

Examen de Matemáticas 2º Bachillerato (CS)

Marzo 2014

Problema 1 El número de socios de un club de fútbol ha seguido el modelo definido por la función siguiente: $f(x) = x^3 - 72x^2 + 1296x + 1000$, $0 \leq x \leq 60$, donde x = número de meses transcurridos desde su fundación, $f(x)$ = número de socios.

- a) ¿Cuántos socios tenía el club en el momento de su fundación? ¿Cuántos tenía al cabo de medio año? ¿Y al de un año? ¿Cuántos tenía transcurridos los 60 meses?
- b) Calcular, si los hubiere, el máximo y el mínimo relativos de la función. ¿A qué número de socios corresponderían?
- c) Esboza la gráfica de la función y comenta la evolución del número de socios.

(País Vasco, Junio 2013)

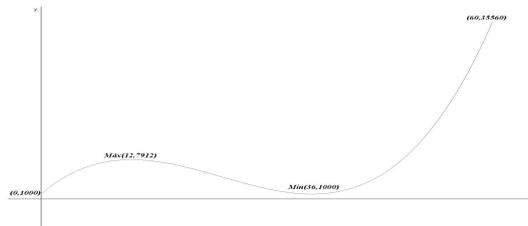
Solución:

- a)
 - $f(0) = 1000$ socios en el momento de su fundación.
 - $f(6) = 6400$ socios al medio año.
 - $f(12) = 7912$ socios al año.
 - $f(60) = 35560$ socios a los 60 meses.
- b) $f'(x) = 3x^2 - 144x + 1296 = 0 \implies x = 12$ y $x = 36$.

	(0, 12)	(12, 36)	(36, 60)
$f'(x)$	+	-	+
$f(x)$	creciente ↗	decreciente ↘	creciente ↗

La función tiene un máximo en (12, 7912) y un mínimo en (36, 1000).

- c) La gráfica sería: Durante los primeros 12 meses el número de socios



aumento hasta los 7912, a partir de este momento comenzó a descender

hasta llegar al mes 36, momento en el que habría 1000 socios, la misma cifra con la que se inauguró. Desde este momento y hasta los 60 meses, el número de socios aumenta considerablemente consiguiendo un máximo absoluto en el momento de llegar a los 60 meses.

Problema 2 Dada la función $f(x) = \frac{x+2}{x+1}$, determinar:

- Su dominio.
- Sus cortes con los ejes.
- Sus asíntotas verticales, horizontales y oblicuas.
- Sus intervalos de crecimiento y decrecimiento.
- Representación gráfica a partir de la información de los apartados anteriores. (Aragón, Junio 2013)

Solución:

- $Dom(f) = \mathbb{R} - \{-1\}$
- Los puntos de corte son: $(0, 2)$ y $(-2, 0)$.
- Asíntotas:

- Verticales: en $x = -1$

$$\lim_{x \rightarrow -1^-} \frac{x+2}{x+1} = \left[\frac{1}{0^-} \right] = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -1^+} \frac{x+2}{x+1} = \left[\frac{1}{0^+} \right] = +\infty$$

- Horizontales: $y = 1$

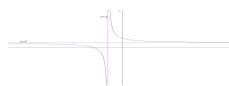
$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x+2}{x+1} = 1$$

- Oblicuas: No hay por haber horizontales.

- Monotonía: f es decreciente en $\mathbb{R} - \{-1\}$.

$$f(x) = \frac{x+2}{x+1}, \quad f'(x) = \frac{-1}{(x+1)^2} < 0 \quad \forall x \in \mathbb{R} - \{-1\}$$

- Representación gráfica



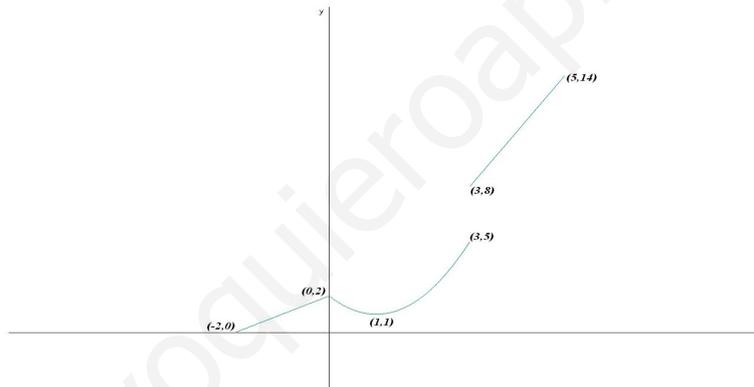
Problema 3 (2 puntos) Dada la función $f(x) = \begin{cases} x + 2 & \text{si } -2 \leq x < 0 \\ x^2 - 2x + 2 & \text{si } 0 \leq x < 3 \\ 3x - 1 & \text{si } 3 \leq x \leq 5 \end{cases}$

- Dibujar su gráfica aproximada en el intervalo $[-2, 5]$
- Estudiar la continuidad de la función en todos los puntos del intervalo $[-2, 5]$.
- Calcular los máximos y mínimos absolutos de $f(x)$ en el intervalo $[-2, 5/2]$.
- Calcula $\int_1^2 f(x) dx$.

(Comunidad Valenciana, Junio 2013)

Solución:

- Representación gráfica



-

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} (x + 2) = 2 = \lim_{x \rightarrow 0^+} (x^2 - 2x + 2) = f(2)$$

Luego la función es continua en $x = 2$

$$\lim_{x \rightarrow 3^-} (x^2 - 2x + 2) = 5 \neq \lim_{x \rightarrow 3^+} (3x - 1) = 8$$

La función es discontinua no evitable en $x = 3$, pega un salto.

- A la vista de la gráfica se observa un mínimo absoluto en $(-2, 0)$, un máximo absoluto en $(5/2, 13/4)$ y un mínimo relativo en $(1, 1)$.

-

$$\int_1^2 f(x) dx = \int_1^2 (x^2 - 2x + 2) dx = \left[\frac{x^3}{3} - x^2 + 2x \right]_1^2 = \frac{4}{3}$$

Problema 4 Dada la función $f(x) = 4x - 2x^2$, se pide:

- Encontrar una primitiva F de f verificando que $F(6) = 0$.
- Dibujar la gráfica de la función f y calcular el área limitada por la curva y el eje OX entre $x = 0$ y $x = 4$.

(Asturias, Junio 2013)

Solución:

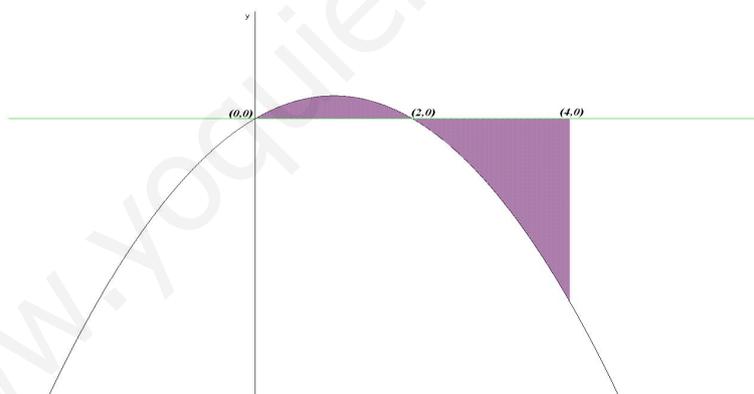
a)

$$F(x) = \int (4x - 2x^2) dx = 2x^2 - \frac{2x^3}{3} + C$$

$$F(6) = 2 \cdot 6^2 - \frac{2}{3} \cdot 6^3 + C = 0 \implies C = 72$$

$$F(x) = 2x^2 - \frac{2x^3}{3} + 72$$

- b) la función f corta al eje OX en los puntos: $f(x) = 0 \implies (0, 0)$ y $(2, 0)$.
En $x = 2$, dentro del intervalo $[0, 4]$, la función corta el eje de abscisas, luego habrá que calcular dos áreas, una S_1 en el intervalo $[0, 2]$ y otra S_2 en el intervalo $[2, 4]$.



$$S_1 = \int_0^2 (4x - 2x^2) dx = \left[2x^2 - \frac{2x^3}{3} \right]_0^2 = \frac{8}{3}$$

$$S_2 = \int_2^4 (4x - 2x^2) dx = \left[2x^2 - \frac{2x^3}{3} \right]_2^4 = -\frac{40}{3}$$

$$S = |S_1| + |S_2| = \frac{48}{3} u^2$$