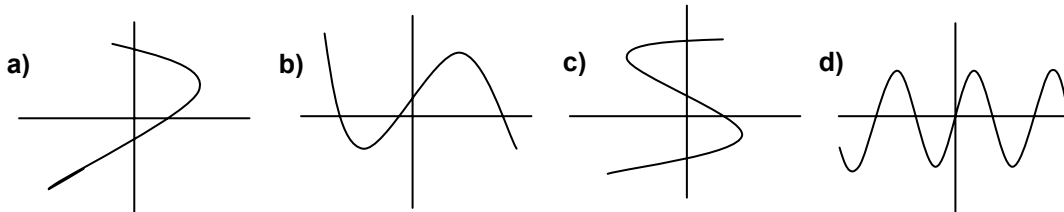


## EJERCICIOS DE FUNCIONES, LÍMITES Y CONTINUIDAD

1. ¿Cuáles de estas representaciones corresponden a la gráfica de una función? (Razonar la respuesta):



2. En cada apartado, representar las rectas sobre los mismos ejes:

a)  $y=3x$   
 $y=3x+2$   
 $y=3x-7$

b)  $y=-3x$   
 $y=-3x+2$   
 $y=-3x-7$

c)  $y = \frac{1}{3}x$   
 $y = \frac{1}{3}x + 2$   
 $y = \frac{1}{3}x - 7$

d)  $y=0$   
 $y=x$   
 $y=-x$

3. Representar sobre los mismos ejes las siguientes parábolas. ¿Qué conclusiones podemos extraer?: a)  $y=x^2$     b)  $y=2x^2$     c)  $y=x^2/2$     d)  $y=-x^2$     e)  $y=-4x^2$

4. Dadas las siguientes parábolas, hallar: i) Vértice  
 ii) Puntos de corte con los ejes  
 iii) Representación gráfica

a)  $y=x^2-6x+8$

b)  $y=x^2-2x-3$

c)  $y=-x^2-4x-3$

d)  $y=x^2-4x+7$

e)  $y=x^2-6x$

f)  $y=x^2+x+1$

g)  $y=3x^2+15x+18$

h)  $y=-x^2-2x-2$

i)  $y=x^2+2x-1$

j)  $y=x^2-4$

k)  $y=x^2+4$

l)  $y=x^2+4x+5$

m)  $y=x^2+4x+3$

n)  $y=-x^2-8x-4$

o)  $y=2x^2+4x+6$

p)  $y=-x^2-1$

q)  $y=(x+5)^2-8$

r)  $y=2(x-1)^2-8$

s)  $y=(x-5)^2+8$

t)  $y=-2(x-1)^2+8$

u)  $y = \frac{1}{2}(x+2)^2 - 5$

v)  $y=x^2-2x+1$

w)  $y=x^2-4x+2$

x)  $y=2x^2-8x+6$

y)  $y=-3x^2-6x+12$

z)  $y=x^2-2x+3$

α)  $y=x^2-6x+5$

β)  $y = \frac{1}{4}x^2 + x - 2$

γ)  $y=2x^2-10x+8$

δ)  $y = \frac{1}{2}x^2 - x - \frac{3}{2}$

ε)  $y=x^2-8x+7$

5. En cada apartado, representar las parábolas sobre los mismos ejes:

a)  $y=x^2$   
 $y=(x-4)^2$   
 $y=(x+5)^2$

b)  $y=x^2$   
 $y=x^2+4$   
 $y=x^2-5$

- c) A la vista de lo anterior, ¿cómo sería la parábola  $y=(x-4)^2+5$ ? ¿Cuál es su vértice?

6. Representar las siguientes funciones definidas a trozos:

a)  $f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{si } x \in (-\infty, 2) \\ x & \text{si } x \in [2, \infty) \end{cases}$

b)  $f(x) = \begin{cases} 3 & \text{si } x < -1 \\ 1-2x & \text{si } -1 \leq x < 1 \\ 3x-1 & \text{si } x \geq 1 \end{cases}$

c)  $f(x) = \begin{cases} x^2 - 4 & \text{si } x \in (-\infty, 2) \\ x - 2 & \text{si } x \in [2, 4] \\ 5 & \text{si } x \in (4, \infty) \end{cases}$

$$\begin{array}{l}
 \text{d) } f(x) = \begin{cases} 5x - 2 & \text{si } x \leq 1 \\ -2 & \text{si } x = 2 \\ x/2 & \text{si } x > 2 \end{cases} \\
 \text{e) } f(x) = \begin{cases} -3 & \text{si } -5 \leq x < 0 \\ x^2 & \text{si } 0 \leq x < 2 \\ x + 2 & \text{si } x \geq 2 \end{cases} \\
 \text{f) } f(x) = \begin{cases} x/2 & \text{si } x \in (-\infty, 1] \\ \frac{1}{x-1} & \text{si } x \in (1, \infty) \end{cases} \\
 \text{g) } f(x) = \begin{cases} 3x - 2 & \text{si } x < 0 \\ -2 & \text{si } x = 0 \\ \frac{4}{x-2} & \text{si } x > 0 \end{cases} \\
 \text{h) } f(x) = \begin{cases} -x - 2 & \text{si } x \in (-\infty, 2] \\ x^2 - 4x & \text{si } x \in (2, \infty) \end{cases} \\
 \text{i) } f(x) = \begin{cases} \frac{5}{x-5} & \text{si } x \leq 0 \\ \sqrt{x+1} & \text{si } 0 < x \leq 3 \\ \frac{10}{x+2} & \text{si } x > 3 \end{cases} \\
 \text{j) } f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ 3x - x^2 & \text{si } 0 \leq x < 3 \\ x - 4 & \text{si } 3 \leq x < 6 \\ 0 & \text{si } x > 6 \end{cases}
 \end{array}$$

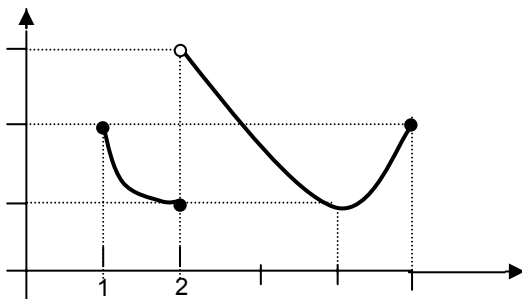
7. Dadas las siguientes **funciones valor absoluto** se pide: **i)** Representación gráfica **ii)** Definición analítica por ramas.

$$\begin{array}{llll}
 \text{a) } f(x) = |-3x + 3| & \text{b) } f(x) = |x^2 - 4x + 3| & \text{c) } f(x) = |x + 1| & \text{d) } f(x) = |x^2 - 5x + 6| \\
 \text{e) } f(x) = |-x^2 - 4x - 5| & \text{f) } f(x) = |3x + 6| & \text{g) } f(x) = \left| \frac{1}{2}x^2 - x - 4 \right| & 
 \end{array}$$

**RECORDAR:** • Para que exista límite de una  $f(x)$  en un punto han de coincidir los límites laterales en dicho punto.

- A efectos del  $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$  no tenemos en cuenta lo que ocurre exactamente en  $x=a$ , sino en las proximidades. De hecho, hay casos en los que no existe  $f(a)$  pero sí el lím (de ahí la utilidad de la noción de límite)

8.



Dada la gráfica de la figura, indicar si existe  $\lim f(x)$  en los siguientes casos:

- Cuando  $x \rightarrow 1$
- Cuando  $x \rightarrow 2$
- Cuando  $x \rightarrow 4$
- Cuando  $x \rightarrow 5$

9. Representar la función

$$f(x) = \begin{cases} 2 & \text{si } x < 1 \\ 4 - x & \text{si } 1 \leq x < 3 \\ x - 2 & \text{si } x \geq 3 \end{cases}$$

y calcular  $\lim f(x)$  cuando  $x \rightarrow 1$ ,  $x \rightarrow 3$ ,  $x \rightarrow 5$

10. Dada la función

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + 1 & \text{si } x \leq 1 \\ ax + 3 & \text{si } 1 < x \leq 2 \\ bx^3 - 2 & \text{si } x > 2 \end{cases}$$

calcular los valores de los parámetros **a** y **b** para que existan los límites en  $x=1$  y  $x=2$

(Soluc:  $a=-1$ ,  $b=3/8$ )

**RECORDAR:**

$$f(x) \text{ continua en } x = a \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$$

Es decir: "Una función es continua en un punto si el límite coincide con la imagen en dicho punto".

- A efectos prácticos, para estudiar si una función es continua en un punto, hay que comprobar:
  - 1) que exista imagen
  - 2) que exista límite
  - 3) y que coincidan

11. Estudiar la continuidad de las siguientes funciones:

$$\text{a) } f(x) = \begin{cases} x + 1 & \text{si } x \geq 0 \\ x - 1 & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

$$\text{b) } f(x) = \begin{cases} x^2 - 1 & \text{si } x < 0 \\ 2 & \text{si } x = 0 \\ 2x - 1 & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

$$\text{c) } f(x) = \begin{cases} x + 1 & \text{si } x < 2 \\ 2x - 1 & \text{si } x > 2 \end{cases}$$

$$\text{d) } f(x) = \begin{cases} 2 - x^2 & \text{si } x \leq 2 \\ 2x - 6 & \text{si } x > 2 \end{cases}$$

$$\text{e) } f(x) = \begin{cases} 1/x & \text{si } x < 1 \\ \sqrt{x+1} & \text{si } x \geq 1 \end{cases}$$

(Soluc: a) *discont. en x=0*; b) *discont. en x=0*; c) *discont. en x=2*; d) *continua  $\forall \mathbb{R}$* ; e) *discont. en x=0 y x=1*)

12. Dada  $f(x) = \begin{cases} \frac{|x|}{x} & \text{si } x \neq 0 \\ 1 & \text{si } x = 0 \end{cases}$  se pide:

a) Representación gráfica.

b) Estudiar analíticamente la continuidad lateral en  $x=0$

c) A la vista del apartado anterior, ¿es continua en  $x=0$ ?

13. Representar la siguiente función e indicar si tiene algún punto de discontinuidad:

$$f(x) = \begin{cases} x + 1 & \text{si } x < 3 \\ x^2 & \text{si } 3 \leq x < 4 \\ 0 & \text{si } x \geq 4 \end{cases}$$

(Soluc: *discontinua en x=3 y x=4*)

14. Representar la siguiente función e indicar si tiene algún punto de discontinuidad:

$$f(x) = \begin{cases} x - 1 & \text{si } x \leq 1 \\ x^2 - 1 & \text{si } 1 < x \leq 2 \\ x^2 & \text{si } x > 2 \end{cases}$$

(Soluc: *discontinua en x=2*)

15. Calcular cuánto debe valer **a** para que la siguiente función sea continua  $\forall \mathbb{R}$ :

$$f(x) = \begin{cases} x + 1 & \text{si } x \leq 2 \\ 3 - ax^2 & \text{si } x > 2 \end{cases}$$

(Soluc: *a=0*)

16. Dada la función

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + 2x - 1 & \text{si } x < 0 \\ ax + b & \text{si } 0 \leq x < 1 \\ 2 & \text{si } x \geq 1 \end{cases}$$

hallar **a** y **b** para que la función sea continua y dibujar la gráfica de la función. (Soluc: *a=3 y b=-1*)

17. Dada la función

$$f(x) = \begin{cases} x + 3 & \text{si } x \leq 1 \\ mx + n & \text{si } 1 < x \leq 3 \\ -x^2 + 10x - 11 & \text{si } x > 3 \end{cases}$$

hallar los valores de **m** y **n** para que  $f(x)$  sea continua (puede ser útil dibujar la gráfica).

(Soluc:  $m=3, n=1$ )

18. Ídem:

$$f(x) = \begin{cases} -2x + 1 & \text{si } x \leq -2 \\ ax + 2 & \text{si } -2 \leq x \leq 2 \\ x^2 + b & \text{si } x \geq 2 \end{cases}$$

(Soluc:  $a=-1/2, b=-3$ )

19. Ídem:

$$f(x) = \begin{cases} ax + 2 & \text{si } x < -1 \\ b/x^2 & \text{si } -1 \leq x < 3 \\ cx & \text{si } 3 \leq x < 5 \\ 10 & \text{si } x \geq 5 \end{cases}$$

(Soluc:  $a=-52, b=54, c=2$ )