1 CRECIMIENTO Y DECRECIMIENTO DE UNA FUNCIÓN

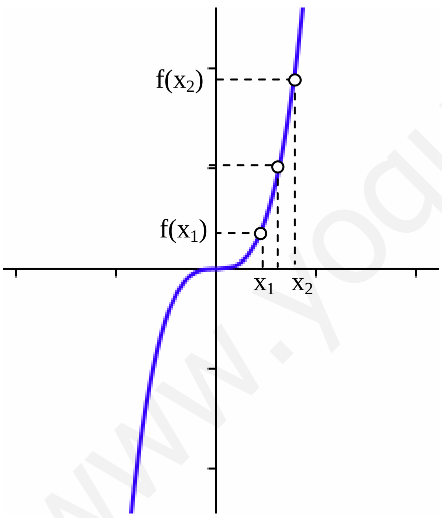
Definiciones

- Se dice que una ***función*** f es ***creciente*** en un punto x_0 si para cualquier punto x de un entorno de x_0, $(x - x_0, x + x_0)$ se verifica:
  - Si $x > x_0 \Rightarrow f(x) > f(x_0)$
  - Si $x < x_0 \Rightarrow f(x) < f(x_0)$
- Se dice que una ***función*** f es ***decreciente*** en un punto x_0 si para cualquier punto x de un entorno de x_0, $(x - x_0, x + x_0)$ se verifica:
  - Si $x > x_0 \Rightarrow f(x) < f(x_0)$
  - Si $x < x_0 \Rightarrow f(x) > f(x_0)$

- Una función es ***creciente*** **en un *intervalo*** [a,b] si dados dos puntos cualesquiera del intervalo, x_1, x_2, $x_1 < x_2$ se cumple que $f(x_1) < f(x_2)$
- Una función es ***decreciente*** **en un *intervalo*** [a,b] si dados dos puntos cualesquiera del intervalo, x_1, x_2, $x_1 < x_2$ se cumple que $f(x_1) > f(x_2)$

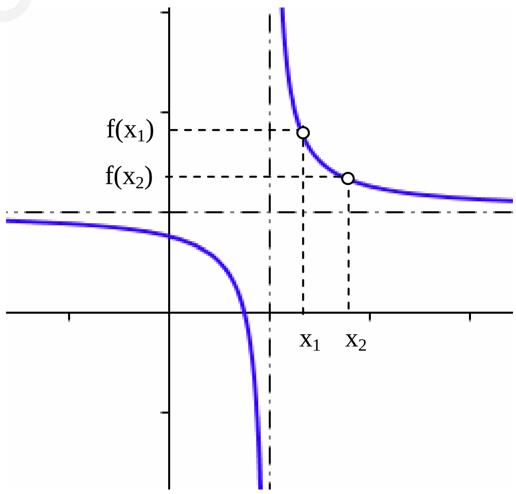
Ejemplos

a) $f(x) = x^3$ creciente



$x_1 < x_2 \rightarrow f(x_1) < f(x_2)$

b) $f(x) = \dfrac{1}{x-2} + 2 = \dfrac{2x-3}{x-2}$ decreciente



$x_1 < x_2 \rightarrow f(x_1) > f(x_2)$

1.2. Criterios de crecimiento y decrecimiento de una función

Sea f una función continua en [a,b] y derivable en (a,b):

- Si $f'(x) > 0$ para todo x en (a, b), entonces *f(x) es **creciente** en (a , b)*
- Si $f'(x) < 0$ para todo x en (a, b), entonces *f(x) es **decreciente** en (a , b)*
- Si $f'(x) = 0$ para todo x en (a, b), entonces *f(x) es **constante** en (a , b)*

1.3. Cálculo de los intervalos de crecimiento y decrecimiento

Para determinar los intervalos de crecimiento de una función:

- Hallar los puntos donde $f'(x) = 0$ o no esté definida la derivada primera.
- Estos puntos dividen el dominio de definición de f en intervalos, en los cuales estudiaremos el signo de la derivada primera.

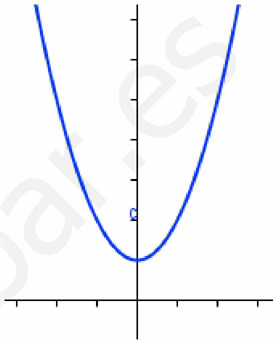
Ejemplos

1. *Estudiar el crecimiento y decrecimiento de $f(x) = x^2 + 1$*

$f'(x) = 2x \Rightarrow f'(x) = 0$ si $x = 0$

Estudiamos el signo de la derivada primera en los intervalos:

- Si $x > 0 \Rightarrow f'(x) > 0 \Rightarrow$ f es creciente
- Si $x < 0 \Rightarrow f'(x) < 0 \Rightarrow$ f es decreciente

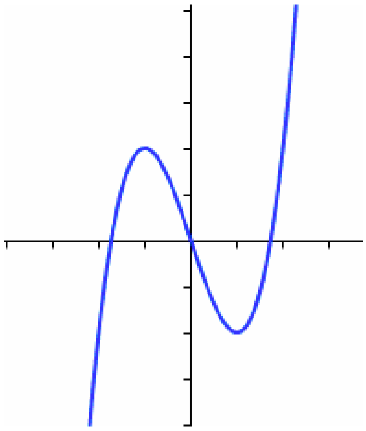


2. *Estudiar el crecimiento y decrecimiento de $f(x) = x^3 - 3x$*

$f'(x) = 3x^2 - 3 = 3(x - 1)(x + 1) \Rightarrow f'(x) = 0$ si $x = -1$, $x = 1$

Estudiamos el signo de la derivada primera en los intervalos:

- $x < -1 \Rightarrow x + 1 < 0,\ x - 1 < 0 \Rightarrow f'(x) > 0 \Rightarrow$ f es creciente
- $-1 < x < 1 \Rightarrow x + 1 > 0,\ x - 1 < 0 \Rightarrow f'(x) < 0 \Rightarrow$ f es decreciente
- $x > 1 \Rightarrow x + 1 > 0,\ x - 1 > 0 \Rightarrow f'(x) > 0 \Rightarrow$ f es creciente



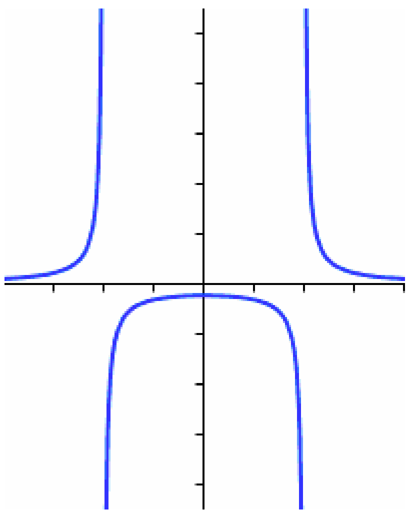
3. *Estudiar el crecimiento y decrecimiento de $f(x) = \dfrac{1}{x^2 - 4}$*

$f'(x) = \dfrac{-2x}{(x^2 - 4)^2} \Rightarrow f'(x) = 0$ si $x = 0$

Además f´ no está definida para x = 2, x= -2:

Estudiamos el signo de la derivada primera en los intervalos:

- $x < -2 \Rightarrow -2x > 0,\ (x^2 - 4)^2 > 0 \Rightarrow f'(x) > 0 \Rightarrow$ f es creciente
- $-2 < x < 0 \Rightarrow -2x > 0,\ (x^2 - 4)^2 > 0 \Rightarrow f'(x) > 0 \Rightarrow$ f es creciente
- $0 < x < 2 \Rightarrow -2x < 0,\ (x^2 - 4)^2 > 0 \Rightarrow f'(x) < 0 \Rightarrow$ f es decreciente
- $x > 2 \Rightarrow -2x < 0,\ (x^2 - 4)^2 > 0 \Rightarrow f'(x) < 0 \Rightarrow$ f es decreciente



2 MÁXIMOS Y MÍNIMOS RELATIVOS DE UNA FUNCIÓN

Definiciones

- Se dice que la función f tiene un ***máximo relativo*** en x_0 si para cualquier punto x de un entorno de x_0 se verifica que $f(x) \le f(x_0)$
- Se dice que la función f tiene un ***mínimo relativo*** en x_0 si para cualquier punto x de un entorno de x_0 se verifica que $f(x) \ge f(x_0)$

Si una función es continua en un intervalo cerrado [a,b] alcanza un máximo y un mínimo en dicho intervalo.

Ejemplo:

Sea la función $f(x) = x^2$

Para cualquier valor x real se verifica que $x^2 \ge 0$, por tanto, la función alcanza un mínimo en x = 0

2.2. Condición necesaria de extremo relativo

Si f es derivable en x_0 y tiene un extremo relativo en x_0 entonces $f\,'(x_0) = 0$.

Es decir la tangente a la curva y = f(x) en un extremo relativo es horizontal.

<u>*Demostración*</u>

$$f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

Si f tiene un máximo relativo en x_0, se verifica:

- Si $x > x_0 \Rightarrow f(x) \le f(x_0) \Rightarrow \dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \le 0 \Rightarrow f'(x_0) \le 0$
- Si $x < x_0 \Rightarrow f(x) \le f(x_0) \Rightarrow \dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \ge 0 \Rightarrow f'(x_0) \ge 0$

$\rightarrow$ Por tanto, $f\,'(x_0) = 0$

Del mismo modo, se demuestra si f tiene un mínimo relativo en x_0

<u>Observaciones</u>:

a) Si $f\,'(x_0) = 0$ no tiene por qué ser x_0 un extremo relativo de f.

Ejemplo:

$f(x) = x^3$ es una función estrictamente creciente con lo cual no tiene extremos relativos.

Sin embargo $f\,'(x) = 3x^2$ se anula para x = 0

b) Puede existir extremo relativo en puntos donde no exista la derivada primera.

Ejemplo:

f(x) = |x| no es derivable en x = 0 ($f'(0^+) = 1 ; f'(0^-) = -1 \rightarrow$ No existe $f'(0)$)

Sin embargo $|x| \ge 0$ para cualquier valor x real, por tanto, f tiene un mínimo en x = 0

2.3. Condiciones suficientes de extremo relativo

2.3.1. Criterio de variación de la función

- f tiene un máximo relativo en x_0 si $f(x) < f(x_0)$ para cualquier valor x de un entorno de x_0.
- f tiene un mínimo relativo en x_0 si $f(x) > f(x_0)$ para cualquier valor x de un entorno de x_0.

Ejemplo:

$f(x) = x^2$ es una función que tiene un mínimo en x = 0 ya que $x^2 \geq 0$ para cualquier valor x real.

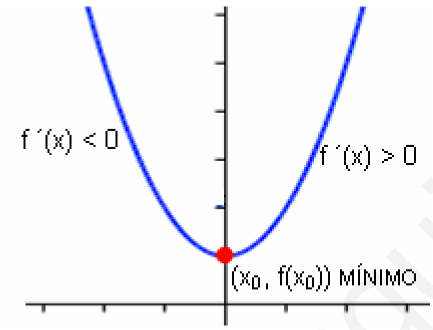
$f(x) = 1 - x^2$ es una función que tiene un máximo en x = 0 ya que:

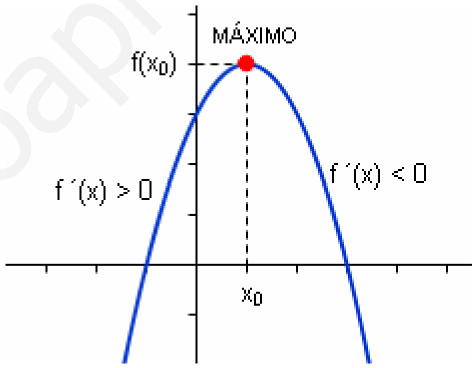
$x^2 \geq 0 \Rightarrow -x^2 \leq 0 \Rightarrow 1 - x^2 \leq 1 \Rightarrow f(x) \leq 1 = f(0)$ para cualquier valor x real

2.3.2. Criterio de variación de la primera derivada

Sea f una función continua en [a,b] y derivable en (a,b), excepto acaso para un punto $x_0 \in (a,b)$:

- Si $f´(x) > 0$ para $x < x_0$ y $f´(x) < 0$ para $x > x_0 \Rightarrow$ f tiene un máximo relativo en x_0.
- Si $f´(x) < 0$ para $x < x_0$ y $f´(x) > 0$ para $x > x_0 \Rightarrow$ f tiene un mínimo relativo en x_0.





2.3.3. Criterio de variación de la derivada segunda

Si $f´(x_0) = 0$ para $x_0 \in (a,b)$, donde f está definida.

- Si $f´´(x_0) > 0$, entonces f(x) tiene un mínimo relativo en x_0.
- Si $f´´(x_0) < 0$, entonces f(x) tiene un máximo relativo en x_0.

Demostración

$$f''(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f'(x) - f'(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \to x_0} \frac{f'(x)}{x - x_0}, \text{ ya que } f´(x_0) = 0$$

- Si $f´´(x_0) < 0 \Rightarrow \dfrac{f'(x)}{x - x_0} < 0 \Rightarrow \begin{cases} \text{si } x < x_0 \to f'(x) > 0 \\ \text{si } x < x_0 \to f'(x) < 0 \end{cases}$

  La función pasa de creciente a decreciente, entonces f(x) tiene un máximo relativo en x_0.

- Si $f´´(x_0) > 0 \Rightarrow \dfrac{f'(x)}{x - x_0} > 0 \Rightarrow \begin{cases} \text{si } x < x_0 \to f'(x) < 0 \\ \text{si } x < x_0 \to f'(x) > 0 \end{cases}$

  La función pasa de decreciente a creciente, entonces f(x) tiene un mínimo relativo en x_0.

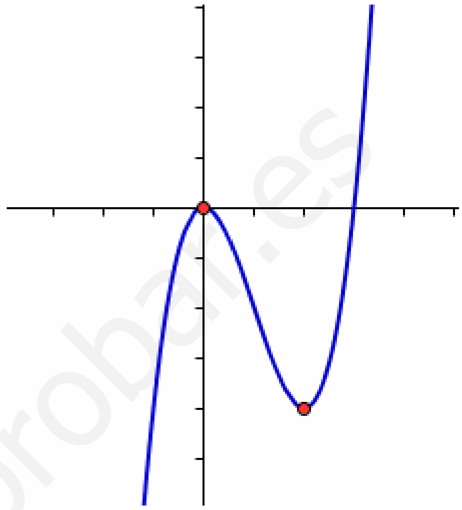
2.4. Cálculo de los extremos relativos de una función

Los extremos relativos de una función f(x) sólo pueden encontrarse entre:

1. Los puntos singulares o críticos, es decir, los puntos donde la primera derivada es nula.
2. Los puntos donde f no es derivable.

Ejemplos

1. *Determinar los extremos relativos de* $f(x) = x^3 - 3x^2$



$f'(x) = 3x^2 - 6x = 3x(x - 2) = 0 \Rightarrow x = 0,\ x = 2$

- $x < 0 \Rightarrow f'(x) > 0 \ \Rightarrow$ f creciente
- $0 < x < 2 \Rightarrow f'(x) < 0 \ \Rightarrow$ f decreciente
- $x > 2 \Rightarrow f'(x) > 0 \ \Rightarrow$ f creciente

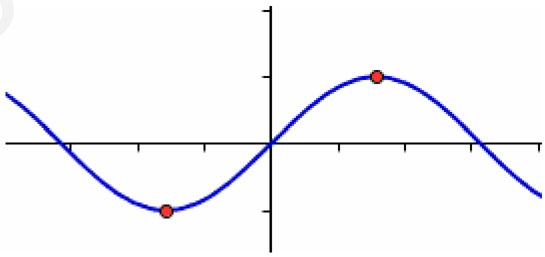
En x = 0 tiene un máximo y en x = 2 un mínimo.

$f''(x) = 6x - 6$

$f''(0) = -6 < 0 \Rightarrow$ f alcanza un máximo en x = 0

$f''(2) = 6 > 0 \Rightarrow$ f alcanza un mínimo en x = 0

2. *Determinar los extremos relativos de f(x) = sen x*

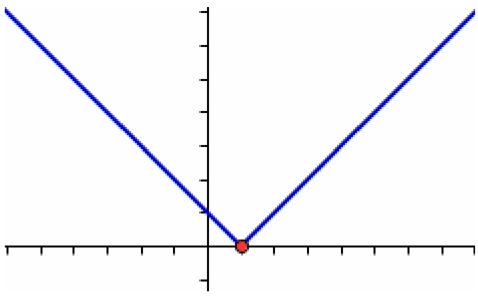


Para cualquier valor x, se verifica $-1 \leq x \leq 1$

Por tanto, la función tiene:

- Mínimo en $x = \dfrac{3\pi}{2} + 2k\pi,\ k \in \mathbb{R}$
- Máximo en $x = \dfrac{\pi}{2} + 2k\pi,\ k \in \mathbb{R}$

3. *Determinar los extremos relativos de* $f(x) = |x - 1|$



$$f(x) = \begin{cases} x - 1 & \text{si } x \geq 1 \\ 1 - x & \text{si } x < 1 \end{cases} \Rightarrow f'(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x > 1 \\ -1 & \text{si } x < 1 \end{cases}$$

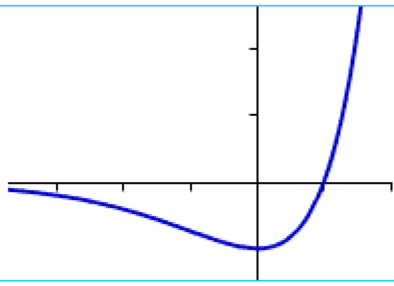
f no es derivable en x = 1

Para cualquier valor de x, $|x - 1| \geq 0 \Rightarrow |x - 1| \geq 0$

$f(x) = 0$ si $|x - 1| = 0 \Rightarrow x = 1$

La función tiene un mínimo en x = 1

4. *Determinar los extremos relativos de* $f(x) = (x - 1)\, e^x$



$f'(x) = e^x + (x - 1)e^x = x\, e^x$

$f'(x) = 0$ si $x = 0$

$f''(x) = e^x + x\, e^x = (x + 1)\, e^x$

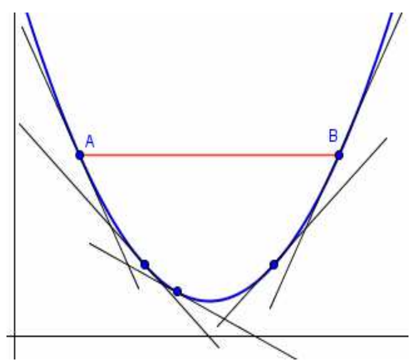
$f''(0) = e^0 = 1 \Rightarrow$ f tiene un mínimo en x = 0

3 CONCAVIDAD Y CONVEXIDAD. PUNTOS DE INFLEXIÓN

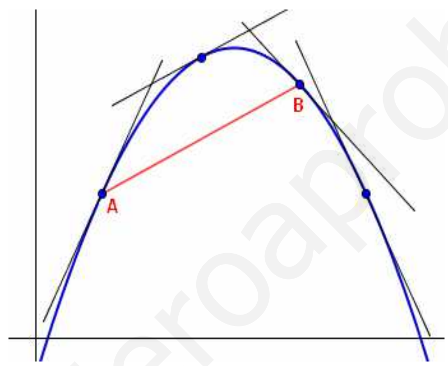
Definiciones

- Diremos que una función f derivable es ***convexa*** en un punto x_0 si existe un arco de la curva por encima de la recta tangente a la curva y = f(x) en x_0.
- Diremos que una función f derivable es ***cóncava*** en un punto x_0 si existe un arco de la curva por debajo de la recta tangente a la curva y = f(x) en x_0.
- Cuando en un punto (a,f(a)) la función cambia de concavidad se tiene un ***punto de inflexión*** y la recta tangente en dicho punto, si existe, atraviesa la curva.

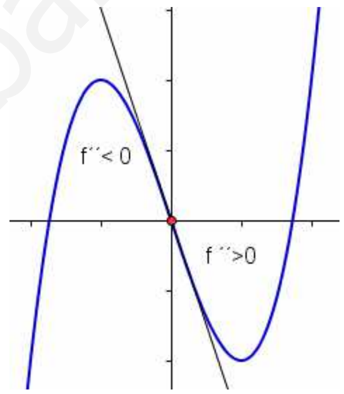
Un función f(x) es cóncava (convexa) en un intervalo [a,b] cuando lo es en cada uno de sus puntos, o bien, cuando el segmento que une los puntos A(a,f(a)) y B(b,f(b)) queda por encima (por debajo) del arco de curva correspondiente AB.



CÓNCAVA



CONVEXA



PUNTO DE INFLEXIÓN

NOTA: Esta elección es totalmente arbitraria: algunos autores llaman cóncava a lo que nosotros llamaremos convexa, y viceversa. Para evitar confusiones, se recomienda indicar, no los adjetivos, sino los símbolos matemáticos correspondientes, los cuales están más extendidos: $\cup$; $\cap$

3.2. Criterios de concavidad y convexidad

Sea f una función derivable en (a,b) tal que existe la derivada segunda en x_0:

a) $f''(x_0) < 0$, entonces f es convexa $(\cap)$ en x_0

b) $f''(x_0) > 0$, entonces f es cóncava $(\cup)$ en x_0

c) $f''(x_0) = 0$ y $f'''(x_0) \neq 0$, entonces f tiene un punto de inflexión en x_0.

Si f es cóncava $(\cup)$ en $x_0 \Rightarrow$ Las pendientes de las rectas tangentes van creciendo $\Rightarrow$ f ´ es creciente en $x_0 \Rightarrow f''(x_0) > 0$

Si f es convexa $(\cap)$ en $x_0 \Rightarrow$ Las pendientes de las rectas tangentes van creciendo $\Rightarrow$ f ´ es decreciente en $x_0 \Rightarrow f''(x_0) < 0$

Si f tiene un punto de inflexión en $x_0 \Rightarrow f''(x_0) = 0$

3.3. Cálculo de los intervalos de concavidad y convexidad

- Hallar los puntos donde $f''(x) = 0$ o no esté definida la derivada segunda.
- Estos puntos definen los intervalos en los que f'' tiene signo constante.
- Tomando un punto de cada intervalo determinamos el signo de f'' en cada intervalo.

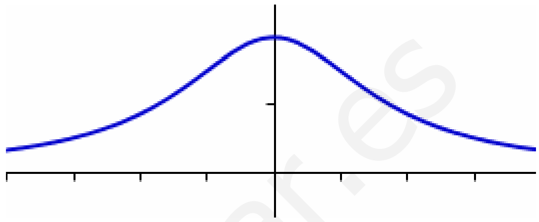
Ejemplo

1. *Estudia la curvatura de la función* $f(x) = \dfrac{6}{x^2+3}$

$$f'(x) = \frac{-12x}{(x^2+3)^2} \Rightarrow f''(x) = \frac{36(x^2-1)}{(x^2+3)^3}$$

$f''(x) = 0$ si $x = -1$, $x = 1$

- f es convexa $(\cap)$ para $-1 < x < 1$ $(x^2 - 1 < 0)$
- f es cóncava $(\cup)$ para $x < -1$ y $x > 1$ $(x^2 - 1 > 0)$



3.4. Condición necesaria de punto de inflexión

Si f es derivable en x_0 y tiene un punto de inflexión en x_0 entonces $f''(x_0) = 0$.

***<u>Observaciones</u>*:**

1.- Si $f''(x_0) = 0$ no garantiza que f tenga un punto de inflexión en x_0.

Ejemplo:

Sea la función $f(x) = x^4$ $\rightarrow f''(x) = 12x^2$ nula en $x = 0$

Sin embargo, (0,0) no es un punto de inflexión ya que no hay cambio de concavidad ($f''(x) > 0$ para cualquier valor de x).

2.- Una función puede presentar cambios de concavidad y no tener ningún punto de inflexión.

Ejemplo

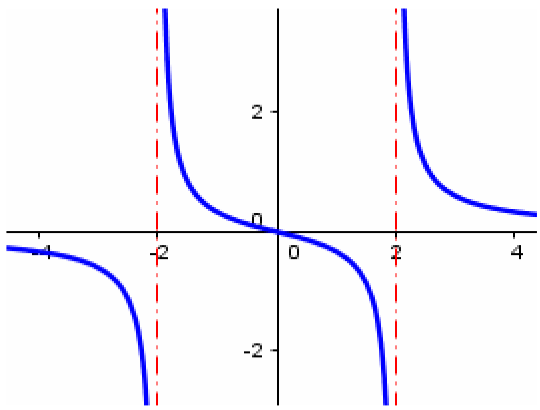
Sea la función $f(x) = \dfrac{x^2+1}{x^2-4}$

$$f''(x) = \frac{30x^2+40}{(x^2-4)^3} \neq 0 \text{ para cualquier valor de x.}$$

Por tanto, no tiene punto de inflexión.

Sin embargo, se tiene que:

- Si $-2 < x < 2$, $f''(x) < 0 \Rightarrow$ f convexa $(\cap)$
- Si $x > 2$ ó $x < -2$, $f''(x) > 0 \Rightarrow$ f cóncava $(\cup)$



3.- Para que exista punto de inflexión en x_0 es necesario que exista $f(x_0)$ y que la función cambie de concavidad en x_0.

3.5. Condición suficiente de punto de inflexión

3.5.1. Criterio de variación de la segunda derivada

Estudiando el signo de la segunda derivada $f''(x)$ a ambos lados de $x = x_0 \in Dom(f)$:

- Si en $x = x_0$ pasa de cóncava a convexa $\rightarrow x = x_0$ es P.I.
- Si en $x = x_0$ pasa de convexa a cóncava $\rightarrow x = x_0$ es P.I.

3.5.2. Criterio de la tercera derivada

Sea $x_0 \in Dom(f)$, si $f''(x_0) = 0$ y $f'''(x_0) \neq 0$, entonces f(x) tiene en x_0 un punto de inflexión..

Ejemplo

1. *Estudiar la concavidad, la convexidad y los puntos de inflexión de la función $f(x) = x^3 - 3x^2 + x + 1$*

Dominio (f) = $\mathbb{R}$

$y' = 3x^2 - 6x + 1$ $y'' = 6x - 6$ $y''' = 6$

$y'' = 0$ si $6x - 6 = 0 \Rightarrow x = 1$

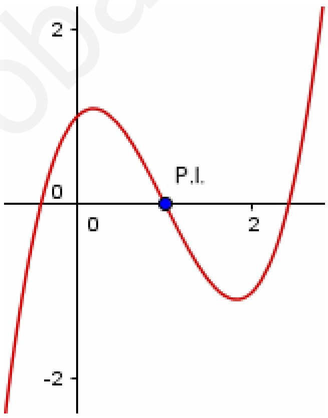
a) Estudiando el signo de la segunda derivada:

- $y'' > 0$ para $x > 1 \Rightarrow$ y cóncava $(\cup)$ para $x > 1$
- $y'' < 0$ para $x < 1 \Rightarrow$ y convexa $(\cap)$ para $x < 1$

Tiene un P.I. en (1, f(1)) = (1, 0)

b) Estudiando el signo de la tercera derivada en el punto:

$y'''(1) = 6 \neq 0 \Rightarrow (1, 0)$ P.I.



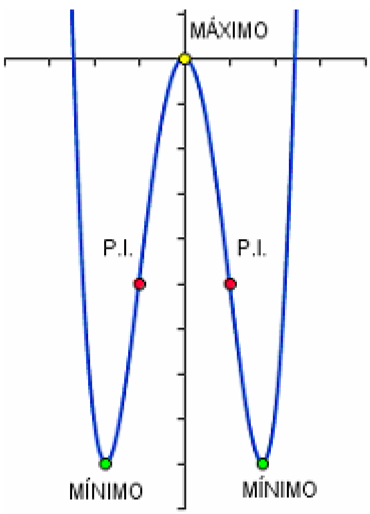
2. *Estudiar el crecimiento, extremos relativos, curvatura y los puntos de inflexión de $f(x) = x^4 - 6x^2$*

$f'(x) = 4x^3 - 12x \Rightarrow f'(x) = 0$ si $x = 0, x = \pm\sqrt{3}$

- f creciente para $-\sqrt{3} < x < 0$ y $x > \sqrt{3}$
- f decreciente para $x < -\sqrt{3}$ y $0 < x < \sqrt{3}$
- Máximo: (0,0)
- Mínimos: $(-\sqrt{3},-9)$; $(\sqrt{3},-9)$

$f''(x) = 12x^2 - 12 = 12(x-1)(x+1) \Rightarrow f''(x) = 0$ si $x = \pm 1$

- f es cóncava para x < -1 y x > 1
- f es convexa para -1 < x < 1
- Puntos de inflexión: (1,-5), (-1, -5)



4 PROBLEMAS DE OPTIMIZACIÓN

Los máximos y mínimos se aplican no sólo en la resolución de problemas puramente matemáticos, sino también en otras áreas en los que se trata de optimizar una función, es decir, encontrar los valores de ciertas variables para que una determinada magnitud tenga el valor óptimo (máximo o mínimo).

Por ejemplo, una fábrica quiere enlatar conservas en botes de 1 litro de capacidad, de forma que las dimensiones del bote resulte lo más barato posible.

Estos problemas de optimización se resuelven del siguiente modo:

1) Si M es la magnitud que se desea optimizar, se expresa M en función de las variables que la definen.
2) Estas variables se definen en función de una de ellas (los datos del problema permiten hacerlo)
3) Una vez que la magnitud M queda expresada en términos de una sola variable, se hallan los máximos y mínimos por los métodos expuestos en los apartados anteriores.

Ejemplos

1. *Hallar un número positivo cuya suma con su inverso sea mínima.*

Llamamos x a dicho número, su inverso es $\frac{1}{x}$ y la suma de ambos: $x+\frac{1}{x}$

El problema quiere que minimicemos dicha suma.

Definimos la función $f(x)=x+\frac{1}{x}=\frac{x^2+1}{x}$ de la que hallaremos un mínimo.

$$f'(x)=\frac{2x\cdot x-1\cdot(x^2+1)}{x^2}=\frac{x^2-1}{x^2}$$

Imponemos que $f'(x)=0 \rightarrow x^2-1=0 \rightarrow x=1,\ x=-1$

$$f''(x)=\frac{2x\cdot x^2-2x\cdot(x^2-1)}{x^4}=\frac{2x}{x^4}=\frac{2}{x^3}\Rightarrow f''(1)=2>0 \quad \text{y} \quad f''(-1)=-2<0$$

Por tanto, el mínimo se alcanza en $x = 1 \rightarrow$ El número pedido es el 1.

2. *De todos los rectángulos de área 16m², ¿qué dimensiones tiene el de menor perímetro?*

Sea x = base e y = altura del rectángulo

Sea A el área de dicho rectángulo: $A = xy = 16 \Rightarrow y=\frac{16}{x}$

Perímetro del rectángulo: $P = 2x + 2y = 2x+2\cdot\frac{16}{x}=2x+\frac{32}{x}=\frac{2x^2+32}{x} \rightarrow P=\frac{2x^2+32}{x}$

Derivando: $P'=\frac{4x\cdot x-(2x^2+32)}{x^2}=\frac{2x^2-32}{x^2}=\frac{2(x^2-16)}{x^2}$

Imponemos que $P'=0 \Rightarrow x^2-16=0 \Rightarrow x=\pm 4$ (descartamos el valor negativo) $\rightarrow x = 4$

$P'>0$ si $x\in(-\infty,-4)\cup(4,+\infty)$, $P'<0$ si $x\in(-4,4)$

El mínimo se alcanza en x = 4 m $\rightarrow$ y = 4 m

El rectángulo de menor perímetro es el cuadrado de lado 4 m.

3. *Dado un círculo de radio 4 dm, inscribir en él un rectángulo de área máxima.*

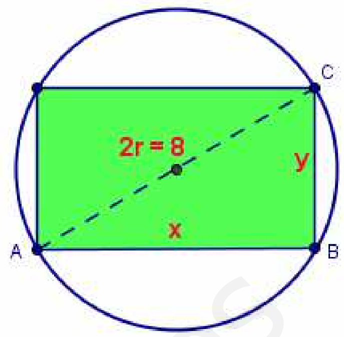
Área = f(x) = x · y, siendo x la base e y la altura del rectángulo.

El triángulo ABC es rectángulo, por tanto, se verifica:

$8^2 = x^2 + y^2 \Rightarrow y = \sqrt{64 - x^2}$

Por tanto, el área queda expresado en función de x:

$f(x) = x \cdot \sqrt{64 - x^2}$. Derivamos:



$$f'(x) = \sqrt{64 - x^2} + x\frac{-\cancel{2}x}{\cancel{2}\sqrt{64 - x^2}} = \frac{64 - 2x^2}{\sqrt{64 - x^2}}$$

Imponemos que $f'(x) = 0 \rightarrow 64 - 2x^2 = 2(32 - x^2) = 0 \rightarrow x = \sqrt{32} = 4\sqrt{2}$ (descarto la raíz negativa)

f es creciente para $0 < x < 4\sqrt{2}$ y decreciente para $x > 4\sqrt{2}$

Por tanto, f tiene un máximo en $x = 4\sqrt{2}$

4. *Calcular las coordenadas de los puntos de la parábola $y^2 = 4x$, tales que sus distancias al punto A(4,0) sean mínimas.*

Cualquier punto de la curva tiene como coordenadas:

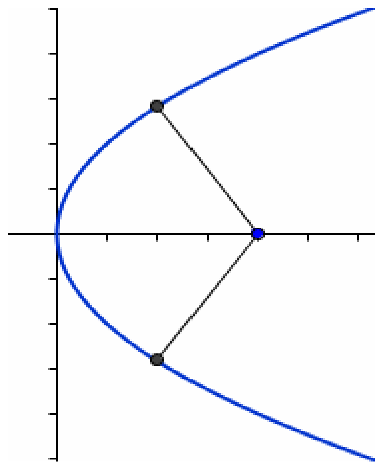
$P\left(x, 2\sqrt{x}\right)$ ó $Q\left(x, -2\sqrt{x}\right)$

La distancia de estos puntos a A viene dada por:

$D(P,A) = \sqrt{(x-4)^2 + (2\sqrt{x} - 0)^2} = \sqrt{x^2 - 8x + 16 + 4x} = \sqrt{x^2 - 4x + 16}$

$D(Q,A) = \sqrt{(x-4)^2 + (-2\sqrt{x} - 0)^2} = \sqrt{x^2 - 8x + 16 + 4x} = \sqrt{x^2 - 4x + 16}$

Definimos la función: $f(x) = \sqrt{x^2 - 4x + 16}$



$$f'(x) = \frac{2x - 4}{2\sqrt{x^2 - 4x + 16}} = \frac{x - 2}{\sqrt{x^2 - 4x + 16}}$$

$f'(x) = 0$ si $x = 2 \Rightarrow P\left(2, 2\sqrt{2}\right)$ ó $Q\left(2, -2\sqrt{2}\right)$

5. *Un granjero dispone de 60 m de valla. Con ella y, aprovechando un muro de piedra que existe en su propiedad, quiere construir un corral rectangular adosado al muro de la mayor superficie posible. Calcular las dimensiones del corral.*

Sea A el área del corral: A = x · y, siendo x el largo e y el ancho del corral.

Como se dispone de 60 m de valla: $x + 2y = 60 \Rightarrow x = 60 - 2y$

Por tanto $A = (60 - 2y) \cdot y = 60y - 2y^2$

$A' = 60 - 4y \Rightarrow A' = 0$ si $y = 15$ m $\Rightarrow x = 60 - 30 = 30$ m

$A'' = -4 < 0 \Rightarrow y = 15$ máximo.

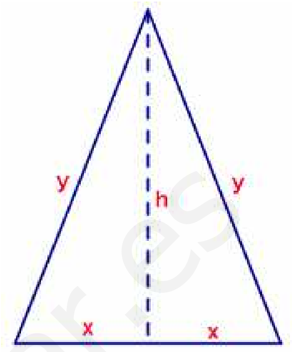
Las dimensiones de la parcela son 15 m x 30 m = 450 m^2

6. *Tomando una cuerda de longitud 100 cm. ¿Cuál es el triángulo isósceles de mayor área?*

Perímetro = 100 → 2x + 2y = 100 → y = 50 – x

Área triángulo: A = x · h

Aplicando Pitágoras:



$$x^2 + h^2 = y^2 \quad \rightarrow \quad h = \sqrt{y^2 - x^2} = \sqrt{(50-x)^2 - x^2} = \sqrt{2500 - 100x}$$

Por tanto el área es: $A = x\sqrt{2500-100x}$

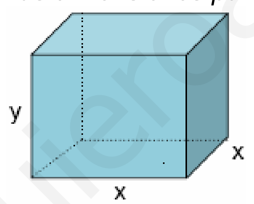
$$A' = \sqrt{2500-100x} + x\frac{\cancel{-100}\,50}{\cancel{2}\sqrt{2500-100x}} = \frac{2500-100x-50x}{\sqrt{2500-100x}} = \frac{2500-150x}{\sqrt{2500-100x}}$$

A´= 0 si 2500 – 150 x = 0 → 50 – 3x = 0 → $x = \frac{2500}{150} = \frac{50}{3}$

A´> 0 si x < $\frac{50}{3}$ y A´> 0 si x < $\frac{50}{3}$ → x = $\frac{50}{3}$ es un máximo.

Por tanto, Base: $2x = \frac{100}{3} \Rightarrow y = 50 - \frac{50}{3} = \frac{100}{3}$

7. *Se quiere construir una piscina en forma de paralelepípedo recto de base cuadrada. La superficie total que hay que recubrir es de 192 m2. Calcula las dimensiones para que su volumen sea máximo.*



La función que debemos maximizar es V = x^2 · y depende de dos variables.

Se ha de encontrar una relación entre ellas, utilizando el dato del área de la piscina:

A = x^2 + 4xy → 192 = x^2 + 4xy → y = $\frac{192-x^2}{4x}$

Sustituyendo en la expresión del volumen:

$$V = x^2 \cdot y = x^2 \cdot \left(\frac{192-x^2}{4x}\right) = \frac{192-x^3}{4} \rightarrow V(x) = \frac{192-x^3}{4}$$

Derivando e igualando a cero:

V´(x) = $\frac{192-3x^2}{4}$ → 192 – $3x^2$ = 0 → 64 = x^2 → x = 8 (descartamos la solución negativa)

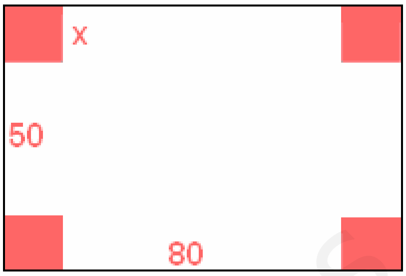
Veamos que x = 8 es un máximo empleando el criterio de la segunda derivada:

V´´(x) = $\frac{-6x}{4} = -\frac{3}{2}x$ → Para x = 8, V´´(x) = -12 < 0 → x = 8 máximo.

Si x = 8 → y = $\frac{192-8^2}{4\cdot 8} = \frac{192-64}{32} = \frac{128}{32} = 4$

La altura de la piscina debe ser de 4m y la base cuadrada debe medir 8 m.

8. *Recortando convenientemente en cada esquina de una lámina de cartón de dimensiones 80 cm x 50 cm un cuadrado de lado x y doblando convenientemente (véase figura), se construye una caja. Calcular x para que volumen de dicha caja sea máximo.*



Las dimensiones de la caja son:

Largo: $80 - 2x$, Ancho: $50 - 2x$, Alto: x

Por tanto, su volumen es:

$V = (80 - 2x)\cdot(50 - 2x)\cdot x = 4x^3 - 260x^2 + 4000x$

Derivando: $V' = 12x^2 - 520x + 4000$

Imponemos que $V' = 0 \Rightarrow 12x^2 - 520x + 4000 = 0 \rightarrow 3x^2 - 130x + 1000 = 0 \rightarrow x = \dfrac{130 \pm 70}{6} \rightarrow x = 10$

Calculamos la segunda derivada: $V'' = 24x - 520$

$V''(10) = 24 \cdot 10 - 520 < 0 \rightarrow x = 10$ es un máximo

Luego $x = 10$ cm

9. *Se desea envasar cierto producto en botes cilíndricos de un litro de capacidad, construidos con chapa metálica. Con el fin de ahorrar chapa se quiere dar al cilindro las dimensiones necesarias para que su superficie sea la menos posible. ¿Qué dimensiones son éstas?*

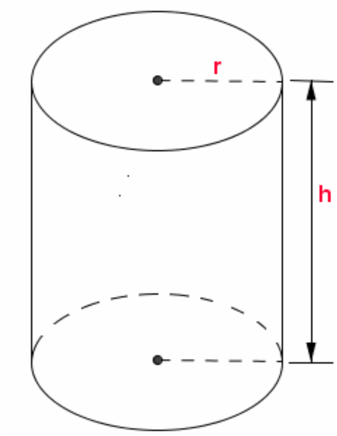
Se pretende que el área total del cilindro sea mínima.

Área del cilindro: $A = 2\pi r h + 2\pi r^2$

Como el cilindro debe tener un litro de volumen:

$$V = \pi r^2 h = 1 \Rightarrow h = \frac{1}{\pi r^2}$$

Luego, el área quedaría expresado en función del radio:



$$A(r) = 2\pi r \frac{1}{\pi r^2} + 2\pi r^2 = \frac{2}{r} + 2\pi r^2 \Rightarrow A(r) = \frac{2}{r} + 2\pi r^2$$

$$A'(r) = -\frac{2}{r^2} + 4\pi r = \frac{-2 + 4\pi r^3}{r^2}$$

Imponemos que $A'(r) = 0$:

Si $-2 + 4\pi r^3 = 0 \Rightarrow r^3 = \dfrac{2}{4\pi} = \dfrac{1}{2\pi} \Rightarrow r = \sqrt[3]{\dfrac{1}{2\pi}}$ dm

$$A'(r) = -\frac{2}{r^2} + 4\pi r \rightarrow A''(r) = \frac{4}{r^3} + 4\pi$$

$$A''\left(\sqrt[3]{\frac{1}{2\pi}}\right) = \frac{4}{\frac{1}{2\pi}} + 4\pi = 12\pi > 0 \rightarrow r = \sqrt[3]{\frac{1}{2\pi}} \text{ mínimo}$$

Si $r = \sqrt[3]{\dfrac{1}{2\pi}} \rightarrow h = \dfrac{1}{\pi r^2} = \dfrac{1}{\pi\sqrt[3]{\left(\dfrac{1}{2\pi}\right)^2}} = \dfrac{1}{\sqrt[3]{\dfrac{\pi^3}{4\pi^2}}} = \dfrac{1}{\sqrt[3]{\dfrac{\pi}{4}}} = \sqrt[3]{\dfrac{4}{\pi}}$ dm

5 REGLA DE L´ HOPITAL

Vamos a ver un método para el cálculo de límites con ayuda de la derivada.

Regla de L´Höpital

Sean f(x) y g(x) dos funciones derivables en un intervalo (a,b) y tal que g´(x) no se anula en (a,b)

a) Si $\lim_{x\to a} f(x)=0$, $\lim_{x\to a} g(x)=0$ y existe $\lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}=L$, entonces existe $\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}$ y además:

$$\lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}=\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=L$$

b) Si $\lim_{x\to a} f(x)=\pm\infty$, $\lim_{x\to a} g(x)=\pm\infty$ y existe $\lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}=L$, entonces existe $\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}$ y además:

$$\lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}=\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=L$$

Ejemplos

1) $\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{sen} x}{x}=\frac{0}{0}\Rightarrow \lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{sen} x}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{\cos x}{1}=1$

2) $\lim_{x\to\infty}\frac{e^x}{\ln x}=\frac{\infty}{\infty}\Rightarrow \lim_{x\to\infty}\frac{e^x}{\ln x}=\lim_{x\to\infty}\frac{e^x}{\frac{1}{x}}=\lim_{x\to\infty} x e^x=\infty$

3) $\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x}=\frac{0}{0}\Rightarrow \lim_{x\to 0}\frac{e^x}{1}=1$

4) $\lim_{x\to 2}\frac{x^2-4x+4}{x^2-4}=\frac{0}{0}=\lim_{x\to 2}\frac{2x-4}{2x}=0$

5) $\lim_{x\to 0}\frac{x}{\ln(1+x)}=\frac{0}{0}=\lim_{x\to 0}\frac{1}{\frac{1}{1+x}}=\lim_{x\to 0}(1+x)=1$

Se puede aplicar la regla varias veces hasta que se resuelva la indeterminación.

Ejemplos

1) $\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2}=\frac{0}{0}=\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{sen} x}{2x}=\frac{0}{0}=\lim_{x\to 0}\frac{\cos x}{2}=\frac{1}{2}$

2) $\lim_{x\to 0}\frac{x-\operatorname{sen} x}{x^3+2x^2}=\frac{0}{0}=\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{3x^2+4x}=\frac{0}{0}=\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{sen} x}{6x+4}=0$

3) $\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{\operatorname{sen} x}-\frac{1}{x}\right)=\lim_{x\to 0}\left(\frac{x-\operatorname{sen} x}{x\operatorname{sen} x}\right)=\left(\frac{0}{0}\right)=\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{\operatorname{sen} x+x\cos x}=\left(\frac{0}{0}\right)=\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{sen} x}{\cos x+\cos x-x\operatorname{sen} x}=\frac{0}{2}=0$

Observación

Si no existe $\lim\limits_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}$, no se puede afirmar nada sobre $\lim\limits_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}$

Ejemplo

Sea $f(x)=x^2\,\text{sen}\frac{1}{x}$ y $g(x)=x$

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{0}{0}$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{f'(x)}{g'(x)}=\lim_{x\to 0}\left[2x\,\text{sen}\frac{1}{x}+x^2\cos\frac{1}{x}\cdot\left(-\frac{1}{x^2}\right)\right]=\lim_{x\to 0}\left[2x\,\text{sen}\frac{1}{x}-\cos\frac{1}{x}\right]=-\lim_{x\to 0}\cos\frac{1}{x}\text{, que no existe.}$$

Sin embargo, $\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{x^2\,\text{sen}\frac{1}{x}}{x}=\lim\limits_{x\to 0}x\,\text{sen}\frac{1}{x}=0$ ya que $\left|\text{sen}\frac{1}{x}\right|\le 1$

5.1. Reducción de la indeterminación $0\cdot\infty$

Si $\lim\limits_{x\to a}f(x)=0$, $\lim\limits_{x\to a}g(x)=\infty \Rightarrow \lim\limits_{x\to a}f(x)\cdot g(x)=0\cdot\infty$

$\lim\limits_{x\to a}f(x)\cdot g(x)=\lim\limits_{x\to a}\frac{f(x)}{\frac{1}{g(x)}}=\frac{0}{0}$ (válido si g no se anula en un entorno de a)

Ejemplos

1) $\lim\limits_{x\to\infty}x\cdot\ln\left(\frac{2+x}{x}\right)=\infty\cdot 0$

Pasamos a la indeterminación $\frac{0}{0}$:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\ln\left(\frac{2+x}{x}\right)}{\frac{1}{x}}=\frac{0}{0}=\lim_{x\to\infty}\frac{\ln(2+x)-\ln x}{\frac{1}{x}}$$

Aplicando L´Höpital:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\ln(2+x)-\ln x}{\frac{1}{x}}=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{1}{x+2}-\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}}=\lim_{x\to\infty}\frac{2x^2}{x(x+2)}=2$$

2) $\lim\limits_{x\to 0}(1-\cos x)\cdot\text{ctg}\,x=0\cdot\infty$

$$\lim_{x\to 0}\frac{(1-\cos x)}{\text{tg}\,x}=\lim_{x\to 0}\frac{\text{sen}\,x}{1+\text{tg}^2\,x}=0$$

3) $\lim\limits_{x\to\infty} x\cdot \ln\left(\dfrac{1+x}{x}\right)$

$$\lim_{x\to\infty} x\cdot \ln\left(\frac{1+x}{x}\right)=\lim_{x\to\infty}\frac{\ln\left(\frac{1+x}{x}\right)}{\frac{1}{x}}=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{x}{x+1}\cdot\frac{x-1-x}{x^2}}{-\frac{1}{x^2}}=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{-x}{(x+1)x^2}}{-\frac{1}{x^2}}=\lim_{x\to\infty}\frac{x}{(x+1)}=1$$

5.2. Reducción de la indeterminación $0^0, 1^\infty, \infty^0$

Dado un límite del tipo $\lim\limits_{x\to a} f(x)^{g(x)}$, tomamos logaritmo:

$$\ln f(x)^{g(x)} = g(x)\cdot \ln f(x) \Rightarrow \lim_{x\to a} \ln f(x)^{g(x)} = \lim_{x\to a} g(x)\cdot \ln f(x)$$

Por tanto, $\lim\limits_{x\to a} f(x)^{g(x)} = e^{\lim\limits_{x\to a} g(x)\cdot \ln f(x)}$

Ejemplos

1) $\lim\limits_{x\to 0} \cos x^{\frac{1}{\operatorname{sen} x}}$

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{1}{\operatorname{sen} x}\ln\cos x=\frac{0}{0}=\lim_{x\to 0^+}\frac{\frac{-\operatorname{sen} x}{\cos x}}{\cos x}=\lim_{x\to 0^+}\frac{-\operatorname{sen} x}{\cos^2 x}=0$$

$$\lim_{x\to 0} \cos x^{\frac{1}{\operatorname{sen} x}}=e^0=1$$

2) $\lim\limits_{x\to 0} x^x$

$$\lim_{x\to 0^+} x\cdot\ln x=\lim_{x\to 0^+}\frac{\ln x}{\frac{1}{x}}=\frac{\infty}{\infty}=\lim_{x\to 0^+}\frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}}=\lim_{x\to 0^+}(-x)=0 \;\rightarrow\; \lim_{x\to 0} x^x=e^0=1$$

3) $\lim\limits_{x\to 0} x^{\operatorname{sen} x}$

$$\lim_{x\to 0} \operatorname{sen} x\cdot\ln x=\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{sen} x}{\frac{1}{\ln x}}=\lim_{x\to 0}\frac{\cos x}{-x}=-\infty \;\rightarrow\; \lim_{x\to 0} x^{\operatorname{sen} x}=e^{-\infty}=0$$

4) $\lim\limits_{x\to 2}\left(\dfrac{x}{2}\right)^{\frac{1}{x-2}}=1^\infty$

$$\lim_{x\to 2}\frac{1}{x-2}\cdot\ln\left(\frac{x}{2}\right)=\lim_{x\to 2}\frac{\ln\left(\frac{x}{2}\right)}{x-2}=\lim_{x\to 2}\frac{\frac{2}{x}\left(\frac{1}{2}\right)}{1}=\lim_{x\to 2}\frac{1}{x}=\frac{1}{2} \;\rightarrow\; \lim_{x\to 2}\left(\frac{x}{2}\right)^{\frac{1}{x-2}}=e^{\frac{1}{2}}$$

EJERCICIOS

1.- Crecimiento y decrecimiento de una función

1.1. Estudiar los intervalos de crecimiento y decrecimiento de las siguientes funciones:

a) $f(x) = x^2 - 6x + 9$ b) $f(x) = x\,(x^2 + 3x - 9)$ c) $f(x)=\frac{x^3}{3}-\frac{5}{2}x^2+6x-5$

d) $f(x)=\frac{4}{x-1}$ e) $f(x)=\frac{2x}{x^2+1}$ f) $f(x)=\frac{x+1}{x-1}$

g) $f(x) = e^x$ h) $f(x) = f(x) = \ln(x + 1)$ i) $f(x) = x \cdot e^x$

Solución: a) $f\uparrow(3,+\infty)$; b) $f\uparrow(-\infty,-3)\cup(1,+\infty)$; c) $f\uparrow(-\infty,2)\cup(3,+\infty)$; d) $f\downarrow\forall x\in\mathbb{R}-\{1\}$; e) $f\uparrow(-1,1)$; f) $f\downarrow\forall x\in\mathbb{R}-\{1\}$; g) $f\uparrow\forall x\in\mathbb{R}$; h) $f\uparrow(-1,+\infty)$; i) $f\uparrow(-1,+\infty)$

1.2. Estudiar los intervalos de crecimiento y decrecimiento de las siguientes funciones en el intervalo $[0,2\pi]$:

a) $f(x) = \cos x$ b) $f(x) = \operatorname{sen} x$ c) $f(x) = \operatorname{sen} x - x$

Solución: a) $f\uparrow(\pi,2\pi)$; b) $f\uparrow\left(0,\frac{\pi}{2}\right)\cup\left(\frac{3\pi}{2},2\pi\right)$; c) $f\downarrow\forall x\in\mathbb{R}$;

1.3. Estudiar el crecimiento y decrecimiento de la función $f(x) = a^x$, según los valores de a

Solución: a) $f\uparrow$ si $a>0$

1.4. Estudiar el crecimiento y decrecimiento de las siguientes funciones, según los valores de a:

a) $f(x) = \log_a x$ b) $f(x) = x^a$

1.5. Estudiar los intervalos de crecimiento y decrecimiento de la función $f(x) = \operatorname{sen} x - \cos x$ en el intervalo $[0,2\pi]$.

Solución: $f\uparrow\left(0,\frac{3\pi}{4}\right)\cup\left(\frac{7\pi}{4},2\pi\right)$

1.6. Estudiar el crecimiento y decrecimiento de la función lineal $y = a\,x + b$, siendo $a,b\in\mathbb{R}$.

1.7. Las funciones f y g son funciones estrictamente creciente en su dominio común.

a) ¿Qué puede decirse de la monotonía de f + g?
b) Si k es un nº real no nulo, ¿qué puede decirse de f(x) + k? ¿Y de $k \cdot g(x)$?

1.8. Razona cuáles de las siguientes situaciones la función f(x) tendrá algún extremo relativo

a) Dom (f) = $\mathbb{R}$ y f es estrictamente creciente.
b) Dom (f) = (a, b] y f es estrictamente creciente.
c) Dom (f) = $\mathbb{R}$ y f es creciente para x < a y decreciente para x > a.
d) Dom (f) = $\mathbb{R}-\{a\}$ y f es creciente para x < a y decreciente para x > a.

2.- Extremos relativos de una función

2.1. Determinar los extremos relativos de las siguientes funciones:

a) $f(x) = x^3 + x^2 + 1$ b) $f(x) = x^4 - 2x^2$

c) $f(x) = \dfrac{x^2}{x-1}$ d) $f(x) = \dfrac{1}{x^2-1}$

e) $f(x) = \dfrac{x^2}{x^2-9}$ f) $f(x) = \dfrac{1-2x^2}{(x+2)^2}$

g) $f(x) = e^x$ h) $f(x) = \ln x$

i) $f(x) = \ln(x^2+1)$ j) $f(x) = \sqrt[3]{x^2+2x+3}$

Solución: a) $x = -\frac{2}{3}$ M ; $x = 0$ m ; b) $x = 0$ M ; $x = \pm 1$ m ; c) $x = 0$ M ; $x = 2$ m ; d) $x = 0$ M ; e) $x = 0$ M ; f) $x = -\frac{1}{4}$ M; i) $x = 0$ m ; j) $x = -1$ m

2.2. Determinar los extremos relativos de las siguientes funciones trigonométricas en el intervalo $[0, 2\pi]$:

a) $f(x) = \operatorname{sen} x$ b) $f(x) = \cos x$ c) $f(x) = \operatorname{tg} x$

d) $f(x) = \operatorname{ctg} x$ e) $f(x) = \dfrac{x}{2} - \operatorname{arctg} x$ f) $f(x) = 2x + \cos x$

Solución: a) $x = \frac{\pi}{2}$ M ; $x = \frac{3\pi}{2}$ m ; b) $x = 0$ M ; $x = \pi$ m ; e) $x = -1$ M ; $x = 1$ m

2.3. a) Representar gráficamente las siguientes funciones y estudiar su crecimiento:

1) $f(x) = x^2 - 5x + 6$ 2) $f(x) = -x^2 + 6x - 10$

3) $f(x) = | x + 1 |$ 4) $f(x) = | 2x - 3 |$

5) $f(x) = | x^2 - 1 |$ 6) $f(x) = | 4 - x^2 |$

7) $f(x) = \begin{cases} -x+3 & \text{si} \quad x < -2 \\ x+6 & \text{si} \quad x \geq -2 \end{cases}$ 8) $f(x) = \begin{cases} x-1 & \text{si} \quad x < 0 \\ x^2-1 & \text{si} \quad x \geq 0 \end{cases}$

9) $f(x) = \begin{cases} 3-x & \text{si} \quad x < 2 \\ x-1 & \text{si} \quad 2 \leq x \leq 4 \\ x+2 & \text{si} \quad x > 4 \end{cases}$ 10) $f(x) = \begin{cases} 3+x & \text{si} \quad x < -1 \\ 1-x & \text{si} \quad -1 \leq x \leq 1 \\ x^2-1 & \text{si} \quad x > 1 \end{cases}$

b) Indicar si alcanza algún máximo o mínimo.

2.4. Si una función tiene un máximo relativo y un mínimo relativo, ¿puede ser el valor del mínimo mayor que el valor del máximo? Razona tu respuesta.

2.5. Sea f una función continua y derivable en todo $\mathbb{R}$. Si f tiene dos máximos relativos, demuestra que existe un mínimo ente dichos valores.

2.6. Hallar el valor que debe tomar c en la función $f(x) = x^2 - cx + 2$ para que presente un mínimo en $x = -3$.
Solución: $c = -6$

2.7. Determinar p y q para que la función $f(x) = x^2 + px + q$ tenga un mínimo en $x = -3$ y $f(-2) = 1$.
Solución: $p = 6$, $q = 9$

2.8. Dada la función f(x) = $x \cdot e^{kx}$ determinar k sabiendo que dicha función tiene un máximo en x = 1.

Solución: k = -1

2.9. Sea la función parabólica $y = f(x) = ax^2 + bx + c$

a) Encontrar los puntos críticos.

b) ¿Qué condición debe cumplir a para que f tenga un máximo? ¿Y un mínimo?

2.10. La función $f(x) = ax^2 + bx + 6$ pasa por el punto (1,0) y tiene un mínimo en el punto de abscisa x = 2. Calcular a y b.

Solución: a = 2, b = -8

2.11. Dada la función $f(x) = \dfrac{m^2x}{2x^2 - 5mx + 2m^2}$. Hallar m para que e punto x = 2 tenga un máximo.

Solución: m = ± 2

2.12. La función $f(x) = \dfrac{ax^2 + 1}{a + x}$ tiene un extremo relativo en x = 1. Calcular el valor de a y razonar si el extremo es un máximo o un mínimo. Para dicho valor de a, determinar el otro extremo.

Solución: $a = \dfrac{1}{2}$; x = -1

3. Problemas de optimización

3.1. Siendo la suma de los catetos de un triángulo rectángulo 12 cm, calcular la longitud de los que corresponden al de área máxima.

Solución: catetos: 6 cm

3.2. Dos números suman 40. ¿Cuál es el mínimo valor que puede tomar la suma del cubo del primero más el triple del cuadrado del segundo? ¿Cuáles son los dos números?

Solución: Los números son 8 y 32.

3.3. Entre los rectángulos de 40 cm de perímetro calcular el que tiene la diagonal más corta.

Solución: cuadrado de lado 10 cm

3.4. En una feria se quiere montar una barra rectangular con un perímetro de 20 m. Hallar las dimensiones de dicho rectángulo para que el cilindro engendrado tenga volumen máximo.

Solución: Las dimensiones son $\dfrac{20}{3} x \dfrac{10}{3}$

.

3.5. Un jardinero desea construir un parterre con forma de sector circular, Si dispone de 20 m de alambre para rodearlo, ¿qué radio debe tener el sector para que el parterre tenga la máxima superficie?

Solución: r = 5 m

3.6. Un alambre de longitud d, se divide en dos partes x e y. Con cada una de ellas, se construye un cuadrado. ¿Para qué valores de x e y será mínima la suma de las áreas de los 2 cuadrados?

Solución: $x = y = \dfrac{d}{2}$

3.7. Los barriles que se utilizan para almacenar petróleo tienen formas cilíndricas y una capacidad de 128π litros. Hallar las dimensiones del cilindro para que la chapa empleada en su construcción sea mínima.

(**NOTA**: Volumen: $\pi \cdot r^2 \cdot h$ Superficie: $2\pi \cdot r \cdot h + 2\pi \cdot r^2$)

Solución: El radio mide 4 cm y la altura es 8 m

3.8. La hipotenusa de un triángulo rectángulo mide 90 cm. Si gira alrededor de uno de sus catetos, ¿qué medida han de tener estos para que el volumen del cono engendrado sea máximo?

(NOTA: $V = \frac{1}{3}\pi \cdot r^2 \cdot h$)

Solución: Altura: $30\sqrt{6}$; radio: $30\sqrt{3}$

3.9. Hallar el radio del cilindro de máximo volumen inscrito en un cono de radio 6 cm y altura 9 cm.

Solución: El radio es 4 cm y la altura 3 cm.

3.10. Una hoja de papel debe contener 18 cm^2 de texto impreso, los márgenes superior e inferior han de tener 2 cm cada uno, y los laterales 1 cm. ¿Con qué dimensiones de la hoja es mínimo el gasto del papel?

Solución: 5 cm x 10 cm

3.11. De todos los triángulos rectángulos de 8 cm de hipotenusa, ¿cuál es el que tiene mayor área y cuánto mide?

Solución: Catetos: $4\sqrt{2}$ cm

3.12. Hallar el punto de la parábola $y = x^2 - 1$ que está más cerca del punto A(0,-3)

Solución: (0,-1)

3.13. Un granjero desea vallar un terreno rectangular de pasto adyacente a un río. El pastizal debe tener 180.000 m^2. ¿Qué dimensiones tendrá el terreno rectangular para utilizar la mínima cantidad de valla, si el lado del río no necesita ser vallado?

Solución: 300 m x 600 m

3.14. Con una cuerda de 90 m de longitud se desea cercar dos jardines; uno cuadrado y otro circular, Hallar qué longitud se debe dar a cada trozo para que la suma de las superficies sea mínima.

(L = longitud de una circunferencia: $2\pi \cdot r$)

Solución: lado del cuadrado $\frac{90}{\pi + 4}$ y radio del círculo: $\frac{45}{\pi + 4}$

3.15. Un rectángulo de perímetro 10 m gira alrededor de uno de sus lados. Hallar las dimensiones para el cilindro engendrado tenga volumen máximo (Nota: $V = \pi \cdot r^3 \cdot h$)

Solución: radio $\frac{10}{3}$ m ; altura $\frac{5}{3}$ m

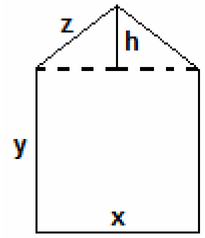
3.16. De todos los prismas rectos de base cuadrada y de 24 cm^2 de área total, ¿cuál es el que tiene mayor volumen?

Solución: cubo de 2 cm de arista

3.17. Se quiere vallar un campo rectangular que está junto a un camino. Si la valla del lado del camino cuesta 40 €/m y la de los otros 20€/m, hallar las dimensiones del campo de mayor área del campo que puede cercarse con 19.200€

Solución: 240 x 160

3.18. Una ventana está formada por un rectángulo, cuyo lado superior se ha sustituido por un triángulo isósceles cuya altura, h, vale tres octavos de su base. Sabiendo que el perímetro de la ventana es 90 cm, determinar las dimensiones para que el área sea máxima.



Solución: x = 24 ; z = 15 ; y = 18

3.19. La suma de todas las aristas de un prisma recto de base cuadrada es 48 cm. Calcular las dimensiones del prisma para que el volumen sea máximo.

Solución: 4 x 4

3.20. Se quiere limitar una parcela de 24 m^2 por una valla rectangular y además dividirla en dos partes iguales por medio de otra valla paralela a uno de los lados. ¿Qué dimensiones deben elegirse para que la cantidad de valla sea mínima?

Solución: 4 x 6

3.21. Hallar las coordenadas de los puntos de la curva $y^2 = 9x$ tal que su distancia al punto A(9,0) sea mínima.

Solución: $\left(\frac{9}{2},\frac{9\sqrt{2}}{2}\right);\left(\frac{9}{2},-\frac{9\sqrt{2}}{2}\right)$

3.22. En un cuadrado de lado 10 cm queremos apoyar la base de un cilindro cuya área lateral es 50 cm^2. ¿Cuál debe ser el radio del cilindro para que su volumen sea el mayor posible?

Solución: r = 5 cm

3.23. Determina las dimensiones que debe tener un recipiente cilíndrico de volumen igual a 6,28 litros para que pueda construirse con la menor cantidad posible de hojalata.

Solución: r = 1 dm

3.24. Con una lámina cuadrada de 10 dm de lado se quiere construir una caja sin tapa. Para ello, se recortan unos cuadrados de los vértices. Calcula el lado del cuadrado recortado para que el volumen de la caja sea máximo.

Solución: El lado del cuadrado es $\frac{5}{3}$ dm

4. Intervalos de curvatura. Puntos de inflexión

4.1.. Dada la función $f(x) = x^3 - 9x^2 + 24x - 18$, calcular los máximos, mínimos y puntos de inflexión, comprobando que están alineados.

<u>Solución</u>: (4,-2) mínimo ; (2,2) máximo y (3,0) inflexión.

4.2. Hallar los máximos, mínimos y puntos de inflexión de la función:

$$f(x) = x^4 (1 - x)^3$$

<u>Solución</u>: $x = 0$ mínimo ; $x = \frac{4}{7}$ máximo y $x = 1$ inflexión.

4.3. Estudiar los intervalos de convexidad y concavidad, así como los puntos de inflexión de las siguientes funciones:

a) $f(x) = x^4 - 6x^2 + 9$

b) $f(x) = x^3 - 2x^2 + 4$

c) $f(x) = 5x^2$

d) $f(x) = x^2 + 4$

e) $f(x) = \frac{2}{x}$

f) $f(x) = x^3 - 3x$

g) $f(x) = \frac{x^3}{3} - \frac{11}{2}x^2 + 18x - 6$

h) $f(x) = x^4 - 6x^3 + 12x^2 - 5x + 1$

<u>Solución</u>: a) f $\cup$ $(-\infty,-1)\cup(1,+\infty)$, b) f $\cup$ $\left(\frac{2}{3},+\infty\right)$, c) f $\cup$ $\forall x \in \mathbb{R}$, d) f $\cup$ $\forall x \in \mathbb{R}$, e) f $\cup$ $(0,+\infty)$,

f) f $\cup$ $\left(\frac{11}{2},+\infty\right)$, g) f $\cup$ $(-\infty,1)\cup(2,+\infty)$

4.4. Hallar a, b , c y d en $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ para que tenga un punto crítico en (1,4) y un punto de inflexión con tangente de ecuación $y = 3x + 2$ en el origen.

<u>Solución</u>: a =-1, b = 0, c = 3, d = 2

4.5. La función $f(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$ tiene un punto de derivada nula en el punto (1,1) que no es un extremo relativo. Razónese el valor de a, b y c.

<u>Solución</u>: a =-3, b = 3, c = 0

4.6. Dada la función $f(x) = \cos\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$ determinar los intervalos de concavidad y convexidad, así como los puntos de inflexión en el intervalo $[0, 2\pi]$

<u>Solución</u>: f $\cup$ $(0, \pi)$

4.7. Se considera la función $f(x) = \frac{x^2 + a^2}{x + b}$. Determinar a y b para que se verifique:

a) Tiene un extremo relativo en x = 3.

b) Es convexa en $(1,+\infty)$ y cóncava en $(-\infty,1)$.

<u>Solución</u>: b = -1 , $a = \pm\sqrt{3}$

4.8. Sea $f(x)=x^3 + ax^2 + bx + 7$. Hallar **a** y **b** de manera que la curva *y=f(x)* tenga para x=1 una inflexión con tangente horizontal.

<u>Solución</u>*: a = -3, b = 3*

5. Regla de L´Hôpital

5.1. Calcular los siguientes límites, aplicando la regla de L´Hopital en caso necesario:

1) $\lim\limits_{x\to1}\frac{x^5-1}{x^3-1}=\frac{5}{3}$

2) $\lim\limits_{x\to0}\frac{x\ln(x+1)}{1-\cos x}=2$

3) $\lim\limits_{x\to2}\frac{x^3-3x-2}{x^2-4}=\frac{9}{4}$

4) $\lim\limits_{x\to0}\frac{(2-x)e^x-x-2}{x^2}=0$

5) $\lim\limits_{x\to0}\frac{(1-\cos x)\,\mathrm{sen}x}{x^2}=0$

6) $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x^2+x+1}{x^2-x}=1$

7) $\lim\limits_{x\to0}\frac{x\cos x-\mathrm{sen}x}{x^3}=-\frac{1}{3}$

8) $\lim\limits_{x\to2}\frac{(x-2)(x+1)}{2x^2-2x-4}=\frac{1}{2}$

9) $\lim\limits_{x\to0}\frac{x-\mathrm{sen}x}{\cos x-1}=0$

10) $\lim\limits_{x\to0}\frac{\mathrm{sen}x}{x}=1$

11) $\lim\limits_{x\to0}\frac{e^x-1}{x}=1$

12) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{\mathrm{tg}\,x-5}{\sec x+4}=1$

13) $\lim\limits_{x\to0}\frac{e^{-\frac{1}{x}}}{x}=\begin{cases}0 & x\to0^+\\ \infty & x\to0^-\end{cases}$

14) $\lim\limits_{x\to\infty}x\left(5^{\frac{1}{x}}-1\right)=\ln 5$

15) $\lim\limits_{x\to0}\frac{e^x-e^{-x}-2x}{x-\mathrm{sen}\,x}=\frac{1}{4}$

16) $\lim\limits_{x\to0}\frac{x\cdot\mathrm{arcsen}x}{\mathrm{sen}x\cdot\cos x}=0$

17) $\lim\limits_{x\to0}\left(\frac{1}{x^2}-\frac{1}{x}\right)=\infty$

18) $\lim\limits_{x\to0}x^{\frac{1}{\ln x}}=e$

19) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{3}{x}\right)^{2x}=e^6$

20) $\lim\limits_{x\to\infty}x^{\frac{1}{x}}=1$

21) $\lim\limits_{x\to0}(\mathrm{sen}x+\cos x)^{\frac{1}{x}}=e$

22) $\lim\limits_{x\to\infty}x\cdot\ln\left(\frac{1+x}{x}\right)=1$

23) $\lim\limits_{x\to3}\frac{x^3-3x^2+9x-27}{x^2-9}=3$

24) $\lim\limits_{x\to0}\frac{e^{\mathrm{sen}x}-x-1}{2x^2-x^3}=\frac{1}{4}$

25) $\lim\limits_{x\to0}\left(\cot gx-\frac{1}{x}\right)=0$

26) $\lim\limits_{x\to0}\left(\frac{e}{e^x-1}-\frac{1}{x}\right)=\pm\infty$

27) $\lim\limits_{x\to0}x^{\mathrm{sen}x}=1$

28) $\lim\limits_{x\to1}\left(\frac{1}{1-x}-\frac{3}{1-x^3}\right)=-1$

29) $\lim\limits_{x\to0}\frac{x(e^x-1)}{\cos x-\mathrm{sen}x+x-1}=-2$

30) $\lim\limits_{x\to0}(\cos 2x)^{\frac{3}{x^2}}=e^{-6}$

31) $\lim\limits_{x\to0}\frac{e^x-x-1}{x^2}=\frac{1}{2}$

32) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{2x+3}{2x-1}\right)^x=e^2$

33) $\lim\limits_{x\to0^+}x\ln x=0$

34) $\lim\limits_{x\to1}\frac{1-\cos(x-1)}{(\ln x)^2}=\frac{1}{2}$

35) $\lim\limits_{x\to0}\frac{1+\mathrm{sen}\,x-e^x}{(\mathrm{arctg}\,x)^2}=-\frac{1}{2}$

36) $\lim\limits_{x\to0}\frac{\cos^2x-1}{x^2}=-1$

37) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+5\mathrm{tg}\frac{8}{x}\right)^x=e^{40}$

38) $\lim\limits_{x\to1}\left(\frac{x}{\ln x}-\frac{1}{\mathrm{sen}(x-1)}\right)=\frac{3}{2}$

39) $\lim\limits_{x\to0^+}(2x)^{\frac{1}{x}}=0$

40) $\lim\limits_{x\to0^+}(\cot gx)^x=1$

41) $\lim\limits_{x\to0}\left(\sqrt{\frac{1+x}{1-2x}}\right)^{\frac{1}{\mathrm{sen}\,x}}=e^{\frac{3}{2}}$

42) $\lim\limits_{x\to1}(1+\mathrm{tg}\,\pi x)^{\sec\frac{\pi x}{2}}=e^2$

43) $\lim\limits_{x\to0}\frac{\ln x}{\mathrm{ctg}\,x}=0$

44) $\lim\limits_{x\to0}(1+\mathrm{sen}x)^{1/x}=e$

45) $\lim\limits_{x\to a}\frac{\sqrt{x}-\sqrt{a}+\sqrt{x-a}}{\sqrt{x^2-a^2}}=\frac{\sqrt{2a}}{2}$

5.2. Determinar el valor de a para que se verifique:

1) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2+ax+1}-x\right)=2$

2) $\lim\limits_{x\to0}\frac{x\cdot L(1+x)}{1-\cos ax}=8$

3) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left[(x^2+1)^a-x\right]=\text{finito}$

Solución: 1) a = 4 2) $a=\pm\frac{1}{2}$, *3) a =* $\frac{1}{2}$