Examen de Matemáticas 2ºBachillerato(CS)

Abril 2011

Problema 1 Se considera la función

$$f(x) = \begin{cases} x+1 & \text{si} \quad x \le 0 \\ (x-1)^2 & \text{si} \quad 0 < x \le 1 \\ x^2+1 & \text{si} \quad x > 1 \end{cases}$$

se pide:

1. Estudia su continuidad en los puntos de abcisa $x = 0$ y $x = 1$.
2. Extremos relativos de f en el intervalo $[0, 1]$.
3. Represéntala gráficamente.
4. Calcular el área encerrada por la función, el eje OX y las rectas $x = 2$ y $x = 3$. Razona la respuesta.

Solución:

1. Continuidad en $x = 0$:

$$\lim_{x\longrightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x\longrightarrow -1^-} (x+1) = 1$$

$$\lim_{x\longrightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x\longrightarrow -1^-} (x-1)^2 = 1$$

$$f(0) = 1$$

En $x = 0$ la función es continua.

Continuidad en $x = 1$:

$$\lim_{x\longrightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x\longrightarrow 1^-} (x-1)^2 = 0$$

$$\lim_{x\longrightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x\longrightarrow 1^-} (x^2+1) = 2$$

En $x = 1$ hay una discontinuidad no evitable (salto).

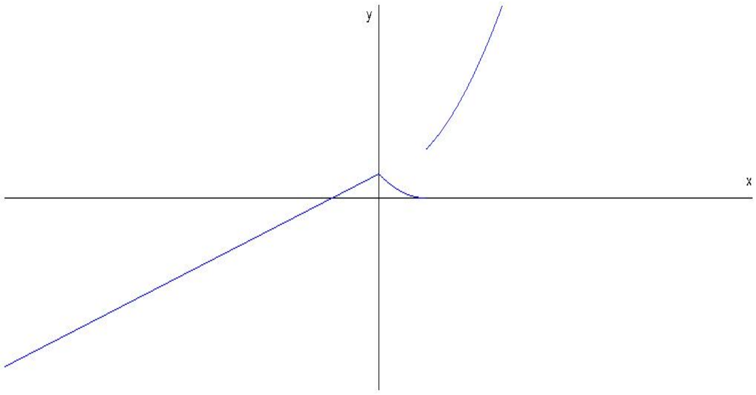
2. La función es $f(x) = x^2 - 2x + 1$ en el intervalo $[0, 1]$.

$$f'(x) = 2x - 2 = 0 \Longrightarrow x = 1$$

$$f''(x) = 2 > 0 \Longrightarrow f''(1) = 2 > 0$$

La función tiene un mínimo en el punto $(0, 1)$. Decrece en el intervalo $(1, 0)$ y crecería a partir de este punto, pero estos puntos ya estarían fuera del intervalo en cuestión.

3. Gráficamente:



4.

$$S = \int_2^2 (x^2 + 3)\, dx = \left.\frac{x^3}{3} + x\right]_2^3 = \frac{22}{3}\, u^2$$

Problema 2 Dada la función $f(x) = \dfrac{2x^2+1}{x}$, determina

1. Calcula sus asíntotas
2. Determina sus intervalos de crecimiento y decrecimiento, sus máximos y mínimos.
3. Represéntala gráficamente

Solución:

1. Asíntotas:
   - Verticales: en $x = 0$

$$\lim_{x\longrightarrow 0^-} \frac{2x^2+1}{x} = \left[\frac{64}{0^-}\right] = +\infty$$

$$\lim_{x\longrightarrow 0^+} \frac{2x^2+1}{x} = \left[\frac{64}{0^+}\right] = -\infty$$

   - Horizontales: No hay

$$\lim_{x\longrightarrow \infty} \frac{2x^2+1}{x} = \infty$$

- Oblicuas: $y = mx + n$

$$m = \lim_{x\longrightarrow\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\longrightarrow\infty} \frac{2x^2+1}{xr} = 2$$

$$n = \lim_{x\longrightarrow\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\longrightarrow\infty} \left(\frac{2x^2+1}{x} - 2x\right) = 0$$

2. Monotonía y extremos:

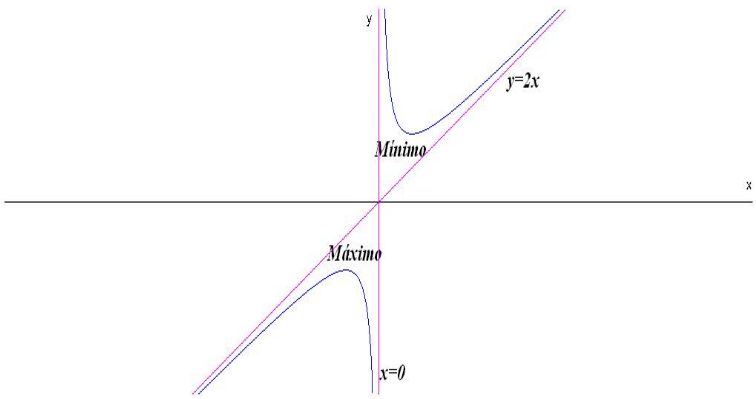
$$f(x) = \frac{2x^2+1}{x}, \quad f'(x) = \frac{2x^2-1}{x^2} = 0 \Longrightarrow x = \frac{\sqrt{2}}{2}, \quad x = -\frac{\sqrt{2}}{2}$$

	$(-\infty, -\frac{\sqrt{2}}{2})$	$(-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2})$	$(\frac{\sqrt{2}}{2}, \infty)$
$f'(x)$	$+$	$-$	$+$
$f(x)$	creciente $\nearrow$	decreciente $\searrow$	creciente $\nearrow$

La función es creciente en el intervalo $\left(-\infty, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right) \cup \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \infty\right)$ y decrece en el intervalo $\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, 0\right) \cup \left(0, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$

La función tiene un máximo en el punto $\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, -\sqrt{2}\right)$ y un mínimo en el punto $\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \sqrt{2}\right)$.

3. Gráficamente:



Problema 3 Calcular los números reales a, b y c de la función $f(x) = ax^2 - 2bx + 3c$, sabiendo que esta función pasa por el punto $(0, 1)$ y tiene un extremo en el punto $(1, 2)$.

Solución:

$$f(x) = ax^2 - 2bx + 3c, \quad f'(x) = 2ax - 2b$$

$$\begin{cases} f(0)=1 \Longrightarrow\ 3c=1 \\ f(1)=2 \Longrightarrow\ a-2b+3c=2 \\ f'(1)=0 \Longrightarrow\ 2a-2b=0 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} a=-1 \\ b=-1 \\ c=1/3 \end{cases}$$

$$f(x)=-x^2+2x+1$$