Examen de Matemáticas 2ºBachillerato(CS)

Marzo 2007

Problema 1 Se estima que los beneficios mensuales de una fábrica de golosinas, en miles de euros, vienen dados por la función $f(x) = -0,1x^2 + 2,5x - 10$, cuando se venden x tonelas de producto. Se pide:

1. Calcular la cantidad de toneladas que deben venderse para obtener el máximo beneficio y calcular éste. Justificar que es máximo.
2. La cantidad mínima que se ha de vender para no tener pérdidas.
3. ¿Qué cantidad produce el máximo beneficio por tonelada vendida?, calcular este máximo beficio y justificar que es máximo.

   (La función de este beneficio por tonelada viene dada por la función $F(x) = \frac{f(x)}{x}$)

Solución:

1. $$f'(x) = -0,2x + 2,5 = 0 \Longrightarrow x = 12,5$$

	$(-\infty; 12,5)$	$(12,5; \infty)$
$f'(x)$	$+$	$-$
$f(x)$	Creciente	Decreciente

   Luego en el punto de abcisa $x = 12,5$ hay un Máximo. El beneficio máximo será:
   $$f(12,5) = 5,625 \Longrightarrow 5625\,\text{euros}$$

2. $f(x) = 0 \Longrightarrow x^2 - 25x + 100 = 0 \Longrightarrow x = 5$ y $x = 20$, luego no tiene pérdidas en el intervalo $[5, 20]$.

3. $$F(x) = -0,1x + 2,5 - \frac{10}{x} \Longrightarrow F'(x) = -0,1 + \frac{10}{x^2} = 0 \Longrightarrow x = \pm 10$$

	$(-\infty; -10)$	$(-10, 10)$	$(10; \infty)$
$F'(x)$	$-$	$+$	$-$
$F(x)$	Decreciente	Creciente	Decreciente

   Luego en el punto de abcisa $x = 10$ hay un Máximo.

Problema 2 Calcular el área comprendida entre la curva $f(x) = x^3 - 4x$ y el eje X y las rectas $x = -1$ y $x = 1$.

Solución:

$$x^3 - 4x = 0 \Longrightarrow x = -2, \;\; x = 0 \;\text{ y }\; x = 1$$

Los recintos de integración serán entre -1 y 0, y entre 0 y 1.

$$F(x) = \int (x^3 - 4x)\, dx = \frac{x^4}{4} - 2x^2 \Longrightarrow \left\{ \begin{array}{l} F(-1) = -\frac{7}{4} \\ F(0) = 0 \\ F(1) = -\frac{7}{4} \end{array} \right. \Longrightarrow$$

$$\left\{ \begin{array}{l} F(0) - F(-1) = \frac{7}{4} \\ F(1) - F(0) = -\frac{7}{4} \end{array} \right. \Longrightarrow Área = \left|\frac{7}{4}\right| + \left|-\frac{7}{4}\right| = \frac{7}{2}$$

Problema 3 Dadas la curva: $y = \dfrac{x^2}{x^2 - 1}$, calcule:

1. Dominio de definición.
2. Corte con los ejes.
3. Recintos de existencia.
4. Simetría.
5. Asíntotas.
6. Intervalos de crecimiento y decrecimiento.
7. Extremos.
8. Concavidad y puntos de inflexión
9. Representación aproximada.

Solución:

1. Dominio de definición: $Dom\, f = R - \{-1, 1\}$.
2. Corte con los ejes: $(0, 0)$
3. Recintos de existencia:

$$\frac{x^2}{x^2 - 1} > 0, \quad x = -1 \;\text{ y }\; x = 1$$

	$(-\infty; -1)$	$(-1, 1)$	$(1; \infty)$
$f(x)$	$+$	$-$	$+$

4. Simetría: $f(-x) = f(x) \Longrightarrow$ la función es PAR
5. Asíntotas:
   - Verticales:

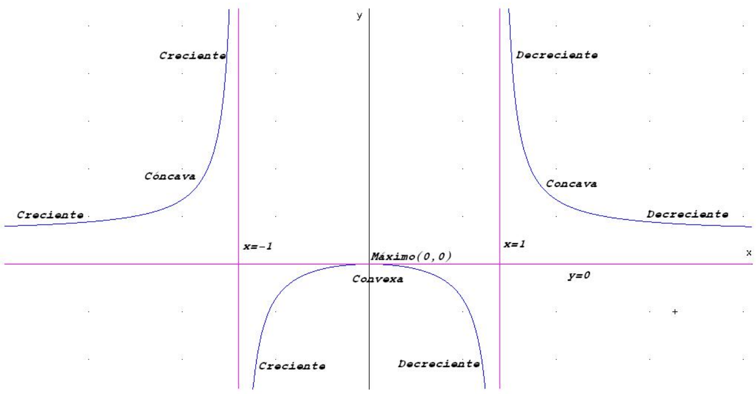
$$x = -1 \Longrightarrow \begin{cases} \lim\limits_{x \longrightarrow -1^-} \dfrac{x^2}{x^2 - 1} = +\infty \\ \lim\limits_{x \longrightarrow -1^+} \dfrac{x^2}{x^2 - 1} = -\infty \end{cases}$$

$$x = 1 \Longrightarrow \begin{cases} \lim\limits_{x \longrightarrow 1^-} \dfrac{x^2}{x^2 - 1} = -\infty \\ \lim\limits_{x \longrightarrow 1^+} \dfrac{x^2}{x^2 - 1} = +\infty \end{cases}$$

   - Horizontales:

$$\lim_{x \longrightarrow \infty} \frac{x^2}{x^2 - 1} = 1 \Longrightarrow y = 1$$

   - Oblicuas: No hay por haber horizontales.



6. Intervalos de crecimiento y decrecimiento:

$$f'(x) = \frac{-2x}{(x^2 - 1)^2} = 0 \Longrightarrow x = 0$$

	$(-\infty; 0)$	$(0; \infty)$
$f'(x)$	$+$	$-$
$f(x)$	Creciente	Decreciente

7. Extremos: Luego en el punto $(0, 0)$ hay un Máximo.
8. Concavidad y puntos de inflexión:

$$f''(x) = \frac{2x^2 + 2}{(x^2 - 1)^3} \neq 0 \Longrightarrow \text{No hay puntos de Inflexión}$$

	$(-\infty;-1)$	$(-1,1)$	$(1;\infty)$
$f''(x)$	$+$	$-$	$+$
$f(x)$	Cóncava	Convexa	Cóncava

9. Representación aproximada: Ver figura

Problema 4 Dada la función

$$f(x) = \begin{cases} ax^2 - bx - 1 & \text{si} \quad x < 1 \\ x^2 + ax + b & \text{si} \quad x \geq 1 \end{cases}$$

calcular a y b de manera que f sea continua y derivable.

Solución:

Para que la función sea continua en $x = 1$:

$$\begin{cases} \lim\limits_{x \longrightarrow 1^-} f(x) = \lim\limits_{x \longrightarrow 1} (ax^2 - bx - 1) = a - b - 1 \\ \lim\limits_{x \longrightarrow 1^+} f(x) = \lim\limits_{x \longrightarrow 1} (x^2 + ax + b) = a + b + 1 \end{cases} \quad a-b-1 = a+b+1 \Longrightarrow b = -1$$

Para que la función sea derivable en $x = 1$:

$$f'(x) = \begin{cases} 2ax - b & \text{si} \quad x < 1 \\ 2x + a & \text{si} \quad x \geq 1 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} f'(1^-) = 2a - b \\ f'(1^+) = 2 + a \end{cases} \Longrightarrow a - b = 2$$

Luego $b = -1$ y $a = 1$.