

Examen de Matemáticas 2º Bachillerato (CS)
Febrero 2016

Problema 1 Dada la función

$$f(x) = \frac{x^2 + 1}{x^2 - 4}$$

Se pide:

- a) Calcular su dominio.
- b) Calcular sus puntos de corte con los ejes coordenados.
- c) Calcular su signo.
- d) Calcular su simetría.
- e) Calcular sus asíntotas.
- f) Calcular sus intervalos de crecimiento y decrecimiento, calculando sus extremos relativos.
- g) Calcular sus intervalos de concavidad y convexidad, calculando sus puntos de inflexión.
- h) Representación gráfica.
- i) Calcular las rectas tangente y normal a f en el punto de abscisa $x = 1$.

Solución:

a) Dominio de f : $\text{Dom}(f) = \mathbb{R} - \{\pm 2\}$

b) Puntos de Corte

- Corte con el eje OX hacemos $f(x) = 0 \implies x^2 + 12 = 0 \implies$ No hay puntos de corte con OX .
- Corte con el eje OY hacemos $x = 0 \implies f(0) = -1/4 \implies (0, -1/4)$.

c)

| | | | |
|-------|-----------------|-----------|----------------|
| | $(-\infty, -2)$ | $(-2, 2)$ | $(2, +\infty)$ |
| signo | + | - | + |

d) $f(-x) = f(x) \implies$ la función es par.

e) Asíntotas:

- **Verticales:** $x = 2$

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 + 1}{x^2 - 4} = \pm\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{x^2 + 1}{x^2 - 4} = \left[\frac{5}{0^-} \right] = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{x^2 + 1}{x^2 - 4} = \left[\frac{5}{0^+} \right] = +\infty$$

$x = -2$

$$\lim_{x \rightarrow -2} \frac{x^2 + 1}{x^2 - 4} = \pm\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -2^-} \frac{x^2 + 1}{x^2 - 4} = \left[\frac{5}{0^+} \right] = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -2^+} \frac{x^2 + 1}{x^2 - 4} = \left[\frac{5}{0^-} \right] = -\infty$$

- **Horizontales:** $y = 1$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 + 1}{x^2 - 4} = 1$$

- **Oblicuas:** No hay por haber horizontales

f)

$$f'(x) = -\frac{10x}{(x^2 - 4)^2} = 0 \implies x = 0$$

| | | |
|---------|----------------|----------------|
| | $(-\infty, 0)$ | $(0, +\infty)$ |
| $f'(x)$ | - | + |
| $f(x)$ | creciente | decreciente |

La función es creciente en el intervalo $(-\infty, -2) \cup (-2, 0)$.

La función es decreciente en el intervalo $(0, 2) \cup (2, \infty)$.

La función tiene un máximo en $(0, 1/4)$.

g)

$$f''(x) = \frac{10(3x^2 + 4)}{(x^2 - 4)^3} \neq 0$$

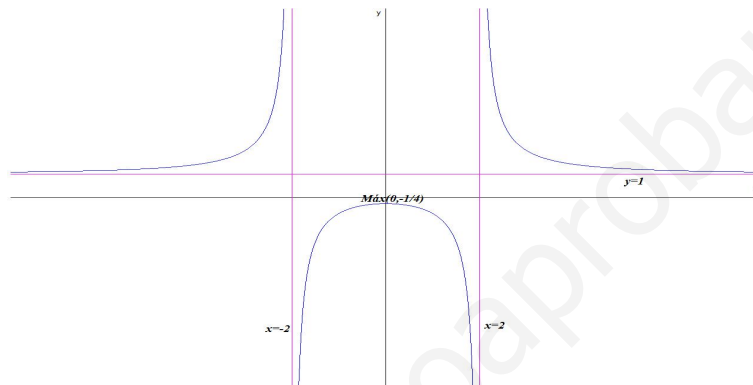
Luego la función no tiene puntos de inflexión.

| | | | |
|----------|-----------------|-----------|----------------|
| | $(-\infty, -2)$ | $(-2, 2)$ | $(2, +\infty)$ |
| $f''(x)$ | + | - | + |
| $f(x)$ | cóncava | convexa | cóncava |

Cóncava: $(-\infty, -2) \cup (2, \infty)$

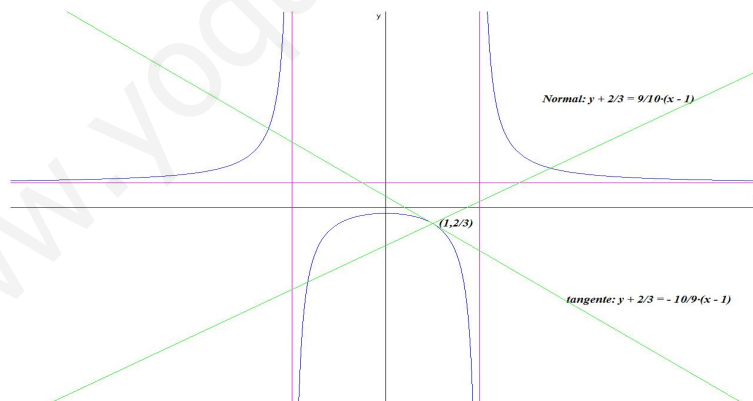
Convexa: $(-2, 2)$

h) Representación:



i) Calcular las rectas tangente y normal a la gráfica de f en el punto de abscisa $x = 1$:

Como $m = f'(0) = -10/9$ tenemos que



$$\text{Recta Tangente : } y + \frac{2}{3} = -\frac{10}{9}(x - 1)$$

$$\text{Recta Normal : } y + \frac{2}{3} = \frac{9}{10}(x - 1)$$

Como $f(1) = -\frac{2}{3}$ las rectas pasan por el punto $(0, -2/3)$.