f'(x) = \dfrac{1}{x}$

Además:

1) $\log_a (x \cdot y) = \log_a x + \log_a y$

2) $\log_a \left(\dfrac{x}{y}\right) = \log_a x - \log_a y$

3) $\log_a (x^n) = n \cdot \log_a x$

5.1. Calcula la derivada de las siguientes funciones:

a) $f(x) = x \cdot \ln x$

b) $f(x) = \log_3 x$

c) $f(x) = \ln(x + a)$

d) $f(x) = \ln x^3$

e) $f(x) = \ln\left(\sqrt{x}\right)$

f) $f(x) = \ln\left(\dfrac{1}{x}\right)$

g) $f(x) = \ln e^{5x}$

h) $f(x) = \dfrac{1 + \ln x}{x}$

i) $f(x) = \dfrac{\ln x}{1 + x^2}$

6. DERIVADA DE FUNCIONES TRIGONOMÉTRICAS

Recuerda:

1) $D(\text{sen } x) = \cos x$

2) $D(\cos x) = - \text{sen } x$

3) $D(\text{tg } x) = \dfrac{1}{\cos^2 x} = 1 + \text{tg}^2 x$

6.1. Calcula la derivada de las siguientes funciones:

a) $f(x) = \dfrac{\cos x}{1 - \text{sen} x}$

b) $f(x) = \text{sen } x + \text{tg } x$

c) $f(x) = \cos x \cdot (1 - \cos x)$

d) $f(x) = \dfrac{1}{\text{sen} x}$

e) $f(x) = \dfrac{1}{\cos x}$

f) $f(x) = \dfrac{\text{sen} x \cdot \cos x}{2} + \dfrac{x}{2}$

g) $f(x) = \dfrac{\text{sen} x + \cos x}{\cos x - \text{sen} x}$

h) $f(x) = \dfrac{1 + \text{tg} x}{1 - \text{tg} x}$

i) $f(x) = \dfrac{1 - \cos x}{1 + \cos x}$

7. DERIVADA DE FUNCIONES COMPUESTAS

7.1. Calcular la derivada de las siguientes funciones:

a) $f(x)=\dfrac{1}{(1-x)^2}$ b) $f(x)=\dfrac{x^2}{(2x-1)^2}$ c) $f(x)=\dfrac{2x^2-4x}{(x-1)^2}$

d) $f(x) = 3\sqrt{x^2-3}$ e) $f(x) = \sqrt[3]{x^2+x+1}$ f) $f(x) = \left(x-\sqrt{1-x^2}\right)^2$

g) $f(x) = \sqrt{\dfrac{1+x}{1-x}}$ h) $f(x)=x\cdot\sqrt{x^2+2}$ i) $f(x)=\dfrac{1-x}{\sqrt{1-x^2}}$

j) $f(x) = \dfrac{1}{2}e^{1+x^2}$ k) $f(x) = 3^{2x-3}$ l) $f(x) = \dfrac{a}{2}(e^{x/a}-e^{-x/a})$

m) $f(x) = \ln(x^2 + x)$ n) $f(x) = \ln\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)$ o) $f(x) = 2\sqrt{x}-2\ln\left(2+\sqrt{x}\right)$

p) $f(x) = \ln\sqrt{\dfrac{1+x}{1-x}}$ q) $f(x)=\ln\left(\dfrac{1+x^2}{1-x^2}\right)$ r) $f(x) = \ln\left(\dfrac{e^x}{1+e^x}\right)$

7.2. Calcular la derivada de las siguientes funciones:

a) $f(x) = \operatorname{sen}^2 x$ b) $f(x) = \operatorname{sen} x^2$ c) $f(x) = \operatorname{sen}^2 x - \cos^2 x$

d) $f(x) = \ln\cos x$ e) $f(x) = \ln\operatorname{sen} x$ f) $f(x) = \ln\operatorname{tg} x$

g) $f(x)=\dfrac{1-\cos x}{\operatorname{sen}^2 x}$ h) $f(x)=\left(\dfrac{1+\operatorname{sen} x}{\cos x}\right)^2$ i) $f(x)=\dfrac{\operatorname{sen} x}{1+\operatorname{tg}^2 x}$

j) $f(x) = \ln\sqrt{\dfrac{1+\operatorname{sen}x}{1-\operatorname{sen}x}}$ k) $f(x) = \ln\left(\dfrac{1+\operatorname{sen}x}{\cos x}\right)$ l) $f(x) = \dfrac{\operatorname{tg}^2 x}{2}+\ln(\cos x)$

7.3. Calcular la derivada de las siguientes funciones:

a) $f(x) = \arccos(x^2)$ b) $f(x) = \operatorname{arcsen}(5x^2)$ c) $f(x) = \operatorname{arctg}(4x^3)$

d) $f(x) = \arccos(3x^2 + 4x)$ e) $f(x)=\operatorname{arc\,sen}\left(\dfrac{x^2-1}{x^2}\right)$ f) $f(x) = \operatorname{arcsen}(\operatorname{tg}x)$

g) $f(x)=\arccos\left(\dfrac{1-x^2}{1+x^2}\right)$ h) $f(x) = \operatorname{arc\,tg}\left(\dfrac{x+1}{1-x}\right)$ i) $f(x)=\operatorname{arc\,tg}\left(\dfrac{1+\operatorname{sen}x}{\cos x}\right)$

j) $f(x)=\operatorname{arcsen}\left(\sqrt{1-x^2}\right)$ k) $f(x) = \operatorname{arctg}\left(\dfrac{x}{\sqrt{1-x^2}}\right)$ l) $f(x)=\operatorname{arctg}\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)$

7.1. Calcular la derivada de las siguientes funciones:

a) $f(x)=\dfrac{1}{(1-x)^2}$

$$f'(x)=\frac{2}{(1-x)^3}$$

b) $f(x)=\dfrac{x^2}{(2x-1)^2}$

$$f'(x)=\frac{2x\cdot(2x-1)^2-x^2\cdot 2(2x-1)\cdot 2}{(2x-1)^4}=\frac{2x\cdot(2x-1)^{\cancel{2}}-x^2\cdot 2\cancel{(2x-1)}\cdot 2}{(2x-1)^{\cancel{4}\;3}}=\frac{4x^2-2x-4x^2}{(2x-1)^3}=\frac{-2x}{(2x-1)^3}$$

c) $f(x)=\dfrac{2x^2-4x}{(x-1)^2}$

$$f'(x)=\frac{(4x-4)\cdot(x-1)^2-(2x^2-4x)\cdot 2(x-1)}{(x-1)^4}=\frac{4\cancel{(x-1)}\cdot(x-1)^2-4\cdot(x^2-2x)\cdot\cancel{(x-1)}}{(x-1)^{\cancel{4}\;3}}=$$

$$=\frac{4\cdot(x^2-2x+1-x^2+2x)}{(x-1)^3}=\frac{4}{(x-1)^3}$$

d) f(x) **=** $3\sqrt{x^2-3}$

$$f'(x)=\frac{3\cdot 2x}{2\sqrt{x^2-3}}=\frac{3x}{\sqrt{x^2-3}}$$

e) f(x) **=** $\sqrt[3]{x^2+x+1}$

$$f'(x)=\frac{1}{3}\cdot\left(x^2+x+1\right)^{\frac{-2}{3}}\cdot(2x+1)=\frac{2x+1}{3\cdot\sqrt[3]{\left(x^2+x+1\right)^2}}$$

f) f(x) **=** $\left(x-\sqrt{1-x^2}\right)^2$

$$f'(x)=2\left(x-\sqrt{1-x^2}\right)\cdot\left(1-\frac{-\cancel{2}x}{\cancel{2}\sqrt{1-x^2}}\right)=2\left(x-\sqrt{1-x^2}\right)\cdot\left(\frac{\sqrt{1-x^2}+x}{\sqrt{1-x^2}}\right)=\frac{2\left(x^2-1+x^2\right)}{\sqrt{1-x^2}}=\frac{2\left(2x^2-1\right)}{\sqrt{1-x^2}}$$

g) f(x) = $\sqrt{\dfrac{1+x}{1-x}}$

$$f'(x)=\frac{1}{2\sqrt{\dfrac{1+x}{1-x}}}\cdot\frac{1-x-(1+x)(-1)}{(1-x)^2}=\frac{\sqrt{1-x}}{2\sqrt{1+x}}\cdot\frac{2}{(1-x)^2}\underbrace{=}_{(1)}\frac{1}{\sqrt{1-x^2}\cdot(1-x)}$$

$$(1)\ \frac{\sqrt{1-x}}{1-x}=\frac{1}{\sqrt{1-x}}$$

h) $f(x) = x\cdot\sqrt{x^2+2}$

$$f'(x) = \sqrt{x^2+2} + \frac{x\cdot\cancel{2}x}{\cancel{2}\sqrt{x^2+2}} = \frac{x^2+2+x^2}{\sqrt{x^2+2}} = \frac{2x^2+2}{\sqrt{x^2+2}}$$

i) $f(x) = \dfrac{1-x}{\sqrt{1-x^2}}$

$$f'(x) = \frac{-\sqrt{1-x^2}-(1-x)\cdot\dfrac{-2x}{2\sqrt{1-x^2}}}{1-x^2} = \frac{-\sqrt{1-x^2}+\dfrac{x-x^2}{\sqrt{1-x^2}}}{1-x^2} = \frac{-1+x^2+x-x^2}{\left(1-x^2\right)\sqrt{1-x^2}} = \frac{x-1}{\left(1-x^2\right)\sqrt{1-x^2}} = \frac{-1}{(1+x)\sqrt{1-x^2}}$$

j) $f(x) = \dfrac{1}{2}e^{1+x^2}$

$$f'(x) = \frac{1}{2}e^{1+x^2}\cdot 2x = x\cdot e^{1+x^2}$$

k) $f(x) = 3^{2x-3}$

$$f'(x) = 3^{2x-3}\cdot\ln 3\cdot 2 = 2\ln 3\cdot 3^{2x-3}$$

l) $f(x) = \dfrac{a}{2}\left(e^{x/a}-e^{-x/a}\right)$

$$f'(x) = \frac{a}{2}\left[\frac{1}{a}e^{x/a}-\left(-\frac{1}{a}\right)e^{-x/a}\right] = e^{x/a}+e^{-x/a}$$

m) $f(x) = \ln(x^2+x)$

$$f'(x) = \frac{2x+1}{x^2+x}$$

n) $f(x) = \ln\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)$

$$f'(x) = \frac{1}{x+\sqrt{1+x^2}}\cdot\left(1+\frac{2x}{2\sqrt{1+x^2}}\right) = \frac{1}{x+\sqrt{1+x^2}}\cdot\frac{\sqrt{1+x^2}+x}{\sqrt{1+x^2}} = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$$

o) $f(x) = 2\sqrt{x}-2\ln\left(2+\sqrt{x}\right)$

$$f'(x) = \cancel{2}\cdot\frac{1}{\cancel{2}\sqrt{x}} - \cancel{2}\cdot\frac{1}{2+\sqrt{x}}\cdot\frac{1}{\cancel{2}\sqrt{x}} = \frac{1}{\sqrt{x}}\left(1-\frac{1}{2+\sqrt{x}}\right) = \frac{1+\sqrt{x}}{2\sqrt{x}+x}$$

p) $f(x) = \ln\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}$

$$f'(x) = \frac{1}{\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}}\cdot\frac{1}{2\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}}\cdot\frac{1-x+1+x}{(1-x)^2} = \frac{1-x}{1+x}\cdot\frac{1}{(1-x)^2} = \frac{1}{1-x^2}$$

q) $f(x) = \ln\left(\frac{1+x^2}{1-x^2}\right)$

$$f'(x) = \frac{1-x^2}{1+x^2}\cdot\frac{2x\left(1-x^2\right)-\left(1+x^2\right)(-2x)}{\left(1-x^2\right)^2} = \frac{1}{1+x^2}\cdot\frac{2x\left(1-x^2+1+x^2\right)}{1-x^2} = \frac{4x}{1-x^4}$$

r) $f(x) = \ln\left(\frac{e^x}{1+e^x}\right)$

$$f'(x) = \frac{1+e^x}{e^x}\cdot\frac{e^x\cdot\left(1+e^x\right)-e^x\cdot e^x}{\left(1+e^x\right)^2} = \frac{1}{e^x}\cdot\frac{e^x\cdot\left(1+e^x-e^x\right)}{1+e^x} = \frac{1}{1+e^x}$$

7.2. Calcular la derivada de las siguientes funciones:

a) $f(x) = \text{sen}^2\, x \rightarrow f'(x) = 2\ \text{sen}\ x\ \cos x = \text{sen}\ 2x$

b) $f(x) = \text{sen}\, x^2 \rightarrow f'(x) = \cos x^2 \cdot 2x$

c) $f(x) = \text{sen}^2 x - \cos^2 x \rightarrow f'(x) = 2\ \text{sen}\ x \cos x - 2 \cos x\ (-\ \text{sen} x) = 4\text{sen}\ x \cos x$

d) $f(x) = \ln \cos x \rightarrow f'(x) = \frac{-\text{sen} x}{\cos x} = -\text{tg} x$

e) $f(x) = \ln \text{sen}\ x \rightarrow f'(x) = \frac{\cos x}{\text{sen} x} = \text{ctg} x$

f) $f(x) = \ln \text{tg}\ x \rightarrow f'(x) = \frac{1+\text{tg}^2 x}{\text{tg} x}$

g) $f(x) = \frac{1-\cos x}{\text{sen}^2 x}$

$$f'(x) = \frac{\text{sen}x\cdot\text{sen}^2 x-(1-\cos x)\cdot 2\text{sen}x\cos x}{\text{sen}^4 x} = \frac{\text{sen}x\cdot\left(\text{sen}^2 x-2\cos x+2\cos^2 x\right)}{\text{sen}^4 x} = \frac{1-2\cos x+\cos^2 x}{\text{sen}^3 x} = \frac{(1-\cos x)^2}{\text{sen}^3 x}$$

h) $f(x) = \left(\frac{1+\text{sen}\,x}{\cos x}\right)^2$

$$f'(x) = 2\cdot\left(\frac{1+\text{sen}\,x}{\cos x}\right)\cdot\frac{\cos x\cdot\cos x-(1+\text{sen}x)(-\text{sen}x)}{\cos^2 x} = 2\cdot\left(\frac{1+\text{sen}\,x}{\cos x}\right)\cdot\frac{\cos^2 x+\text{sen}^2 x+\text{sen}x}{\cos^2 x} = \frac{2(1+\text{sen}x)^2}{\cos^3 x}$$

i) $f(x)=\dfrac{\operatorname{sen}x}{1+tg^2x}$

$$f'(x)=\frac{\cos x\cdot\left(1+tg^2x\right)-\operatorname{sen}x\cdot 2tgx\cdot\left(1+tg^2x\right)}{\left(1+tg^2x\right)^2}=\frac{\cos x-2\operatorname{sen}x\cdot tgx}{1+tg^2x}$$

j) $f(x)=\ln\sqrt{\dfrac{1+\operatorname{sen}x}{1-\operatorname{sen}x}}$

$$f'(x)=\frac{1}{\sqrt{\frac{1+\operatorname{sen}x}{1-\operatorname{sen}x}}}\cdot\frac{1}{2\cdot\sqrt{\frac{1+\operatorname{sen}x}{1-\operatorname{sen}x}}}\cdot\frac{\cos x(1-\operatorname{sen}x)-(1+\operatorname{sen}x)(-\cos x)}{(1-\operatorname{sen}x)^2}=\frac{1-\operatorname{sen}x}{2(1+\operatorname{sen}x)}\cdot\frac{2\cos x}{(1-\operatorname{sen}x)^2}=$$

$$=\frac{\cos x}{1-\operatorname{sen}^2x}=\frac{1}{\cos x}$$

k) $f(x)=\ln\left(\dfrac{1+\operatorname{sen}x}{\cos x}\right)$

$$f'(x)=\frac{\cos x}{1+\operatorname{sen}x}\cdot\frac{\cos x\cdot\cos x-(1+\operatorname{sen}x)\cdot(-\operatorname{sen}x)}{\cos^2x}=\frac{1}{1+\operatorname{sen}x}\cdot\frac{\cos^2x+\operatorname{sen}x+\operatorname{sen}^2x}{\cos x}=\frac{1}{1+\operatorname{sen}x}\cdot\frac{1+\operatorname{sen}x}{\cos x}=\frac{1}{\cos x}$$

l) $f(x)=\dfrac{tg^2x}{2}+\ln(\cos x)$

$$f'(x)=\frac{1}{2}\cdot 2tgx\cdot(1+tg^2x)+\frac{-\operatorname{sen}x}{\cos x}=tgx+tg^3x-tgx=tg^3x$$

7.3. Calcular la derivada de las siguientes funciones:

a) $f(x)=\arccos(x^2)\rightarrow f'(x)=-\dfrac{2x}{\sqrt{1-x^4}}$

b) $f(x)=\operatorname{arcsen}(5x^2)\rightarrow f'(x)=\dfrac{10x}{\sqrt{1-25x^4}}$

c) $f(x)=\operatorname{arctg}(4x^3)\rightarrow f'(x)=\dfrac{12x^2}{1+16x^6}$

d) $f(x)=\arccos(3x^2+4x)\rightarrow f'(x)=-\dfrac{6x+4}{\sqrt{1-(3x^2+4x)^2}}$

e) $f(x)=\operatorname{arc\,sen}\left(\dfrac{x^2-1}{x^2}\right)\rightarrow f'(x)=\dfrac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{x^2-1}{x^2}\right)^2}}\cdot\dfrac{2x\cdot x^2-(x^2-1)\cdot 2x}{x^4}\underbrace{=}_{(1)}\dfrac{x^2}{\sqrt{2x^2-1}}\cdot\dfrac{2x}{x^4}=\dfrac{2}{x\cdot\sqrt{2x^2-1}}$

$$(1)\quad \sqrt{1-\left(\frac{x^2-1}{x^2}\right)^2} = \sqrt{1-\frac{x^4-2x^2+1}{x^4}} = \sqrt{\frac{2x^2-1}{x^4}} = \frac{\sqrt{2x^2-1}}{x^2}$$

f) f(x) = arcsen(tgx)

$$f'(x) = \frac{1+tg^2x}{\sqrt{1-tg^2x}} = \frac{\dfrac{1}{\cos^2 x}}{\dfrac{\sqrt{\cos^2 x - sen^2x}}{\cos x}} = \frac{1}{\cos x\sqrt{1-2sen^2x}}$$

g) $f(x) = \arccos\left(\frac{1-x^2}{1+x^2}\right)$

$$f'(x) = \frac{-1}{\sqrt{1-\left(\dfrac{1-x^2}{1+x^2}\right)^2}}\cdot\frac{-2x\cdot\left(1+x^2\right)-\left(1-x^2\right)\cdot 2x}{\left(1+x^2\right)^2} = \frac{-\left(1+x^2\right)}{\sqrt{\left(1+x^2\right)^2-\left(1-x^2\right)^2}}\cdot\frac{-2x\cdot\left(1+x^2+1-x^2\right)}{\left(1+x^2\right)^2} =$$

$$= \frac{-1}{\sqrt{4x^2}}\cdot\frac{-4x}{1+x^2} = \frac{2}{1+x^2}$$

h) $f(x) = \text{arc tg}\left(\frac{x+1}{1-x}\right)$

$$f'(x) = \frac{1}{1+\left(\dfrac{x+1}{1-x}\right)^2}\cdot\frac{1-x-(1+x)(-1)}{(1-x)^2} = \frac{(1-x)^2}{(1-x)^2+(x+1)^2}\cdot\frac{2}{(1-x)^2} = \frac{2}{2x^2+2} = \frac{1}{x^2+1}$$

i) $f(x) = \text{arc tg}\left(\frac{1+senx}{\cos x}\right)$

$$f'(x) = \frac{1}{1+\left(\dfrac{1+senx}{\cos x}\right)^2}\cdot\frac{\cos x\cdot\cos x-(1+senx)(-senx)}{\cos^2 x} = \frac{\cos^2 x}{\cos^2 x+(1+senx)^2}\cdot\frac{\cos^2 x+senx+sen^2x}{\cos^2 x} =$$

$$= \frac{1+senx}{2+2senx} = \frac{1}{2}$$

j) $f(x) = \text{arcsen}\left(\sqrt{1-x^2}\right)$

$$f'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-(1-x^2)}}\cdot\frac{-2x}{2\sqrt{1-x^2}} = \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$$

k) $f(x) = \operatorname{arctg}\left(\dfrac{x}{\sqrt{1-x^2}}\right)$

$$f'(x) = \frac{1}{1+\dfrac{x^2}{1-x^2}}\cdot\frac{\sqrt{1-x^2} - x\cdot\dfrac{-2x}{2\sqrt{1-x^2}}}{1-x^2} = \frac{1-x^2}{1-x^2+x^2}\cdot\frac{1-x^2+x^2}{(1-x^2)\sqrt{1-x^2}} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

l) $f(x) = \operatorname{arctg}\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)$

$$f'(x) = \frac{1}{1+\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)^2}\cdot\left(1+\frac{2x}{2\sqrt{1+x^2}}\right) = \frac{1}{2\left(1+x^2+x\sqrt{1+x^2}\right)}\cdot\frac{x+\sqrt{1+x^2}}{\sqrt{1+x^2}} \underbrace{=}_{(1)}$$

(1) Sacando factor común $\sqrt{1+x^2}$ **:** $1+x^2+x\sqrt{1+x^2} = \sqrt{1+x^2}\left(\sqrt{1+x^2}+x\right)$

$$= \frac{1}{2\sqrt{1+x^2}\left(\sqrt{1+x^2}+x\right)}\cdot\frac{x+\sqrt{1+x^2}}{\sqrt{1+x^2}} = \frac{1}{2(1+x^2)}$$