Examen de Matemáticas 2ºBachillerato(CS)

Febrero 2013

Problema 1 Se considera la función

$$f(x) = \begin{cases} 3x - 1 & \text{si} \quad x \leq -1 \\ x^2 - 5 & \text{si} \quad -1 < x \leq 1 \\ x^2 + 1 & \text{si} \quad x > 1 \end{cases}$$

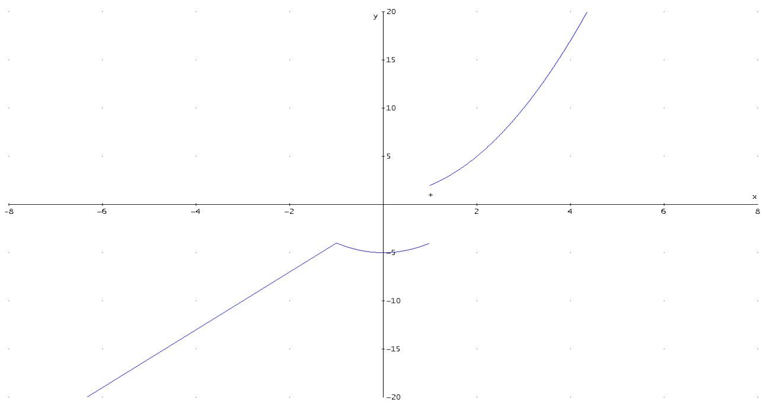
se pide:

a) Estudia su continuidad en los puntos de abcisa $x = -1$ y $x = 1$.

b) Represéntala gráficamente. Razona la respuesta.

Solución:

a) Gráficamente:



b) Continuidad en $x = -1$:

$$\lim_{x \longrightarrow -1^-} f(x) = \lim_{x \longrightarrow -1^-} (3x - 1) = -4$$

$$\lim_{x \longrightarrow -1^+} f(x) = \lim_{x \longrightarrow -1^+} (x^2 - 5) = -4$$

$$f(-1) = -4$$

En $x = -1$ la función es continua.

Continuidad en $x = 1$:

$$\lim_{x \longrightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \longrightarrow 1^-} (x^2 - 5) = -4$$

$$\lim_{x\longrightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x\longrightarrow 1^-}(x^2+1) = 2$$

En $x = 1$ hay una discontinuidad no evitable (salto).

Problema 2 Dada la función $f(x) = \dfrac{(x-1)^2}{x+2}$, determina

a) Calcula sus asíntotas

b) Determina sus intervalos de crecimiento y decrecimiento, sus máximos y mínimos.

Solución:

a) Asíntotas:

- Verticales: en $x = -2$

$$\lim_{x\longrightarrow -2^-}\frac{(x-1)^2}{x+2} = \left[\frac{9}{0^-}\right] = -\infty$$

$$\lim_{x\longrightarrow -2^+}\frac{(x-1)^2}{x+2} = \left[\frac{9}{0^+}\right] = +\infty$$

- Horizontales: No hay

$$\lim_{x\longrightarrow\infty}\frac{(x-1)^2}{x+2} = \infty$$

- Oblicuas: $y = mx + n$

$$m = \lim_{x\longrightarrow\infty}\frac{f(x)}{x} = \lim_{x\longrightarrow\infty}\frac{(x-1)^2}{x^2+2x} = 1$$

$$n = \lim_{x\longrightarrow\infty}\frac{f(x)}{x} = \lim_{x\longrightarrow\infty}\left(\frac{(x-1)^2}{x+2} - x\right) = -4$$

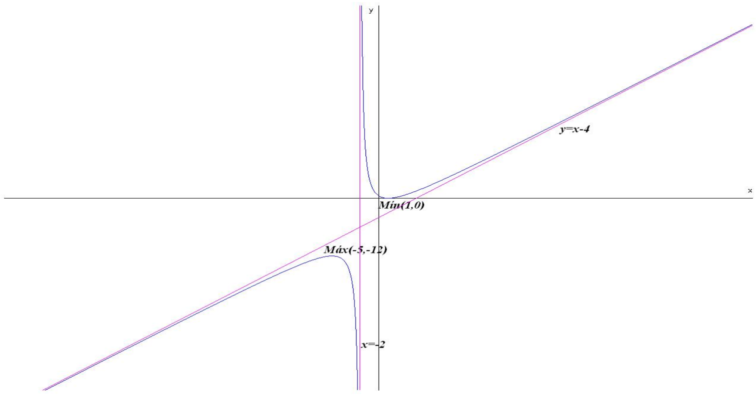
b) Monotonía y extremos:

$$f(x) = \frac{(x-3)^2}{x+3},\quad f'(x) = \frac{x^2+4x-5}{(x+2)^2} = 0 \Longrightarrow x = 1,\quad x = -5$$

	$(-\infty,-5)$	$(-5,1)$	$(1,\infty)$
$f'(x)$	$+$	$-$	$+$
$f(x)$	creciente $\nearrow$	decreciente $\searrow$	creciente $\nearrow$

La función es creciente en el intervalo $(-\infty,-5)\cup(1,\infty)$ y decrece en el intervalo $(-5,-2)\cup(-2,1)$

La función tiene un mínimo en el punto $(1,0)$ y un máximo en el punto $(-5,-12)$.



Problema 3 Encontrar el valor de los parámetros a y b para que la función

$$f(x) = \begin{cases} 3ax^2 - 2bx - 1 & \text{si} \quad x \leq 1 \\ ax^2 - bx + 2 & \text{si} \quad x > 1 \end{cases}$$

sea continua y derivable.

Solución:

Continuidad en $x = 1$:

$$\lim_{x \longrightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \longrightarrow 1^-} (3ax^2 - 2bx - 1) = 3a - 2b - 1$$

$$\lim_{x \longrightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \longrightarrow 1^+} (ax^2 - bx + 2) = a - b + 2$$

$$3a - 2b - 1 = a - b + 2 \Longrightarrow 2a - b = 3$$

Derivabilidad en $x = 1$:

$$f(x) = \begin{cases} 6ax - 2b & \text{si} \quad x \leq 1 \\ 2ax - b & \text{si} \quad x > 1 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} f'(1^-) = 6a - 2b \\ f'(1^+) = 2a - b \end{cases} \Longrightarrow 6a - 2b = 2a - b \Longrightarrow 4a - b = 0$$

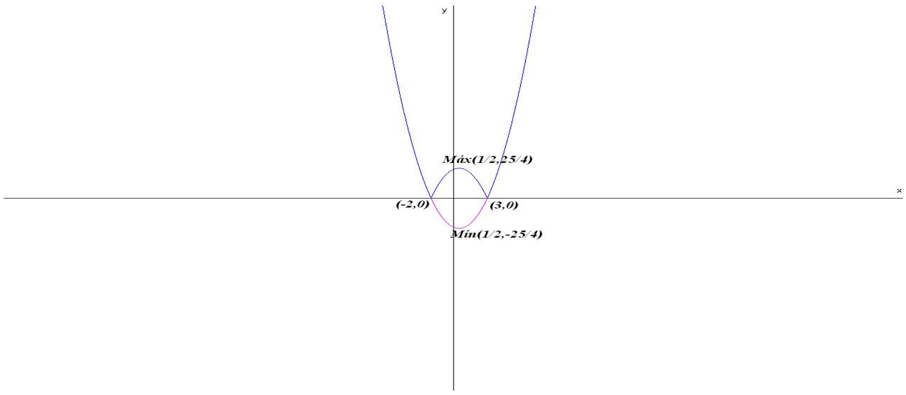
$$\begin{cases} 2a - b = 3 \\ 4a - b = 0 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} a = -3/2 \\ b = -6 \end{cases}$$

Problema 4 Estudiar la continuidad y derivabilidad de la función $f(x) = |x^2 - x - 6|$ y representarla gráficamente.

Solución:

Hacemos $g(x) = x^2 - x - 6 \Longrightarrow g'(x) = 2x - 1 = 0 \Longrightarrow x = \dfrac{1}{2}$:

x	y
0	-6
-2	0
3	0
$1/2$	$-25/4$



$g''(x) = 2 \Longrightarrow g''\left(-\frac{1}{2}\right) > 0 \Longrightarrow$ por lo que hay un mínimo en el punto $\left(\frac{1}{2}, -\frac{25}{4}\right)$. La función valor absoluto convertirá la parte negativa de la curva en su simétrica positiva, por lo que el mínimo se convertirá en un máximo en el punto: $\left(\frac{1}{2}, \frac{25}{4}\right)$

$$f(x) = \left\{ \begin{array}{ccc} x^2 - x - 6 & \text{si} & x \le -2 \\ -(x^2 - x - 6) & \text{si} & -2 < x \le 3 \\ x^2 - x - 6 & \text{si} & 3 \le x \end{array} \right.$$

Continuidad en $x = -2$:

$$\lim_{x \longrightarrow -2^-} f(x) = \lim_{x \longrightarrow -2^-} (x^2 + 3x - 10) = 0$$

$$\lim_{x \longrightarrow -2^+} f(x) = \lim_{x \longrightarrow -2^+} (-x^2 - 3x + 10) = 0$$

$$f(-2) = 0$$

Luego f es continua en $x = -2$

Continuidad en $x = 3$:

$$\lim_{x \longrightarrow 3^-} f(x) = \lim_{x \longrightarrow 3^-} (-x^2 - 3x + 10) = 0$$

$$\lim_{x \longrightarrow 3^+} f(x) = \lim_{x \longrightarrow 3^+} (x^2 + 3x - 10) = 0$$

$$f(3) = 0$$

Luego f es continua en $x = 3$

$$f'(x) = \left\{ \begin{array}{ccc} 2x - 1 & \text{si} & x \le -2 \\ -2x + 1 & \text{si} & -2 < x \le 3 \\ 2x - 1 & \text{si} & 3 \le x \end{array} \right.$$

Derivabilidad en $x = -2$:

$$f'(-2^-) = -5, \quad f'(-2^+) = 5 \Longrightarrow \text{no derivable}$$

Derivabilidad en $x = 3$:

$$f'(3^-) = -5, \quad f'(3^+) = 5 \Longrightarrow \text{no derivable}$$

Problema 5 Calcular los números reales a, b y c de la función $f(x) = ax^2 - 3bx + 2c$, sabiendo que esta función pasa por el punto $(1, 2)$ y tiene un extremo en el punto $(3, 0)$.

Solución:

$$f(x) = ax^2 - 3bx + 2c, \quad f'(x) = 2ax - 3b$$

$$\left\{ \begin{array}{l} f(1) = 2 \Longrightarrow a - 3b + 2c = 2 \\ f(3) = 0 \Longrightarrow 9a - 9b + 2c = 0 \\ f'(3) = 0 \Longrightarrow 6a - 3b = 0 \end{array} \right. \Longrightarrow \left\{ \begin{array}{l} a = 1/2 \\ b = 1 \\ c = 9/4 \end{array} \right.$$