CÁLCULO DE DERIVADAS

1.- Determinar la derivada de las siguientes funciones irracionales:

a) $f(x)=\sqrt{4x+x^2}$ b) $f(x)=\sqrt{3x}+\frac{1}{x}$ c) $f(x)=\sqrt[3]{x^2+1}$

d) $f(x)=(1+x)\sqrt{1-x}$ e) $f(x)=\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}$ f) $f(x)=\frac{x}{\sqrt{1+x}}$

2.- Obtener la derivada de las siguientes funciones exponenciales y logarítmicas:

a) $f(x)=(x-1)\cdot e^x$ b) $f(x)=a^{2x+3}$ c) $f(x)=\frac{1+\ln x}{x}$

d) $f(x)=\log_a(5x^2-3)$ e) f(x) = ln (ax + b) f) f(x) = ln (ln x)

g) $f(x)=\frac{e^x-1}{e^x+1}$ h) $f(x)=\frac{2e^x}{e^x+1}$ i) $f(x)=\log_2\left[x^2+1\right]$

3.- Obtener la derivada de las siguientes funciones trigonométricas:

a) $f(x) = \text{sen}^2 x$ b) $f(x) = \text{sen}\, x^2$ c) $f(x) = \text{sen}^2 x - \cos^2 x$

d) $f(x)=\frac{\text{sen}\,x\cdot\cos x}{2}$ e) $f(x)=\frac{\cos x}{1-\text{sen}\,x}$ f) $f(x)=\frac{\text{sen}\,x}{1+\text{tg}^2 x}$

g) f(x) = ln cos x h) f(x) = ln sen x i) $f(x)=\frac{\text{sen}\,x}{1+\cos x}$

4.- Determinar la derivada de las funciones:

a) f(x) = sec x b) g(x) = cosec x c) h(x) = cotg x

d) $f(x)=\frac{\text{cosec}\,x}{3\sec x}$ e) $f(x) = (1+\text{tg}^2 x)\cdot\sec^2 x$ f) f(x) = cosec x · sec x

g) $f(x) = \arccos(x^2-1)$ h) $f(x)=\text{arctg}(2x+1)$ i) $f(x)=\frac{1}{3}\text{arcsen}\,\frac{3x}{2}$

5.- Obtener la derivada de las siguientes funciones:

1) $f(x)=\frac{x^3}{1+x^2}$ 2) $f(x)=\frac{6x}{2+x^4}$ 3) $f(x)=\frac{1}{(1-x)^2}$

4) $f(x)=x\cdot\sqrt{x^2+2}$ 5) $f(x)=\frac{1-x}{\sqrt{1-x^2}}$ 6) $f(x)=\frac{2x^2-1}{\sqrt{x}}$

7) f(x) = x (ln x – 1) 8) $f(x)=\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right)$ 9) $f(x)=\frac{e^x+e^{-x}}{2}$

10) $f(x)=\ln\left(\frac{e^x}{e^x+1}\right)$ 11) $f(x)=\ln\left(1+\sqrt{x}\right)$ 12) $f(x)=\ln\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)$

13) $f(x)=\sqrt{1+\text{sen}\,x}$ 14) $f(x)=\frac{1+\cos x}{1-\cos x}$ 15) $f(x)=\ln\sqrt{\frac{1+\text{sen}\,x}{1-\text{sen}\,x}}$

16) f(x) = arcsen (cos x) 17) f(x) = arctg (cotg x) 18) $f(x)=\arccos\sqrt{1-x^2}$

6.- Calcula la derivada de las siguientes funciones, aplicando la derivación logarítmica:

a) $y = x^x$ b) $y = x^{\ln x}$ c) $y = x^{\cos x}$

d) $f(x)=(\text{tg}\,x)^{\text{tg}\,x}$ e) $f(x)=(\cos x)^x$ f) $f(x)=(\text{tg}\,x)^x$

SOLUCIONES

1.- Determinar la derivada de las siguientes funciones irracionales:

a) $f(x)=\sqrt{4x+x^2} \Rightarrow f'(x)=\frac{1}{2\sqrt{4x+x^2}}\cdot(4+2x)=\frac{2+x}{\sqrt{4x+x^2}}$

b) $f(x)=\sqrt{3x}+\frac{1}{x} \Rightarrow f'(x)=\sqrt{3x}+\frac{1}{x}=\frac{3}{2\sqrt{3x}}-\frac{1}{x^2}$

c) $f(x)=\sqrt[3]{x^2+1} \Rightarrow f'(x)=\frac{2x}{3\sqrt[3]{(x^2+1)^2}}$

d) $f(x)=(1+x)\sqrt{1-x} \Rightarrow f'(x)=\sqrt{1-x}+(1+x)\cdot\frac{-1}{2\sqrt{1-x}}=\frac{2(1-x)-(1+x)}{2\sqrt{1-x}}=\frac{1-3x}{2\sqrt{1-x}}$

e) $f(x)=\sqrt{\frac{1+x}{1-x}} \Rightarrow f'(x)=\frac{1}{2\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}}\cdot\frac{1-x-(1+x)(-1)}{(1-x)^2}=\frac{\sqrt{1-x}}{2\sqrt{1+x}}\cdot\frac{2}{(1-x)^2}=\frac{\sqrt{1-x^2}}{(1+x)(1-x)^2}$

f) $f(x)=\frac{x}{\sqrt{1+x}} \Rightarrow f'(x)=\frac{x}{\sqrt{1+x}}=\frac{\sqrt{1+x}-x\cdot\frac{1}{2\sqrt{1+x}}}{1+x}=\frac{\frac{2+2x-x}{2\sqrt{1+x}}}{1+x}=\frac{2+x}{2(1+x)\sqrt{1+x}}=\frac{(2+x)\sqrt{1+x}}{2(1+x)^2}$

2.- Obtener la derivada de las siguientes funciones exponenciales y logarítmicas:

a) $f(x)=(x-1)\cdot e^x \Rightarrow f'(x)=(x-1)\cdot e^x = e^x+(x-1)\cdot e^x = xe^x$

b) $f(x)=a^{2x+3} \Rightarrow f'(x)=a^{2x+3}\cdot\ln a\cdot 2= 2a^{2x+3}\cdot\ln a$

c) $f(x)=\frac{1+\ln x}{x} \Rightarrow f'(x)=\frac{\frac{1}{x}\cdot x-(1+\ln x)}{x^2}=\frac{\ln x}{x^2}$

d) $f(x)=\log_a(5x^2-3) \Rightarrow f'(x)=\frac{1}{5x^2-3}\cdot\frac{1}{\ln a}\cdot 10x=\frac{10x}{5x^2-3}\cdot\frac{1}{\ln a}$

e) f(x) = ln (ax + b) $\Rightarrow f'(x)=\frac{1}{ax+b}\cdot a=\frac{a}{ax+b}$

f) f(x) = ln (ln x) $\Rightarrow f'(x)=\frac{1}{\ln x}\cdot\frac{1}{x}=\frac{1}{x\ln x}$

g) $f(x)=\frac{e^x-1}{e^x+1} \Rightarrow f'(x)=\frac{e^x(e^x+1)-(e^x-1)e^x}{(e^x+1)^2}=\frac{2e^x}{(e^x+1)^2}$

h) $f(x)=\frac{2e^x}{e^x+1} \Rightarrow f'(x)=\frac{2e^x(e^x+1)-2e^x\cdot e^x}{(e^x+1)^2}=\frac{2e^x}{(e^x+1)^2}$

i) $f(x)=\log_2[x^2+1] \Rightarrow f'(x)=\frac{1}{x^2+1}\cdot\frac{1}{\ln 2}(2x)=\frac{2x}{x^2+1}\cdot\frac{1}{\ln 2}$

3.- Obtener la derivada de las siguientes funciones trigonométricas:

a) $f(x) = sen^2 x \Rightarrow f'(x) = 2 \, sen \, x \cos x = sen \, 2x$

b) $f(x) = sen \, x^2 \Rightarrow f'(x) = \cos x^2 \cdot 2x = 2x \cos x^2$

c) $f(x) = sen^2 x - \cos^2 x \Rightarrow f'(x) = 2 \, sen \, x \cos x - 2\cos x \, (-sen x) = 4 \, sen \, x \cos x$

d) $f(x) = \dfrac{sen \, x \cdot \cos x}{2} \Rightarrow f'(x) = \dfrac{1}{2}(\cos x \cdot \cos x - sen x \cdot sen x) = \dfrac{\cos^2 x - sen^2 x}{2} = \dfrac{\cos 2x}{2}$

e) $f(x) = \dfrac{\cos x}{1 - sen \, x} \Rightarrow f'(x) = \dfrac{\cos x}{1 - sen \, x} = \dfrac{-sen x (1 - sen x) - \cos x(-\cos x)}{(1 - sen \, x)^2} = \dfrac{-sen x + sen^2 x + \cos^2 x}{(1 - sen \, x)^2} =$

$$= \frac{1 - sen x}{(1 - sen \, x)^2} = \frac{1}{1 - sen \, x}$$

f) $f(x) = \dfrac{sen \, x}{1 + tg^2 x} \Rightarrow f'(x) = \dfrac{sen \, x}{1 + tg^2 x} = \dfrac{\cos x \cancel{(1 + tg^2 x)} - sen x \cdot 2tgx \cdot \cancel{(1 + tg^2 x)}}{(1 + tg^2 x)^{\cancel{2}}} = \dfrac{\cos x - 2sen x \, tgx}{1 + tg^2 x} =$

$$= \frac{\cos^2 x - 2sen^2 x}{sec^2 x \cdot \cos x} = \frac{1 - sen^2 x - 2sen^2 x}{sec \, x} = (1 - 3sen^2 x)\cos x$$

g) $f(x) = \ln \cos x \Rightarrow f'(x) = \dfrac{-sen \, x}{\cos x} = -tgx$

h) $f(x) = \ln sen \, x \Rightarrow f'(x) = \dfrac{\cos x}{sen \, x} = ctg \, x$

i) $f(x) = \dfrac{sen \, x}{1 + \cos x} \Rightarrow f'(x) = \dfrac{\cos x (1 + \cos x) - sen x \cdot (-sen x)}{(1 + \cos x)^2} = \dfrac{\cos x}{(1 + \cos x)^2}$

4.- Determinar la derivada de las funciones:

a) $f(x) = sec \, x \Rightarrow f(x) = \dfrac{1}{\cos x} \quad f'(x) = \dfrac{sen x}{\cos^2 x} = tg x \cdot sec \, x$

b) $g(x) = cosec \, x \Rightarrow f(x) = \dfrac{1}{sen \, x} \Rightarrow f'(x) = \dfrac{-\cos x}{sen^2 x} = -ctg x \cdot cosec \, x$

c) $h(x) = cotg \, x \Rightarrow f(x) = \dfrac{\cos x}{sen \, x} \Rightarrow f'(x) = \dfrac{-sen x \cdot sen x - \cos x \cos x}{sen^2 x} = \dfrac{-sen^2 x - \cos^2 x}{sen^2 x} = \dfrac{-1}{sen^2 x}$

d) $f(x) = \dfrac{cosec \, x}{3sec \, x} \Rightarrow f(x) = \dfrac{\cos x}{3 sen \, x} = \dfrac{1}{3} cotg \, x \Rightarrow f'(x) = \dfrac{-1}{3sen^2 x}$

e) $f(x) = (1+tg^2 x) \cdot sec^2 x \Rightarrow f(x) = \dfrac{1}{\cos^2 x} \cdot \dfrac{1}{\cos^2 x} = \dfrac{1}{\cos^4 x} \Rightarrow f'(x) = \dfrac{4\cos^3 x \cdot (-sen x)}{\cos^8 x} = \dfrac{-4 sen x}{\cos^5 x}$

f) $f(x) = \dfrac{1}{\cos x \, sen \, x} \Rightarrow f'(x) = \dfrac{-(-sen^2 x + \cos^2 x)}{\cos^2 x \, sen^2 x} = \dfrac{sen^2 x - \cos^2 x}{\cos^2 x \cdot sen^2 x} = \dfrac{1}{\cos^2 x} - \dfrac{1}{sen^2 x} = sec^2 x - cosec^2 x$

g) $f(x) = \arccos(x^2 - 1) \Rightarrow f'(x) = -\frac{2x}{\sqrt{1-(x^2-1)^2}} = -\frac{2x}{\sqrt{2x^2 - x^4}} = -\frac{2}{\sqrt{2-x^2}}$

h) $f(x) = \operatorname{arctg}(2x+1) \Rightarrow f'(x) = \frac{2}{1+(2x+1)^2} = \frac{2}{4x^2+4x+2} = \frac{1}{2x^2+2x+1}$

i) $f(x) = \frac{1}{3}\operatorname{arcsen}\frac{3x}{2} \Rightarrow f'(x) = \frac{1}{3}\cdot\frac{\frac{3}{2}}{\sqrt{1-\frac{9x^2}{4}}} = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{\frac{1}{2}\sqrt{4-9x^2}} = \frac{1}{\sqrt{4-9x^2}}$

5.- Calcular la derivada de los siguientes productos y divisiones:

1) $f(x) = \frac{x^3}{1+x^2} \Rightarrow f'(x) = \frac{3x^2(1+x^2) - x^3\cdot 2x}{(1+x^2)^2} = \frac{3x^2+x^4}{(1+x^2)^2}$

2) $f(x) = \frac{6x}{2+x^4} \Rightarrow f'(x) = \frac{6(2+x^4) - 6x\cdot 4x^3}{(2+x^4)^2} = \frac{12-18x^4}{(2+x^4)^2}$

3) $f(x) = \frac{1}{(1-x)^2} \Rightarrow f'(x) = \frac{-2(1-x)}{(1-x)^4} = \frac{-2}{(1-x)^3}$

4) $f(x) = x\cdot\sqrt{x^2+2} \Rightarrow f'(x) = x\cdot\sqrt{x^2+2} = \sqrt{x^2+2} + x\frac{\cancel{2}x}{\cancel{2}\sqrt{x^2+2}} = \frac{2x^2+2}{\sqrt{x^2+2}}$

5) $f(x) = \frac{1-x}{\sqrt{1-x^2}} \Rightarrow f'(x) = \frac{1-x}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{-\sqrt{1-x^2} - (1-x)\frac{-\cancel{2}x}{\cancel{2}\sqrt{1-x^2}}}{1-x^2} = \frac{-(1-x^2)+(1-x)x}{(1-x^2)\sqrt{1-x^2}} = \frac{-1+\cancel{x^2}+x-\cancel{x^2}}{(1-x^2)\sqrt{1-x^2}} =$

$= \frac{-1}{(1+x)\sqrt{1-x^2}}$

6) $f(x) = \frac{2x^2-1}{\sqrt{x}} \Rightarrow f'(x) = \frac{2x^2-1}{\sqrt{x}} = \frac{4x\sqrt{x} - (2x^2-1)\frac{1}{2\sqrt{x}}}{x} = \frac{8x^2-(2x^2-1)}{2x\sqrt{x}} = \frac{6x^2+1}{2x\sqrt{x}}$

7) $f(x) = x(\ln x - 1) \Rightarrow f'(x) = (\ln x - 1) + x\frac{1}{x} = \ln x$

8) $f(x) = \ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right) \Rightarrow f'(x) = \frac{1-x}{1+x}\cdot\frac{1-x-(1+x)}{(1-x)^2} = \frac{-2x}{1-x^2}$

9) $f(x) = \frac{e^x+e^{-x}}{2} \Rightarrow f'(x) = \frac{1}{2}(e^x - e^{-x}) = \frac{1}{2}\left(e^x - \frac{1}{e^x}\right) = \frac{e^{2x}-1}{2e^x}$

10) $f(x) = \ln\left(\frac{e^x}{e^x+1}\right) \Rightarrow f'(x) = \frac{e^x+1}{e^x}\cdot\frac{e^x(e^x+1) - e^x\cdot e^x}{(e^x+1)^2} = \frac{1}{e^x+1}$

11) $f(x) = \ln(1+\sqrt{x}) \Rightarrow f'(x) = \frac{1}{1+\sqrt{x}}\cdot\frac{1}{2\sqrt{x}} = \frac{1}{2(\sqrt{x}+x)}$

12) $f(x)=\ln\left(x+\sqrt{1+x^2}\right) \Rightarrow f'(x)=\dfrac{1}{x+\sqrt{1+x^2}}\cdot\left(1+\dfrac{\not{2}x}{\not{2}\sqrt{1+x^2}}\right)=\dfrac{1}{x+\sqrt{1+x^2}}\cdot\dfrac{x+\sqrt{1+x^2}}{\sqrt{1+x^2}}=\dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}}$

13) $f(x)=\sqrt{1+\operatorname{sen} x} \Rightarrow f'(x)=\dfrac{\cos x}{2\sqrt{1+\operatorname{sen} x}}$

14) $f(x)=\dfrac{1+\cos x}{1-\cos x} \Rightarrow f'(x)=\dfrac{1+\cos x}{1-\cos x}=\dfrac{-\operatorname{sen} x(1-\cos x)-(1+\cos x)\operatorname{sen} x}{(1-\cos x)^2}=\dfrac{-2\operatorname{sen} x}{(1-\cos x)^2}$

15) $f(x)=\ln\sqrt{\dfrac{1+\operatorname{sen} x}{1-\operatorname{sen} x}} \Rightarrow f'(x)=\sqrt{\dfrac{1-\operatorname{sen} x}{1+\operatorname{sen} x}}\cdot\dfrac{1}{2}\cdot\sqrt{\dfrac{1-\operatorname{sen} x}{1+\operatorname{sen} x}}\cdot\dfrac{\cos x(1-\operatorname{sen}x)-(1+\operatorname{sen}x)(-\cos x)}{(1-\operatorname{sen} x)^2}=$

$$=\frac{1}{2}\cdot\frac{1-\operatorname{sen} x}{1+\operatorname{sen} x}\cdot\frac{2\cos x}{(1-\operatorname{sen} x)^2}=\frac{\cos x}{1-\operatorname{sen}^2 x}=\frac{1}{\cos x}$$

16) f(x) = arcsen (cos x) $\Rightarrow f'(x)=\dfrac{-\operatorname{sen} x}{\sqrt{1-\cos^2 x}}=-\dfrac{\operatorname{sen} x}{\operatorname{sen} x}=-1$

17) f(x) = arctg (cotg x) $\Rightarrow f'(x)=\dfrac{1}{1+\operatorname{cotg}^2 x}\cdot\left(-\dfrac{1}{\operatorname{sen}^2 x}\right)=\dfrac{1}{1+\dfrac{\cos^2 x}{\operatorname{sen}^2 x}}\cdot\left(-\dfrac{1}{\operatorname{sen}^2 x}\right)=\operatorname{sen}^2 x\cdot\left(-\dfrac{1}{\operatorname{sen}^2 x}\right)=-1$

18) $f(x)=\arccos\sqrt{1-x^2} \Rightarrow f'(x)=-\dfrac{-2x}{1-1+x^2}=\dfrac{2x}{x^2}=\dfrac{2}{x}$

18.- Calcula la derivada de las siguientes funciones, aplicando la derivación logarítmica:

a) $y = x^x \Rightarrow \ln y = x \ln x \Rightarrow \dfrac{y'}{y}=\ln x + x\cdot\dfrac{1}{x} \Rightarrow y'=(\ln x+1)x^x$

b) $y = x^{\ln x} \Rightarrow \ln y = \ln x \cdot \ln x \Rightarrow \dfrac{y'}{y}=2\ln x\cdot\dfrac{1}{x} \Rightarrow y'=\dfrac{2\ln x}{x}\cdot x^{\ln x}$

c) $y = x^{\cos x} \Rightarrow \ln y = \cos x \cdot \ln x \Rightarrow \dfrac{y'}{y}=-\operatorname{sen}x\cdot\ln x+\dfrac{1}{x}\cos x \Rightarrow y'=\left(-\operatorname{sen}x\cdot\ln x+\dfrac{1}{x}\cos x\right)\cdot x^{\cos x}$

d) $f(x)=(\operatorname{tg} x)^{\operatorname{tg} x} \Rightarrow \ln y = \operatorname{tg} x \cdot \ln(\operatorname{tg} x) \Rightarrow \dfrac{y'}{y}=(1+\operatorname{tg}^2x)\cdot\ln(\operatorname{tg}x)+\operatorname{tg}x\dfrac{1}{\operatorname{tg}x}(1+\operatorname{tg}^2x)$

$$\frac{y'}{y}=(1+\operatorname{tg}^2x)\cdot[1+\ln(\operatorname{tg}x)] \Rightarrow y'=\operatorname{tg}x^{\operatorname{tg}x}(1+\operatorname{tg}^2x)\cdot[1+\ln(\operatorname{tg}x)]$$

e) $f(x)=(\cos x)^x \Rightarrow \ln y = x \cdot \ln \cos x \Rightarrow \dfrac{y'}{y}=\ln(\cos x)+x\dfrac{-\operatorname{sen}x}{\cos x}=\ln(\cos x)-x\operatorname{tg}x$

$$y'=(\cos x)^x\cdot[\ln(\cos x)-x\operatorname{tg}x]$$

f) $f(x)=(\operatorname{tg} x)^x \Rightarrow \ln y = x\ln(\operatorname{tg} x) \Rightarrow \dfrac{y'}{y}=\ln\operatorname{tg}x+\dfrac{(1+\operatorname{tg}^2x)}{\operatorname{tg}x} \Rightarrow y'=(\operatorname{tg}x)^x\cdot\left[\ln\operatorname{tg}x+\dfrac{(1+\operatorname{tg}^2x)}{\operatorname{tg}x}\right]$