

Examen de Matemáticas 2º Bachillerato (CS)
Marzo 2007

Problema 1 El beneficio en euros por kg de un alimento perecedero se estima que viene dado por la función $B(x) = 4x - 2x^2 - 0,68$, donde x es el precio en euros de cada kg de alimento. Se pide:

1. ¿Entre qué precios por kg se obtienen beneficios?
2. ¿A qué precio se obtiene el máximo beneficio?
3. Si en un comercio se tienen 1000 kg de ese alimento ¿qué beneficio máximo puede obtener?

(Castilla La Mancha Junio-2006)

Solución:

1. $B(x) = 4x - 2x^2 - 0,68 = 0 \implies x = 0,1875$ y $x = 1,8125$, lo que quiere decir que, los beneficios se encuentran entre los precios de $0,1875$ Euros/kg y $1,8125$ Euros/kg

2.

$$B'(x) = -4x + 4 = 0 \implies x = 1$$

	$(-\infty; 1)$	$(1; \infty)$
$B'(x)$	+	-
$B(x)$	Creciente	Decreciente

Luego en el punto de abscisa $x = 1$ hay un Máximo. El beneficio máximo será:

$$B(1) = 1,32 \implies 1,32 \text{ Euros/kg}$$

3. Si se tienen 1000 kg el beneficio máximo será: $1000 \cdot 1,32 = 1320$ Euros.

Problema 2 Calcular el área comprendida entre la curva $f(x) = x^3 - 3x^2$ y el eje OX y las rectas $x = 0$ y $x = 4$.

Solución:

$$x^3 - 3x^2 = 0 \implies x = 0 \text{ y } x = 3$$

Los recintos de integración serán entre 0 y 3, y entre 3 y 4.

$$F(x) = \int (x^3 - 3x^2) dx = \frac{x^4}{4} - x^3 \implies \begin{cases} F(4) = 0 \\ F(0) = 0 \\ F(3) = -\frac{27}{4} \end{cases} \implies$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \int_0^3 (x^3 - 3x^2) dx = F(3) - F(0) = -\frac{27}{4} \\ \int_3^4 ((x^3 - 3x^2) dx = F(4) - F(3) = \frac{27}{4} \end{array} \right. \implies \text{Área} = \left| -\frac{27}{4} \right| + \left| \frac{27}{4} \right| = \frac{27}{2} u^2$$

Problema 3 Dadas la curva: $y = \frac{x+1}{x-1}$, calcule:

1. Dominio de definición.
2. Corte con los ejes.
3. Recintos de existencia.
4. Simetría.
5. Asíntotas.
6. Intervalos de crecimiento y decrecimiento.
7. Extremos.
8. Concavidad y puntos de inflexión
9. Representación aproximada.

Solución:

1. Dominio de definición: $Dom f = R - \{1\}$.
2. Corte con los ejes: $(0, -1)$ y $(-1, 0)$
3. Recintos de existencia:

$$\frac{x+1}{x-1} > 0, \quad x = -1 \text{ y } x = 1$$

	$(-\infty; -1)$	$(-1, 1)$	$(1; \infty)$
$f(x)$	+	-	+

4. Simetría: $f(-x) \neq \pm f(x) \implies$ la función ni es PAR ni es IMPAR.
5. Asíntotas:

- Verticales:

$$x = 1 \implies \left\{ \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{x+1}{x-1} = -\infty \\ \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x+1}{x-1} = +\infty \end{array} \right.$$

- Horizontales:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x+1}{x-1} = 1 \implies y = 1$$

- Oblicuas: No hay por haber horizontales.

6. Intervalos de crecimiento y decrecimiento:

$$f'(x) = \frac{-2}{(x-1)^2} < 0 \text{ Siempre} \implies \text{Decreciente en } (-\infty, +\infty) = \mathbb{R}$$

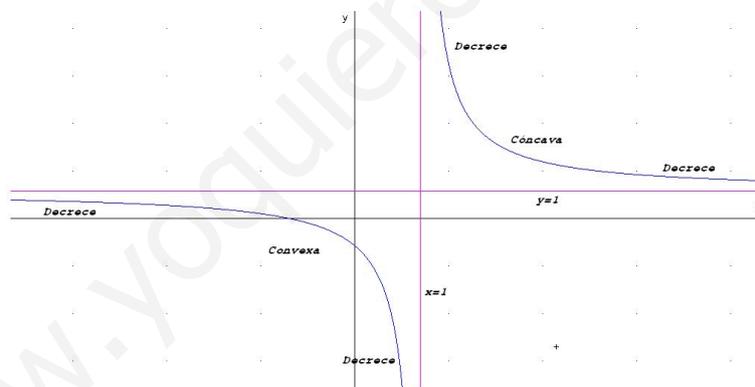
7. Extremos: Luego no hay ni Máximos ni Mínimos.

8. Concavidad y puntos de inflexión:

$$f''(x) = \frac{4}{(x-1)^3} \neq 0 \implies \text{No hay puntos de Inflexión}$$

	$(-\infty; 1)$	$(1; \infty)$
$f''(x)$	-	+
$f(x)$	Convexa	Cóncava

9. Representación aproximada: Ver figura



Problema 4 Estudie la continuidad y la derivabilidad de la función

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x}{2x-1} & \text{si } x \leq 0 \\ x^2 + x & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

en el punto $x = 0$.

Solución:

Continuidad en $x = 1$:

$$\begin{cases} \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{2x-1} = 0 \\ \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} x^2 + x = 0 \\ f(0) = 0 \end{cases}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = f(0) = 0 \implies f(x) \text{ es continua en } x = 0$$

Derivabilidad en $x = 1$:

$$f'(x) = \begin{cases} \frac{-1}{(2x-1)^2} & \text{si } x < 0 \\ 2x+1 & \text{si } x \geq 0 \end{cases} \implies \begin{cases} f'(0^-) = -1 \\ f'(0^+) = 1 \end{cases} \implies a - b = 2$$

Como $f'(0^-) \neq f'(0^+) \implies f(x)$ no es derivable en $x = 0$.