

Examen de Matemáticas 2º Bachillerato (CS)

Marzo 2014

Problema 1 Dada la función

$$f(x) = \frac{x^2 - 9}{x + 1}$$

Se pide:

- Calcular su dominio.
- Calcular sus puntos de corte con los ejes coordenados.
- Calcular su signo.
- Calcular su simetría.
- Calcular sus asíntotas.
- Calcular sus intervalos de crecimiento y decrecimiento, calculando sus extremos relativos.
- Calcular sus intervalos de concavidad y convexidad, calculando sus puntos de inflexión.
- Representación gráfica.
- Calcular las rectas tangente y normal a f en el punto de abscisa $x = 1$.

Solución:

- Dominio de f : $\text{Dom}(f) = \mathbb{R} - \{-1\}$
- Puntos de Corte
 - Corte con el eje OX hacemos $f(x) = 0 \implies x^2 - 9 = 0 \implies x = \pm 3$.
 - Corte con el eje OY hacemos $x = 0 \implies f(0) = -9 \implies (0, -9)$.
-

	$(-\infty, -3)$	$(-3, -1)$	$(-1, 3)$	$(3, +\infty)$
signo	-	+	-	+

- $f(-x) \neq \pm f(x) \implies$ la función no tiene simetrías.
- Asíntotas:

- **Verticales:** $x = -1$

$$\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^2 - 9}{x + 1} = \pm\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -1^-} \frac{x^2 - 9}{x + 1} = \left[\frac{-8}{0^-} \right] = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -1^+} \frac{x^2 - 9}{x + 1} = \left[\frac{-8}{0^+} \right] = -\infty$$

- **Horizontales:** No hay

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 - 9}{x + 1} = \infty$$

- **Oblicuas:** $y = mx + n$

$$m = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 - 9}{x^2 + x} = 1$$

$$n = \lim_{x \rightarrow \infty} (f(x) - mx) = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x^2 - 9}{x + 1} - x \right) = -1$$

Luego la asíntota oblicua es $y = x - 1$

f)

$$f'(x) = \frac{x^2 + 2x + 9}{(x + 1)^2} = 0 \implies \text{no tiene solución}$$

Luego no hay extremos, como el numerador es siempre positivo y el denominador también concluimos que la función es creciente en el dominio de $f: \mathbb{R} - \{-1\}$

g)

$$f''(x) = -\frac{16}{(x + 1)^3} \neq 0$$

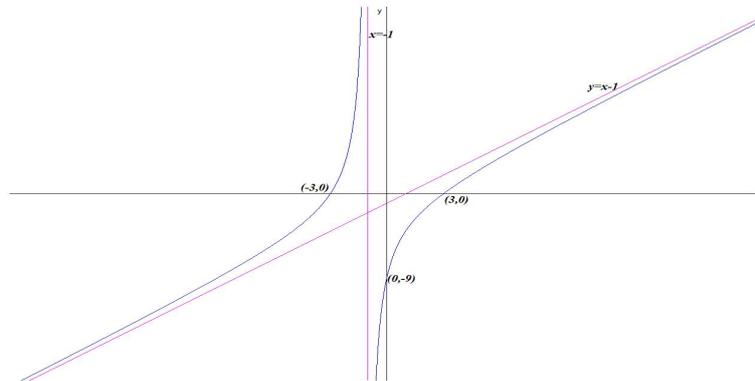
Luego la función no tiene puntos de inflexión.

	$(-\infty, -1)$	$(-1, +\infty)$
$f''(x)$	+	-
$f(x)$	cóncava	convexa

Cóncava: $(-\infty, -1)$

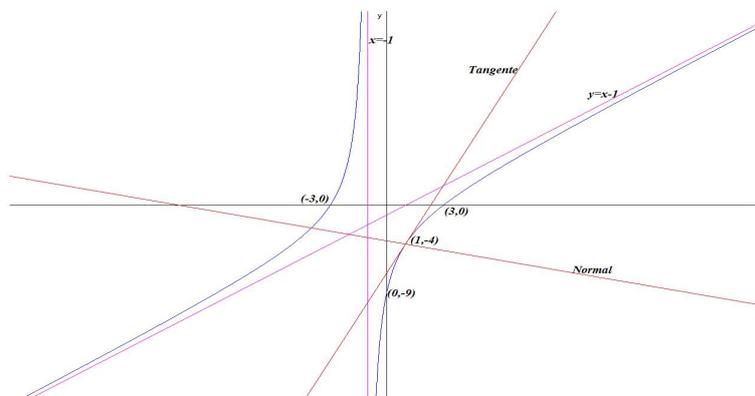
Convexa: $(-1, +\infty)$

h) Representación:



i) Calcular las rectas tangente y normal a la gráfica de f en el punto de abscisa $x = 1$:

Como $m = f'(1) = 2/3$ tenemos que



$$\text{Recta Tangente : } y + 4 = 3(x - 1)$$

$$\text{Recta Normal : } y + 4 = -\frac{1}{3}(x - 1)$$

Como $f(1) = -4$ las rectas pasan por el punto $(1, -4)$.