Unidad 9.
Límites, continuidad y asíntotas

1. Límite de una función en un punto

Piensa y calcula

Halla mentalmente y completa la tabla siguiente:

x	1,9	1,99	2,1	→	**2**	←	2,001	2,01	2,1
f(x) = x + 1				→		←			

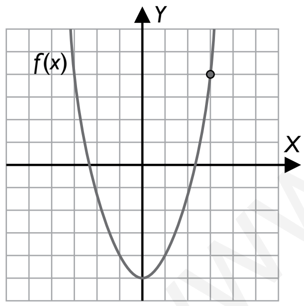
Solución:

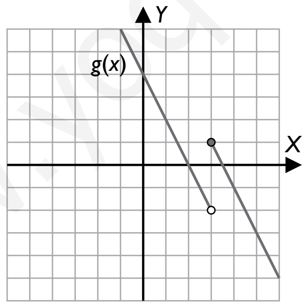
x	1,9	1,99	2,1	→	**2**	←	2,001	2,01	2,1
f(x) = x + 1	2,9	2,99	3,1	→	**3**	←	3,001	3,01	3,1

Aplica la teoría

1 Observando la gráfica, halla el límite en cada caso; si no existe, justifícalo:

a) $\lim\limits_{x\to 3} f(x)$ b) $\lim\limits_{x\to 3} g(x)$





Solución:

a) $\lim\limits_{x\to 3} f(x) = 4$

b) $\lim\limits_{x\to 3} g(x)$ no existe porque los límites laterales son distintos.

$\lim\limits_{x\to 3^-} g(x) = -2;\ \lim\limits_{x\to 3^+} g(x) = 1$

2 Demuestra que el $\lim\limits_{x\to 1} (3x + 2) = 5$

Solución:

Hay que demostrar que para todo $\varepsilon > 0$, existe un $\delta > 0$ tal que

$|3x + 2 - 5| < \varepsilon$ siempre que $0 < |x - 1| < \delta$

$|3x + 2 - 5| = |3x - 3| = |3(x - 1)| = 3|x - 1|$

Para cualquier $\varepsilon > 0$, se puede tomar $\delta = \varepsilon/3$ y se cumple la condición:

Siempre que $0 < |x - 1| < 1 = \varepsilon/3$, se tiene

$|2x - 2 - 5| = 3|x - 1| < 3\,\dfrac{\varepsilon}{3} = \varepsilon$

3 Completa las tablas para estimar el límite en cada caso:

x	0,9	0,99	0,999	→	**1**
f(x) = x^2 – 1				→	

x	1,1	1,01	1,001	→	**1**
f(x) = x^2 – 1				→	

a) $\lim\limits_{x\to 1^-} (x^2 - 1)$ b) $\lim\limits_{x\to 1^+} (x^2 - 1)$

Solución:

x	0,9	0,99	0,999	→	**1**
f(x) = x^2 + 1	–0,19	–0,0199	–0,001999	→	**0**

x	1,1	1,01	1,001	→	**1**
f(x) = x^2 + 1	0,21	0,0201	0,002	→	**0**

a) $\lim\limits_{x\to 1^-} (x^2 - 1) = 0$ b) $\lim\limits_{x\to 1^+} (x^2 - 1) = 0$

4 Calcula mentalmente los siguientes límites:

a) $\lim\limits_{x\to 2} (x^3 - 2x + 1)$ b) $\lim\limits_{x\to 3} \dfrac{2x}{x+3}$

c) $\lim\limits_{x\to 0} \sqrt{x^2+4}$ d) $\lim\limits_{x\to 0} 5^{x-2}$

e) $\lim\limits_{x\to 1} \ln(4x+2)$ f) $\lim\limits_{x\to \pi/2} \text{sen}\,(2x+\pi)$

Solución:

a) $\lim\limits_{x\to 2} (x^3 - 2x + 1) = 8 - 4 + 1 = 5$

b) $\lim\limits_{x\to 3} \dfrac{2x}{x+3} = \dfrac{6}{6} = 1$

c) $\lim\limits_{x\to 0} \sqrt{x^2+4} = \sqrt{4} = 2$

d) $\lim\limits_{x\to 2} 5^{x-2} = 5^0 = 1$

e) $\lim\limits_{x\to 2} \ln(4x+2) = \ln 6$

f) $\lim\limits_{x\to \pi/2} \text{sen}\,(2x+\pi) = \text{sen}\,2\pi = 0$

2. Límite de una función en el infinito

Piensa y calcula

Halla mentalmente y completa la tabla siguiente:

x	$-\infty \leftarrow$	$-1\,000$	-100	-10	-1	1	10	100	$1\,000$	$\to +\infty$
$f(x) = 1/x$										

Solución:

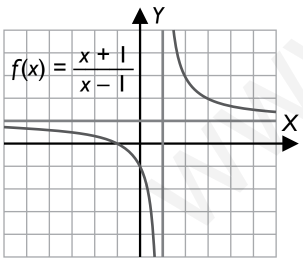
x	$-\infty \leftarrow$	$-1\,000$	-100	-10	-1	1	10	100	$1\,000$	$\to +\infty$
$f(x) = 1/x$	0	$-0{,}001$	$-0{,}01$	$-0{,}1$	-1	1	0,1	0,01	0,001	0

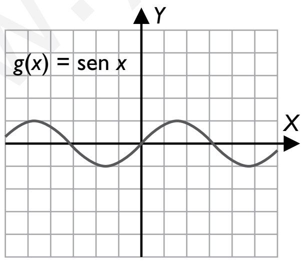
Aplica la teoría

5 Usa la gráfica para estimar el límite en cada caso; y si no existe, justifícalo:

a) $\lim\limits_{x\to -\infty} f(x)$, $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x)$ siendo $f(x) = \dfrac{x+1}{x-1}$

b) $\lim\limits_{x\to -\infty} g(x)$, $\lim\limits_{x\to +\infty} g(x)$ siendo $g(x) = \text{sen}\,x$





Solución:

a) $\lim\limits_{x\to -\infty} f(x) = 1$, $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x) = 1$

b) $\lim\limits_{x\to -\infty} g(x)$ no existe porque la función sen x está oscilando continuamente entre -1 y 1

No se acerca a ningún valor cuando la x tiende a $-\infty$

$\lim\limits_{x\to +\infty} g(x)$ no existe porque la función sen x está oscilando continuamente entre -1 y 1

No se acerca a ningún valor cuando la x tiende a $+\infty$

6 Indica si los siguientes límites son infinitos, un número o una indeterminación:

a) $\lim\limits_{x\to +\infty} (x^2 + 3x)$ b) $\lim\limits_{x\to +\infty} (x^2 - 3x)$

c) $\lim\limits_{x\to +\infty} 2^{-x}$ d) $\lim\limits_{x\to +\infty} x^{-5}$

e) $\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{\log x}{x^2}$ f) $\lim\limits_{x\to -\infty} \dfrac{x}{\sqrt{x^2+1}}$

g) $\lim\limits_{x\to +\infty} \left(\dfrac{x^2}{x^2-5}\right)^x$ h) $\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{e^{x-5}}{\ln(x+5)}$

i) $\lim\limits_{x\to +\infty} x^2 \cdot 2^{-x}$ j) $\lim\limits_{x\to -\infty} \left(\sqrt{x^2+x} - 3x\right)$

Solución:

a) $\infty + \infty = +\infty$

b) $[\infty - \infty] = \lim\limits_{x\to +\infty} x^2 = +\infty$

$\left(\text{Observa que: } \lim\limits_{x\to +\infty} x^2 > \lim\limits_{x\to +\infty} 3x\right)$

c) $\dfrac{1}{\infty} = 0$

d) $\infty^{-5} = 0$

e) $\left[\dfrac{\infty}{\infty}\right] = 0 \left(\text{Observa que: } \lim\limits_{x\to +\infty} \log x < \lim\limits_{x\to +\infty} x^2\right)$

f) $\left[\dfrac{-\infty}{\infty}\right]$ Indeterminado.

g) $[1^{\infty}]$ Indeterminado.

h) $\left[\dfrac{\infty}{\infty}\right] = +\infty$

$\left(\text{Observa que: } \lim\limits_{x\to+\infty} e^{x-5} > \lim\limits_{x\to+\infty} \ln(x+5)\right)$

i) $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x^2}{2^x} = \left[\dfrac{\infty}{\infty}\right] = 0$

$\left(\text{Observa que: } \lim\limits_{x\to+\infty} x^2 < \lim\limits_{x\to+\infty} 2^x\right)$

j) $\infty + \infty = +\infty$

3. Límites de funciones polinómicas y racionales

Piensa y calcula

Indica cuál de las siguientes expresiones es determinada, y calcula el resultado, y cuál indeterminada:

a) $(-\infty)^3$ b) ∞^3 c) $\dfrac{4}{0}$ d) $\dfrac{0}{4}$ e) $\dfrac{0}{0}$ f) $\dfrac{5}{\infty}$ g) $\dfrac{\infty}{\infty}$

Solución:

a) $(-\infty)^3 = -\infty$ b) $\infty^3 = \infty$ c) $\dfrac{4}{0} = \infty$ d) $\dfrac{0}{4} = 0$

e) $\left[\dfrac{0}{0}\right]$ Indeterminado. f) $\dfrac{5}{\infty} = 0$ g) $\left[\dfrac{\infty}{\infty}\right]$ Indeterminada.

Aplica la teoría

7 Calcula los límites siguientes:

a) $\lim\limits_{x\to+\infty} (-x^5 + x^2 + 3)$

b) $\lim\limits_{x\to-\infty} (-x^3 + 5x - 4)$

Solución:

a) $-\infty$ b) $+\infty$

8 Calcula los límites siguientes:

a) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x^2 - x}{x^3 - x^2 + x - 1}$

b) $\lim\limits_{x\to 3} \dfrac{x^2 + 2x - 3}{x^2 + x - 6}$

Solución:

a) 1/2 b) 2

9 Calcula los límites siguientes:

a) $\lim\limits_{x\to-2} \dfrac{x+5}{x+2}$

b) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x+2}{x^2-1}$

Solución:

a) $\lim\limits_{x\to-2^-} \dfrac{x+5}{x+2} = -\infty$ $\lim\limits_{x\to-2^+} \dfrac{x+5}{x+2} = +\infty$

b) $\lim\limits_{x\to 1^-} \dfrac{x+2}{x^2-1} = -\infty$ $\lim\limits_{x\to 1^+} \dfrac{x+2}{x^2-1} = +\infty$

10 Calcula los límites siguientes:

a) $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x^2+3}{x^3+2x}$

b) $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{3x^2+2}{x^2+1}$

Solución:

a) 0 b) 3

11 Calcula los límites siguientes:

a) $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(\dfrac{x^3+1}{x^2+2} - x\right)$

b) $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(\dfrac{5x^4-x}{x^2+3} - 2x\right)$

c) $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(\dfrac{3x+1}{2} - \dfrac{x^2+3}{x}\right)$

d) $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(\dfrac{x^3-4x^2}{2x^2-1} - \dfrac{x}{2}\right)$

Solución:

a) 0

b) $+\infty$

c) $+\infty$

d) -2

4. Límites de funciones irracionales y potenciales-exponenciales

Piensa y calcula

Indica cuál de las siguientes expresiones es determinada, calcula el resultado, y cuál indeterminada:

a) $\sqrt{+\infty}$ b) $+\infty - \infty$ c) ∞^0 d) $3^{+\infty}$ e) 0^0 f) 1^∞

Solución:

a) $+\infty$ b) Indeterminada. c) Indeterminada.
d) $+\infty$ e) Indeterminada. f) Indeterminada.

Aplica la teoría

12 Calcula, si existen, los siguientes límites:

a) $\lim\limits_{x \to 5^-} \sqrt{x-5}$ b) $\lim\limits_{x \to 5^+} \sqrt{x-5}$

Solución:
a) No existe. b) 0

13 Calcula, si existen, los siguientes límites:

a) $\lim\limits_{x \to -\infty} \sqrt{x-3}$ b) $\lim\limits_{x \to +\infty} \sqrt{x-3}$

Solución:
a) No existe. b) $+\infty$

14 Calcula los límites siguientes:

a) $\lim\limits_{x \to +\infty} (\sqrt{x^2+1} - x)$ b) $\lim\limits_{x \to -\infty} (3x + \sqrt{9x^2+x})$

Solución:
a) 0 b) $-1/6$

15 Calcula los límites siguientes:

a) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sqrt{4+x} - 2}{x}$

b) $\lim\limits_{x \to 3} \dfrac{\sqrt{6+x} - 3}{x-3}$

Solución:
a) $1/4$ b) $1/6$

16 Calcula los límites siguientes:

a) $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(\dfrac{x+5}{x+2}\right)^x$

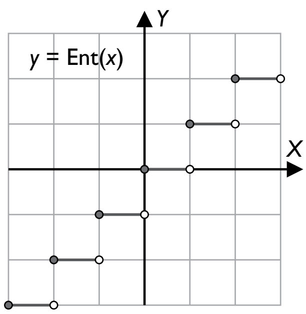
b) $\lim\limits_{x \to 1} \left(\dfrac{x^2+1}{3x-1}\right)^{\frac{x+1}{x-1}}$

Solución:
a) e^3 b) $e^{-1} = 1/e$

5. Continuidad

Piensa y calcula

Indica en qué valores es discontinua la función parte entera:

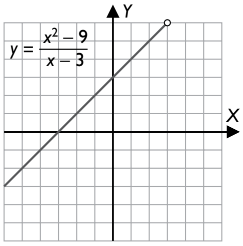


Solución:
En los valores enteros en los que tiene una discontinuidad de salto finito.

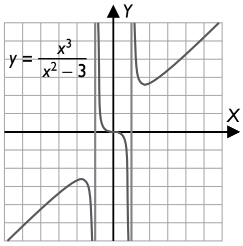
Aplica la teoría

17 A la vista de la gráfica, clasifica las discontinuidades de las siguientes funciones:

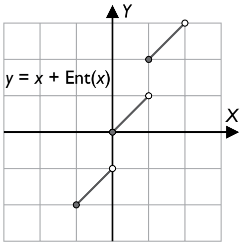
a)



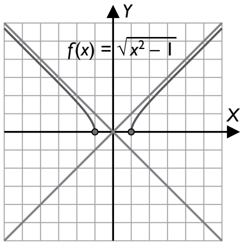
b)



c)



d)



Solución:

a) Tiene una discontinuidad evitable en $x = 3$, que se evita haciendo $f(3) = 6$

b) Tiene una discontinuidad de 1.ª especie de salto infinito en $x = -1$ y $x = 1$

c) Tiene una discontinuidad de 1.ª especie de salto finito en los valores enteros.

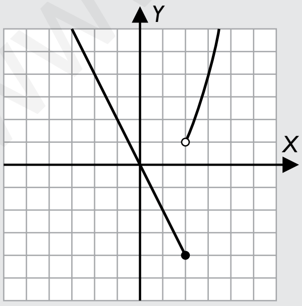
d) Tiene una discontinuidad de 2.ª especie en los valores $x = -1$ y $x = 1$

18 Representa y estudia la continuidad de las siguientes funciones:

a) $f(x) = \begin{cases} -2x & \text{si } x \le 2 \\ x^2 - 2x + 1 & \text{si } x > 2 \end{cases}$

b) $g(x) = \begin{cases} 2^x - 2 & \text{si } x \le 1 \\ \ln x & \text{si } x > 1 \end{cases}$

Solución:



La función está definida a trozos con dos funciones polinómicas que siempre son continuas en su dominio. El único punto conflictivo puede ser para $x = 2$

a) $f(2) = -4$

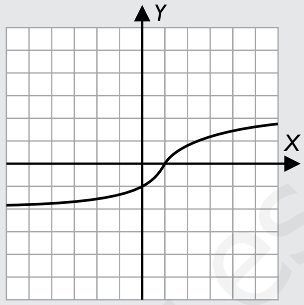
b) $\lim\limits_{x \to 2^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 2^-} (-2x) = -4$

$\lim\limits_{x \to 2^+} f(x) = \lim\limits_{x \to 2^+} (x^2 - 2x + 1) = 1$

Como los límites laterales no son iguales, no existe el $\lim\limits_{x \to 2} f(x)$

Existe una discontinuidad de 1.ª especie de salto finito en $x = 2$

b)



La función está definida a trozos con una función exponencial y una logarítmica que siempre son continuas en su dominio. El único punto conflictivo puede ser para $x = 1$

a) $g(1) = 0$

b) $\lim\limits_{x \to 1^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 1^-} (2^x - 2) = 0 \quad \lim\limits_{x \to 1^+} f(x) = \lim\limits_{x \to 1^+} \ln x = 0$

Como los límites laterales son iguales, el $\lim\limits_{x \to 1} f(x) = 0$

La función es continua.

19 Estudia la continuidad de las siguientes funciones:

a) $f(x) = \frac{x}{x^2 - 1}$

b) $f(x) = \frac{x^2 - 4}{x - 2}$

c) $f(x) = \sqrt{16 - x^2}$

Solución:

a) Es una función racional que es continua en todo su dominio.

Los valores donde no existe la función son $x = -1$ y $x = 1$

• En $x = -1$

$\lim\limits_{x \to -1^-} \frac{x}{x^2 - 1} = -\infty \qquad \lim\limits_{x \to -1^+} \frac{x}{x^2 - 1} = +\infty$

La función tiene una discontinuidad de 1.ª especie de salto infinito.

• En $x = 1$

$\lim\limits_{x \to 1^-} \frac{x}{x^2 - 1} = -\infty \qquad \lim\limits_{x \to 1^+} \frac{x}{x^2 - 1} = +\infty$

La función tiene una discontinuidad 1.ª especie de salto infinito.

b) Es una función racional que es continua en todo su dominio.

El valor donde no existe la función es $x = 2$

$$\lim_{x \to 2} \frac{x^2 - 4}{x - 2} = 4$$

La función tiene una discontinuidad evitable. Se evita haciendo $f(2) = 4$

c) Es una función irracional que es continua en todo su dominio. Los puntos conflictivos se encuentran en los valores de los extremos finitos del dominio $x = -4$ y $x = 4$

• En $x = -4$

$f(-4) = 0$

$\lim\limits_{x \to -4^-} \sqrt{16 - x^2}$ no existe.

$\lim\limits_{x \to -4^+} \sqrt{16 - x^2} = 0$

La función tiene una discontinuidad de 2.ª especie en $x = -4$

• En $x = 4$

$f(-4) = 0$

$\lim\limits_{x \to -4^-} \sqrt{16 - x^2} = 0$

$\lim\limits_{x \to -4^+} \sqrt{16 - x^2}$ no existe.

La función tiene una discontinuidad de 2.ª especie en $x = 4$

20 Halla el valor del parámetro k para que la siguiente función sea continua en $x = 2$

$$f(x) = \begin{cases} \sqrt{2 - x} & \text{si } x \le 2 \\ kx - 1 & \text{si } x > 2 \end{cases}$$

Solución:

a) $f(2) = 0$

b) $\lim\limits_{x \to 2^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 2^-} \sqrt{2 - x} = 0$

$\lim\limits_{x \to 2^+} f(x) = \lim\limits_{x \to 2^+} (kx - 1) = 2k - 1$

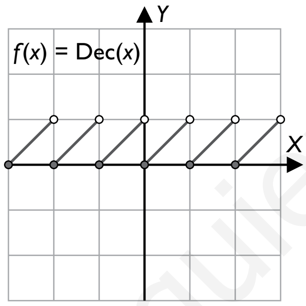
c) Para que sea continua, el límite debe existir cuando x tiende a 2, y ser igual que $f(2)$

$$2k - 1 = 0 \Rightarrow k = 1/2$$

6. Propiedades de la continuidad

Piensa y calcula

En la gráfica se representa la función parte decimal. ¿Es continua en el intervalo (1, 2)?



Solución:

Sí, es continua en el intervalo abierto (1, 2)

Aplica la teoría

21 Estudia la continuidad de las siguientes funciones en los intervalos cerrados correspondientes:

a) $f(x) = \sqrt{25 - x^2}$ en $[-5, 5]$

b) $f(x) = \dfrac{1}{x^2 - 4}$ en $[-1, 2]$

c) $f(x) = \dfrac{x^2 + 1}{x^2 - 1}$ en $[0, 2]$

Solución:

a) Es una función irracional que es continua en su dominio. Hay que estudiar los extremos.

En $x = -5$

$f(-5) = 0$

$\lim\limits_{x \to -5^+} \sqrt{25 - x^2} = 0$

La función es continua por la derecha en $x = -5$

En $x = 5$

$f(5) = 0$

$\lim\limits_{x \to 5^-} \sqrt{25 - x^2} = 0$

La función es continua por la izquierda en $x = 5$

La función es continua en el intervalo cerrado $[-5, 5]$

b) La función es racional, que es continua en su dominio. Los valores para los que la función no está definida son $x = -2$ y $x = 2$

Como $2 \in [-1, 2]$, la función no es continua en dicho intervalo porque $x = 2$ tiene una discontinuidad de 1.ª especie de salto infinito.

c) La función es racional, que es continua en su dominio. Los valores para los que la función no está definida son $x = -1$; $x = 1$

Como $1 \in [0, 2]$, la función no es continua en el intervalo porque en $x = 1$ tiene una discontinuidad de 1.ª especie de salto infinito.

22 Halla los intervalos en los que las siguientes funciones son continuas:

a) $f(x) = \dfrac{3x^2 - x - 2}{x - 1}$ b) $f(x) = \dfrac{\sqrt{x + 1}}{x}$

Solución:

a) Es una función racional que es continua en su dominio. Luego es continua en:

$$(-\infty, 1) \cup (1, +\infty)$$

b) Es un cociente de dos funciones continuas en sus dominios respectivos.

La función no existe para $x = 0$ y tampoco existe en aquellos valores en que el radicando es negativo, es decir, $(-\infty, -1)$

Luego la función es continua en $[-1, 0) \cup (0, +\infty)$

23 Halla los intervalos en los que las siguientes funciones son continuas:

a) $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x}{2} + 1 & \text{si } x \le 2 \\ -x + 3 & \text{si } x > 2 \end{cases}$

b) $g(x) = \begin{cases} -x + 1 & \text{si } x \le 1 \\ \dfrac{x}{x - 2} & \text{si } x > 1 \end{cases}$

Solución:

a) La función está definida por dos funciones polinómicas que son continuas en sus dominios.

Se estudia $x = 2$

$f(2) = 2$

$$\lim_{x \to -2^-} f(x) = \lim_{x \to -2^-} \left(\frac{x}{2} + 1\right) = 2$$

$$\lim_{x \to -2^+} f(x) = \lim_{x \to -2^+} (-x + 3) = 1$$

Como no existe el límite para $x = 2$, la función no es continua en $x = 2$. Luego la función es continua en $(-\infty, 2) \cup (2, +\infty)$

b) La función está definida por una función polinómica y una función racional que son continuas en sus dominios.

Se estudia $x = 1$

$g(1) = 0$

$$\lim_{x \to 1^-} g(x) = \lim_{x \to 1^-} (-x + 1) = 0$$

$$\lim_{x \to 1^+} g(x) = \lim_{x \to 1^+} \frac{x}{x - 2} = -1$$

Como no existe el límite para $x = 1$, la función no es continua en $x = 1$

Como para $x > 1$ la función racional no está definida para $x = 2$, en ese valor no es continua. Luego la función es continua en: $(-\infty, 1) \cup (1, 2) \cup (2, +\infty)$

24 Demuestra que las siguientes funciones tienen un cero en los intervalos correspondientes:

a) $f(x) = x^3 + 3x - 2$ en $[0, 1]$

b) $f(x) = x^2 - 2 - \operatorname{sen} x$ en $[0, \pi]$

Solución:

Se comprueban las hipótesis del teorema de Bolzano:

a) $f(x)$ es continua en $[0, 1]$ por ser una función polinómica.

$f(0) = -2 < 0$

$f(1) = 2 > 0$

Por el teorema de Bolzano, se tiene que existe al menos un valor $c \in (0, 1)$ tal que $f(c) = 0$

b) $f(x)$ es continua en $[0, \pi]$ por ser la resta de un polinomio y la función sen x, que son continuas.

$f(0) = -2$

$f(\pi) = \pi^2 - 2 > 0$

Por el teorema de Bolzano se tiene que existe al menos un valor $c \in (0, \pi)$ tal que $f(c) = 0$

7. Asíntotas

Piensa y calcula

Calcula mentalmente los siguientes límites:

a) $\displaystyle\lim_{x \to 2^-} \frac{1}{x - 2}$

b) $\displaystyle\lim_{x \to 2^+} \frac{1}{x - 2}$

c) $\displaystyle\lim_{x \to +\infty} \frac{1}{x}$

Solución:

a) $-\infty$ b) $+\infty$ c) 0

Aplica la teoría

Calcula las asíntotas y la posición de la gráfica respecto de las asíntotas de las siguientes funciones:

25 $f(x) = \dfrac{1}{4 - x^2}$

Solución:

Verticales: $x = -2, x = 2$

$\lim\limits_{x \to -2^-} \dfrac{1}{4 - x^2} = -\infty$ $\quad$ $\lim\limits_{x \to -2^+} \dfrac{1}{4 - x^2} = +\infty$

$\lim\limits_{x \to 2^-} \dfrac{1}{4 - x^2} = +\infty$ $\quad$ $\lim\limits_{x \to 2^+} \dfrac{1}{4 - x^2} = -\infty$

Horizontales: $y = 0$

$\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{1}{4 - x^2} = 0^-$

La gráfica está por debajo de la asíntota.

$\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{1}{4 - x^2} = 0^-$

La gráfica está por debajo de la asíntota.

Oblicuas: no tiene.

26 $f(x) = \dfrac{x^2}{x + 2}$

Solución:

Verticales: $x = -2$

$\lim\limits_{x \to -2^-} \dfrac{x^2}{x + 2} = -\infty$ $\quad$ $\lim\limits_{x \to -2^+} \dfrac{x^2}{x + 2} = +\infty$

Horizontales: no tiene.

Oblicuas: $y = x - 2$

$\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{4}{x + 2} = 0^-$

La gráfica está debajo de la asíntota.

$\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{4}{x + 2} = 0^+$

La gráfica está encima de la asíntota.

27 $f(x) = \dfrac{x}{x^2 + 1}$

Solución:

Verticales: no tiene.

Horizontales: $y = 0$

$\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{x}{x^2 + 1} = 0^-$

La gráfica está debajo de la asíntota.

$\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x}{x^2 + 1} = 0^+$

La gráfica está encima de la asíntota.

Oblicuas: no tiene.

28 $f(x) = \dfrac{x^2 - 1}{x^2}$

Solución:

Verticales: $x = 0$

$\lim\limits_{x \to 0^-} \dfrac{x^2 - 1}{x^2} = -\infty$ $\quad$ $\lim\limits_{x \to 0^+} \dfrac{x^2 - 1}{x^2} = -\infty$

Horizontales: $y = 1$

$\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{-1}{x^2} = 0^-$

La gráfica está debajo de la asíntota.

$\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{-1}{x^2} = 0^-$

La gráfica está debajo de la asíntota.

Oblicuas: no tiene.

29 $f(x) = \sqrt{x^2 - x}$

Solución:

Verticales: no tiene.

Horizontales: no tiene.

Oblicuas:

a) $y = -x + \dfrac{1}{2}$

$\lim\limits_{x \to -\infty} \left(\sqrt{x^2 - x} + x - \dfrac{1}{2}\right) = 0^-$

La gráfica está por debajo de la asíntota.

b) $y = x - \dfrac{1}{2}$

$\lim\limits_{x \to +\infty} \left(\sqrt{x^2 - x} + x - \dfrac{1}{2}\right) = 0^-$

La gráfica está por debajo de la asíntota.

30 $f(x) = \dfrac{x + 1}{\sqrt{x - 2}}$

Solución:

Verticales: $x = 2$

$\lim\limits_{x \to 2^-} \dfrac{x + 1}{\sqrt{x - 2}}$ no existe.

$\lim\limits_{x \to 2^+} \dfrac{x + 1}{\sqrt{x - 2}} = +\infty$

Horizontales: no tiene.

Oblicuas: no tiene.

Ejercicios y problemas

Preguntas tipo test

1 Sea $f(x) = \dfrac{2x}{x+1}$

El $\lim\limits_{x \to +\infty} [x^2(f(x+1) - f(x))]$ es:

☐ $+\infty$

☐ 0

☒ 2

☐ -2

2 La función $f(x) = \dfrac{(2x-1)^2}{4x^2+1}$ tiene:

☐ Una asíntota horizontal, $y = 1/2$

☐ Dos asíntotas verticales, $x = \pm 1/2$

☒ Una asíntota horizontal, $y = 1$

☐ Una asíntota oblicua, $y = x$

3 Dada la ecuación $x^3 + x - 5 = 0$, tiene en el intervalo $(1, 2)$

☐ Dos soluciones.

☒ Al menos una solución.

☐ Ninguna solución.

☐ Ninguna de las anteriores es correcta.

4 El $\lim\limits_{x \to 3} \dfrac{\sqrt{x^2-5} - 2}{x-3}$ es:

☐ 1

☐ $+\infty$

☐ 0

☒ 3/2

5 El $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(1 - \dfrac{1}{x^2}\right)^x$ es:

☐ e

☒ 1

☐ 0

☐ 1/e

6 Se sabe que el $\lim\limits_{x \to -\infty} (\sqrt{x^2 + ax + 1} + x) = 2$

El valor de a es:

☐ No se puede calcular. Queda una expresión del tipo $\dfrac{\infty}{0}$

☐ 0

☐ 4

☒ -4

7 La función

$$f(x) = x + e^{-x}$$

☐ Tiene una asíntota vertical, $x = 0$

☐ Tiene una asíntota oblicua, $y = x$, y una horizontal, $y = 0$

☒ Tiene una asíntota oblicua, $y = x$

☐ No tiene asíntotas.

8 Dada la función

$$f(x) = \begin{cases} ax^2 + 1 & \text{si } x < 2 \\ e^{2-x} + 2 & \text{si } x \geq 2 \end{cases}$$

el valor de a que hace que $f(x)$ sea continua en $x = 2$ es:

☐ $a = -\dfrac{1}{2}$

☒ $a = \dfrac{1}{2}$

☐ $a = \dfrac{1}{4}$

☐ $a = -\dfrac{1}{4}$

9 La siguiente función:

$$f(x) = \frac{|x|}{2-x}$$

tiene:

☐ Una asíntota vertical en $x = 0$

☐ Una asíntota vertical, $x = -2$, y una asíntota horizontal, $y = 2$

☐ Una asíntota vertical, $x = -2$, una horizontal, $y = -2$

☒ Una asíntota vertical, $x = 2$, y dos asíntotas horizontales, $y = 1$, $y = -1$

10 Se tienen dos programas informáticos A y B. Para procesar n datos, el programa A realiza un número de operaciones elementales no superior a $12 + n\sqrt[4]{n^3}$, mientras que el programa B ejecuta $n^2 - 2n + 10$ operaciones elementales. Cuando el número n de datos es grande, ¿qué programa procesa los n datos con menos operaciones elementales?

☒ A

☐ B

☐ Los dos iguales.

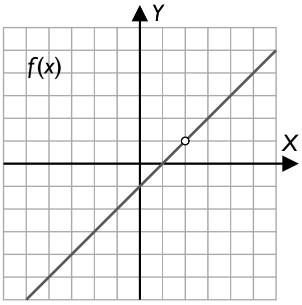
☐ Ninguna de las anteriores es correcta.

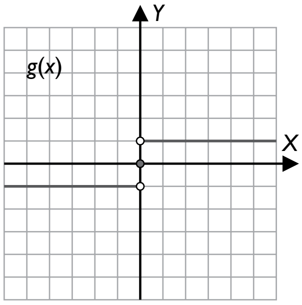
1. Límite de una función en un punto

31 Observando la gráfica en cada caso, halla el límite, y si no existe, justifícalo:

a) $\lim\limits_{x \to 2} f(x)$ siendo $f(x) = \dfrac{x^2 - 3x + 2}{x - 2}$

b) $\lim\limits_{x \to 0} g(x)$ siendo $g(x) = \begin{cases} -1 & \text{si } x < 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \\ 1 & \text{si } x > 0 \end{cases}$





Solución:

a) $\lim\limits_{x \to 2} f(x) = 1$

b) $\lim\limits_{x \to 0} f(x)$ no existe.

32 Completa la tabla para estimar el límite en cada caso:

x	2,9	2,99	2,999	→	3
$f(x) = \dfrac{1}{x-2}$	✎	✎	✎	→	✎

x	3,1	3,01	3,001	→	3
$f(x) = \dfrac{1}{x-2}$	✎	✎	✎	→	✎

a) $\lim\limits_{x \to 3^-} \dfrac{1}{x - 2}$

b) $\lim\limits_{x \to 3^+} \dfrac{1}{x - 2}$

Solución:

x	2,9	2,99	2,999	→	3
$f(x) = \dfrac{1}{x-2}$	1,111	1,01	1,001	→	1

x	3,1	3,01	3,001	→	3
$f(x) = \dfrac{1}{x-2}$	0,909	0,990	0,999	→	1

a) $\lim\limits_{x \to 3^-} \dfrac{1}{x - 2} = 1$

b) $\lim\limits_{x \to 3^+} \dfrac{1}{x - 2} = 1$

33 Demuestra que el $\lim\limits_{x \to 4} \left(\dfrac{x}{2} + 1\right) = 3$

Solución:

Hay que demostrar que para todo $\varepsilon > 0$, existe un $\delta > 0$ tal que

$|x/2 + 1 - 3| < \varepsilon$ siempre que $0 < |x - 4| < \delta$

$|x/2 + 1 - 3| = |x/2 - 2| = \dfrac{1}{2}|x - 4|$

Para cualquier $\varepsilon > 0$, se puede tomar $\delta = 2\varepsilon$ y se cumple la condición:

Siempre que $0 < |x - 4| < \delta = 2\varepsilon$, se tiene

$|x/2 + 1 - 3| = \dfrac{1}{2}|x - 4| < \dfrac{1}{2} 2\varepsilon = \varepsilon$

34 Calcula mentalmente los siguientes límites:

a) $\lim\limits_{x \to 4} (x^2 - 5x + 2)$

b) $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{x + 4}{x + 1}$

c) $\lim\limits_{x \to -6} \sqrt{2 - x}$

d) $\lim\limits_{x \to \pi} 2^{\cos x}$

e) $\lim\limits_{x \to 3} \log_2 \sqrt{4x - 8}$

f) $\lim\limits_{x \to \pi/6} \cos 2x$

Solución:

a) -2 b) 2 c) $2\sqrt{2}$ d) 1/2 e) 1 f) 1/2

2. Límite de una función en el infinito

35 Copia y completa la tabla en cada caso:

x	−10	−100	−1 000	→	$-\infty$
$f(x) = \dfrac{x}{x+1}$	✎	✎	✎	→	✎

x	10	100	1 000	→	$+\infty$
$f(x) = \dfrac{x}{x+1}$	✎	✎	✎	→	✎

a) $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{x}{x + 1}$

b) $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x}{x + 1}$

Solución:

x	−10	−100	−1 000	→	$-\infty$
$f(x) = \dfrac{x}{x+1}$	1,11111	1,01	1,001	→	1

x	10	100	1 000	→	$+\infty$
$f(x) = \dfrac{x}{x+1}$	0,9090	0,99	0,999	→	1

a) $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{x}{x + 1} = 1$

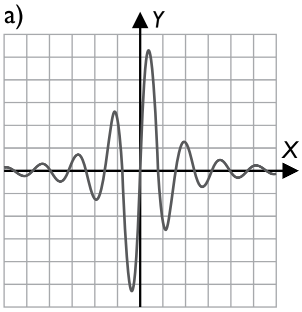
b) $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x}{x + 1} = 1$

36 Asocia cada gráfica con una función ayudándote de los límites a los que tiende la función cuando x tiende a infinito.

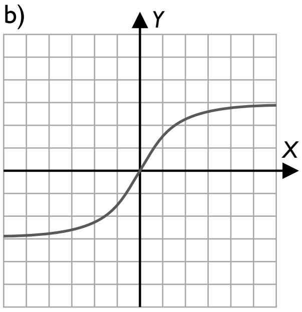
$$f(x) = \frac{x}{x^2 + 2} \qquad g(x) = \frac{3x}{\sqrt{x^2 + 3}}$$

$$h(x) = \frac{6 \text{ sen } 4x}{x^2 + 1} \qquad i(x) = 3 + \frac{x^2}{x^4 + 1}$$

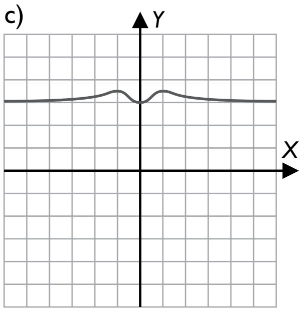
a)



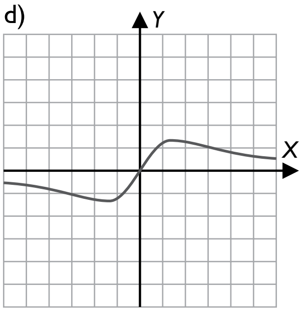
b)



c)



d)



Solución:

$f(x) = \frac{x}{x^2 + 2}$ es la gráfica d)

$g(x) = \frac{3x}{\sqrt{x^2 + 3}}$ es la gráfica b)

$h(x) = \frac{6 \text{ sen } 4x}{x^2 + 1}$ es la gráfica a)

$i(x) = 3 + \frac{x^2}{x^4 + 1}$ es la gráfica c)

37 Ordena de menor a mayor los órdenes de los siguientes infinitos:

a) $\lim\limits_{x \to +\infty} x^3, \quad \lim\limits_{x \to +\infty} x, \quad \lim\limits_{x \to +\infty} x^{2/3}$

b) $\lim\limits_{x \to +\infty} 2^x, \quad \lim\limits_{x \to +\infty} 1{,}5^x, \quad \lim\limits_{x \to +\infty} e^x$

c) $\lim\limits_{x \to +\infty} \log_2 x, \quad \lim\limits_{x \to +\infty} 3^x, \quad \lim\limits_{x \to +\infty} x^{10}$

d) $\lim\limits_{x \to +\infty} x^4, \quad \lim\limits_{x \to +\infty} \ln x, \quad \lim\limits_{x \to +\infty} 2{,}5^x$

Solución:

a) $\lim\limits_{x \to +\infty} x^{2/3} < \lim\limits_{x \to +\infty} x < \lim\limits_{x \to +\infty} x^3$

b) $\lim\limits_{x \to +\infty} 1{,}5^x < \lim\limits_{x \to +\infty} 2^x < \lim\limits_{x \to +\infty} e^x$

c) $\lim\limits_{x \to +\infty} \log_2 x < \lim\limits_{x \to +\infty} x^{10} < \lim\limits_{x \to +\infty} 3^x$

d) $\lim\limits_{x \to +\infty} \ln x < \lim\limits_{x \to +\infty} x^4 < \lim\limits_{x \to +\infty} 2{,}5^x$

38 Indica si los siguientes límites son infinitos, un número o una indeterminación:

a) $\lim\limits_{x \to -\infty} (x^4 + x^2)$ b) $\lim\limits_{x \to +\infty} (x - \sqrt{x})$

c) $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{4^x}{x + 5}$ d) $\lim\limits_{x \to +\infty} 2^{-x}\sqrt{x}$

e) $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{\log (x^2 + 1)}{x^2}$ f) $\lim\limits_{x \to -\infty} \frac{x^3 + 2}{\sqrt{x^6 + 1}}$

Solución:

a) $+\infty$ b) $[\infty - \infty]$ c) $+\infty$ d) 0   e) 0   f) -1

3. Límites de funciones polinómicas y racionales

39 Calcula los límites siguientes:

a) $\lim\limits_{x \to +\infty} (x^4 + 5x^2 - x + 2)$

b) $\lim\limits_{x \to -\infty} (-2x^3 + 5x^2 - 4x + 1)$

Solución:

a) $+\infty$ b) $+\infty$

40 Calcula los límites siguientes:

a) $\lim\limits_{x \to 2} \frac{x^3 - 4x^2 + 4x}{x^3 - 3x^2 + 4}$ b) $\lim\limits_{x \to -3} \frac{x^2 + 2x - 3}{x^2 + 4x + 3}$

c) $\lim\limits_{x \to 1} \frac{x^3 - 2x^2 + x}{x^2 + x - 2}$ d) $\lim\limits_{x \to -6} \frac{x^2 + 4x - 5}{x^3 + 10x^2 + 25x}$

Solución:

a) 2/3   b) 2   c) 0   d) $-7/6$

41 Calcula los límites siguientes:

a) $\lim\limits_{x \to 2} \frac{x}{x^2 - 2x}$ b) $\lim\limits_{x \to -1} \frac{2}{x^2 - 1}$

Solución:

a) $\lim\limits_{x \to 2^-} \frac{x}{x^2 - 2x} = \lim\limits_{x \to 2^-} \frac{1}{x - 2} = -\infty$

$\lim\limits_{x \to 2^+} \frac{x}{x^2 - 2x} = \lim\limits_{x \to 2^+} \frac{1}{x - 2} = +\infty$

b) $\lim\limits_{x \to -1^-} \frac{2}{x^2 - 1} = +\infty$

$\lim\limits_{x \to -1^+} \frac{2}{x^2 - 1} = -\infty$

42 Calcula los límites siguientes:

a) $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{2x^2 + x}{x^3 + 2}$ b) $\lim\limits_{x \to -\infty} \frac{7x^2 - x + 1}{2x^2 + 3}$

c) $\lim\limits_{x \to -\infty} \frac{x^3 + 5}{x^2 + 2x}$ d) $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{2x^3 + x - 1}{4x^3 + 3}$

Solución:

a) 0   b) 7/2   c) $-\infty$ d) 1/2

43 Calcula los límites siguientes:

a) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{x+1}{x+2}-x\right)$ b) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{2x^3-4}{x^2+1}-2x\right)$

c) $\lim\limits_{x\to0}\left(\dfrac{1}{2x}-\dfrac{3}{x}\right)$ d) $\lim\limits_{x\to2}\left(\dfrac{x+1}{x-2}-\dfrac{x^2+8}{x^2-4}\right)$

Solución:

a) $-\infty$

b) 0

c) $\lim\limits_{x\to0^-}\left(\dfrac{1}{2x}-\dfrac{3}{x}\right)=+\infty$

$\lim\limits_{x\to0^+}\left(\dfrac{1}{2x}-\dfrac{3}{x}\right)=-\infty$

d) 3/4

4. Límites de funciones irracionales y potenciales-exponenciales

44 Calcula los límites siguientes:

a) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(2x-\sqrt{4x^2-1}\right)$ b) $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(x+\sqrt{x^2-x}\right)$

Solución:

a) 0 b) 1/2

45 Calcula los límites siguientes:

a) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sqrt{5+x}-\sqrt{5}}{2}$ b) $\lim\limits_{x\to2}\dfrac{x-2}{\sqrt{x+7}-3}$

Solución:

a) $\dfrac{\sqrt{5}}{10}$ b) 6

46 Calcula los límites siguientes:

a) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{x-1}{x+3}\right)^{2x+5}$

b) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{2x^2+3x-1}{2x^2+1}\right)^{3x+5}$

c) $\lim\limits_{x\to2}\left(\dfrac{2x-1}{x+1}\right)^{\frac{2x}{x-2}}$

Solución:

a) e^{-8} b) $e^{9/2}$ c) $e^{4/3}$

5. Continuidad

47 Se considera la función

$$f(x)=\begin{cases}x^2+x & \text{si } x>0\\ e^{-x}-1 & \text{si } x\le 0\end{cases}$$

Razona si es continua en $x=0$

Solución:

$f(0)=0$

$\lim\limits_{x\to0^-}f(x)=\lim\limits_{x\to0^-}(e^{-x}-1)=0$

$\lim\limits_{x\to0^+}f(x)=\lim\limits_{x\to0^+}(x^2+x)=0$

$\lim\limits_{x\to0}f(x)=0$

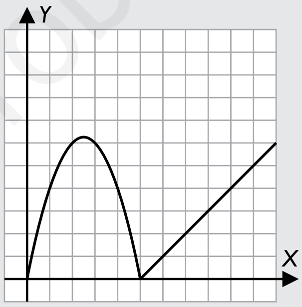
$f(0)=\lim\limits_{x\to0}f(x)=0$

$f(x)$ es continua en $x=0$

48 Representa y estudia la continuidad de la siguiente función:

$$f(x)=\begin{cases}-x^2+5x & \text{si } 0\le x<5\\ x-5 & \text{si } 5\le x\le 10\end{cases}$$

Solución:



Como la función está definida por dos funciones polinómicas que son continuas, el único punto conflictivo puede ser para el valor $x=5$

$f(5)=0$

$\lim\limits_{x\to5^-}f(x)=\lim\limits_{x\to5^-}(-x^2+5x)=0$

$\lim\limits_{x\to5^+}f(x)=\lim\limits_{x\to5^+}(x-5)=0$

$f(5)=\lim\limits_{x\to5}f(x)=0\Rightarrow f(x)$ es continua en $x=5$

49 Dada la función $f(x)$:

$$f(x)=\frac{x^2-4x}{x-4}$$

el segundo miembro de la igualdad carece de sentido cuando $x=4$. ¿Cómo elegir el valor de $f(4)$ para que la función $f(x)$ sea continua en ese punto?

Solución:

$f(4)=\lim\limits_{x\to4}\dfrac{x^2-4x}{x-4}=\lim\limits_{x\to4}\dfrac{x\cancel{(x-4)}}{\cancel{x-4}}=\lim\limits_{x\to4}x=4$

50 Estudia la continuidad de la función:

$$f(x)=\frac{\sqrt{x}-2}{x-4}$$

Solución:

La función está definida para $[0,4)<(4,+\infty)$

Se estudian los valores $x=4$ y $x=0$

- En $x = 4$

  $f(4)$ no existe.

  $\lim\limits_{x \to 4} \dfrac{\sqrt{x} - 2}{x - 4} = 1/4$

  Tiene una discontinuidad evitable que se evita haciendo $f(4) = 1/4$

- En $x = 0$

  $f(0) = 1/2$

  $\lim\limits_{x \to 0^-} f(x)$ no existe.

  $\lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = 1/2$

  Es continua por la derecha.

  Hay una discontinuidad de 2.ª especie en $x = 0$

51 Se considera la función:

$$f(x) = \begin{cases} 2x + 5 & \text{si } x \le 1 \\ x^2 + k & \text{si } x > 1 \end{cases}$$

Determina el valor de k para que la función sea continua.

Solución:

Como está definida por funciones polinómicas, el punto que puede ser conflictivo se da para el valor $x = 1$

$f(1) = 7$

$\lim\limits_{x \to 1^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 1^-} (2x + 5) = 7$

$\lim\limits_{x \to 1^+} f(x) = \lim\limits_{x \to 1^+} (x^2 + k) = 1 + k$

Como para ser continua

$f(1) = \lim\limits_{x \to 1} f(x)$

se tiene:

$1 + k = 7 \Rightarrow k = 6$

6. Propiedades de la continuidad

52 Estudia la continuidad de las siguientes funciones en los intervalos cerrados correspondientes:

a) $f(x) = \sqrt{x + 3}$ en $[-3, 0]$

b) $g(x) = \dfrac{x^2 - 3x + 3}{x - 1}$ en $[1, 2]$

Solución:

a) $f(x)$ es una función irracional que es continua en su dominio $[-3, +\infty)$. Como el intervalo $(-3, 0)$ está incluido en su dominio, la función es continua en él.

Se estudian los extremos:

En $x = -3$

$f(-3) = 0$

$\lim\limits_{x \to -3^+} \sqrt{x + 3} = 0$

La función es continua por la derecha en $x = -3$

En $x = 0$

Como $0 \in [-3, +\infty)$, la función es continua en $x = 0$ y, por tanto, es continua por la izquierda en $x = 0$

La función es continua en el intervalo cerrado $[-3, 0]$

b) La función es racional y es continua en su dominio $\mathbb{R} - \{1\}$. Como el intervalo $(1, 2)$ está en el dominio, la función es continua. Se estudian los extremos:

En $x = 1$

$f(1)$ no existe.

La función no es continua por la derecha en $x = 1$

La función no es continua en el intervalo cerrado $[1, 2]$

53 Halla los intervalos en los que las siguientes funciones son continuas:

a) $f(x) = \dfrac{2x - 1}{x^2}$ b) $f(x) = \dfrac{2x}{\sqrt{x^2 + 1}}$

Solución:

a) Es una función racional que es continua en su dominio. El único punto donde no existe la función es $x = 0$

Luego es continua en $(-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$

b) Es el cociente de un polinomio y una función irracional, que son continuas en su dominio. Como $\sqrt{x^2 + 1} \neq 0$ ya que $x^2 + 1 \ge 0$ para todo x, la función cociente es continua en $\mathbb{R} = (-\infty, +\infty)$

54 Prueba que la función $f(x) = 2 \cos x - x$ tiene un cero en el intervalo $[0, \pi]$

Solución:

Se prueban las hipótesis del teorema de Bolzano:

La función es continua en $(0, \pi)$

$f(0) = 2 > 0$

$f(\pi) = -2 - \pi < 0$

Por el teorema de Bolzano, existe al menos un valor $c \in (0, \pi)$ tal que $f(c) = 0$

55 Dada la función

$$f(x) = \frac{x^2 + x}{x - 1}$$

Demuestra que existe un valor $c \in (2, 5)$ tal que $f(c) = 20/3$

Solución:

Se prueban las hipótesis del teorema de los valores intermedios:

$f(x)$ es continua en $(2, 5)$

Observa que el único valor de x en el que la función no es continua no pertenece al intervalo.

$f(2) = 6$

$f(5) = 30/4 = 15/2$

Como $6 < 20/3 < 15/2$, por el teorema de los valores intermedios existe un $c \in (2, 5)$ tal que $f(c) = 20/3$

7. Asíntotas

56 Calcula las asíntotas de las siguientes funciones y estudia la posición de la curva respecto de ellas:

a) $f(x) = \dfrac{2x^2}{x-1}$

b) $f(x) = \dfrac{x+1}{x^2+8}$

c) $f(x) = \dfrac{x^2+3}{x^2-4}$

d) $f(x) = \dfrac{x^2}{x^2+x-2}$

Solución:

a) Verticales: $x = 1$

$$\lim_{x \to 1^-} \frac{2x^2}{x-1} = -\infty$$

$$\lim_{x \to 1^+} \frac{2x^2}{x-1} = +\infty$$

Horizontales: no tiene.

Oblicuas: $y = 2x + 2$

$$\lim_{x \to -\infty} \frac{2}{x-1} = 0^-$$

La gráfica está por debajo de la asíntota.

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{2}{x-1} = 0^+$$

La gráfica está por encima de la asíntota.

b) Verticales: no tiene.

Horizontales: $y = 0$

$$\lim_{x \to -\infty} \frac{x+1}{x^2+8} = 0^-$$

La gráfica está por debajo de la asíntota.

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{x+1}{x^2+8} = 0^+$$

La gráfica está por encima de la asíntota.

Oblicuas: no tiene.

c) Verticales: $x = -2$, $x = 2$

$$\lim_{x \to -2^-} \frac{x^2+3}{x^2-4} = +\infty$$

$$\lim_{x \to -2^+} \frac{x^2+3}{x^2-4} = -\infty$$

$$\lim_{x \to 2^-} \frac{x^2+3}{x^2-4} = -\infty$$

$$\lim_{x \to 2^+} \frac{x^2+3}{x^2-4} = +\infty$$

Horizontales: $y = 1$

$$\lim_{x \to -\infty} \frac{7}{x^2-4} = 0^+$$

La gráfica está por encima de la asíntota.

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{7}{x^2-4} = 0^+$$

La gráfica está por encima de la asíntota.

Oblicuas: no tiene.

d) Verticales: $x = -2$, $x = 1$

$$\lim_{x \to -2^-} \frac{x^2}{x^2+x-2} = +\infty$$

$$\lim_{x \to -2^+} \frac{x^2}{x^2+x-2} = -\infty$$

$$\lim_{x \to 1^-} \frac{x^2}{x^2+x-2} = -\infty$$

$$\lim_{x \to 1^+} \frac{x^2}{x^2+x-2} = +\infty$$

Horizontales: $y = 1$

$$\lim_{x \to -\infty} \frac{-x+2}{x^2+x-2} = 0^+$$

La gráfica está por encima de la asíntota.

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{-x+2}{x^2+x-2} = 0^-$$

La gráfica está por debajo de la asíntota.

Oblicuas: no tiene.

57 Calcula las asíntotas, y la posición de la curva respecto de ellas de la función:

a) $f(x) = \dfrac{2}{\sqrt{x^2+4}}$

b) $f(x) = \sqrt{x^2+2}$

Solución:

a) Verticales: no tiene.

Horizontales: $y = 0$

$$\lim_{x \to -\infty} \frac{2}{\sqrt{x^2+4}} = 0^+$$

La gráfica está por encima de la asíntota.

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{2}{\sqrt{x^2+4}} = 0^+$$

La gráfica está por encima de la asíntota.

Oblicuas: no tiene.

b) Verticales: no tiene.

Horizontales: no tiene.

Oblicuas:

$y = -x$

$$\lim_{x \to -\infty} (\sqrt{x^2-1} + x) = 0^+$$

La gráfica está por encima de la asíntota.

$y = x$

$$\lim_{x \to +\infty} (\sqrt{x^2-1} - x) = 0^+$$

La gráfica está por encima de la asíntota.

Para ampliar

58 Calcula:

a) $\lim\limits_{x\to+\infty} [\ln(x+1) - \ln x]$

b) $\lim\limits_{x\to+\infty} x[\ln(x+1) - \ln x]$

Solución:

a) $\lim\limits_{x\to+\infty} [\ln x(x+1) - \ln x] = \lim\limits_{x\to+\infty} \ln \dfrac{x+1}{x} = \ln 1 = 0$

b) $\lim\limits_{x\to+\infty} x[\ln x(x+1) - \ln x] = \lim\limits_{x\to+\infty} x \ln \dfrac{x+1}{x} =$

$= \lim\limits_{x\to+\infty} \ln\left(1 + \dfrac{1}{x}\right)^x = \ln e = 1$

59 Calcula:

a) $\lim\limits_{x\to+\infty} x^2 e^{-3x}$

b) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1 - \sqrt{1 - x^2}}{x^2}$

c) $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(\dfrac{x-1}{x+1}\right)^x$

d) $\lim\limits_{x\to 3} \dfrac{x^2 - 9}{\sqrt{x} - \sqrt{3}}$

Solución:

a) 0 b) $1/2$

c) e^{-2} d) $12 \cdot \sqrt{3}$

60 Estudia la continuidad de la función:

$$f(x) = \begin{cases} 1 - x^2 & \text{si } x \le 1 \\ 3x^2 - 12x + 9 & \text{si } 1 < x \le 3 \\ -2x^2 + 16x - 30 & \text{si } x > 3 \end{cases}$$

Solución:

• En $x = 1$

$f(1) = 0$

$\lim\limits_{x\to 1^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 1^-} (1 - x^2) = 0$

$\lim\limits_{x\to 1^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 1^+} (3x^2 - 12x + 9) = 0$

$\lim\limits_{x\to 1} f(x) = f(1) \Rightarrow$ La función es continua en $x = 1$

• En $x = 3$

$f(3) = 0$

$\lim\limits_{x\to 3^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 3^-} (3x^2 - 12x + 9) = 0$

$\lim\limits_{x\to 3^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 3^+} (-2x^2 + 16x - 30) = 0$

$\lim\limits_{x\to 3} f(x) = f(3) \Rightarrow$ La función es continua en $x = 3$

La función es continua en $\mathbb{R}$

61 Estudia la continuidad de la función:

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + 2x + 1 & \text{si } x < -1 \\ 2x + 2 & \text{si } -1 \le x \le 2 \\ -x^2 + 8x & \text{si } x > 2 \end{cases}$$

Solución:

• En $x = -1$

$f(-1) = 0$

$\lim\limits_{x\to -1^-} f(x) = \lim\limits_{x\to -1^-} (x^2 + 2x + 1) = 0$

$\lim\limits_{x\to -1^+} f(x) = \lim\limits_{x\to -1^+} (2x + 2) = 0$

$\lim\limits_{x\to -1} f(x) = f(-1) \Rightarrow$ La función es continua en $x = -1$

• En $x = 2$

$f(2) = 6$

$\lim\limits_{x\to 2^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 2^-} (2x + 2) = 6$

$f(x) = \dfrac{f(x)}{x} (-x^2 + 8) = 12$

$\lim\limits_{x\to 2} f(x) \ne f(2) \Rightarrow$ La función no es continua en $x = 2$

Tiene una discontinuidad de 1.ª especie de salto finito.

62 Estudia la continuidad de $f(x)$:

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + 3 & \text{si } x \le 1 \\ 4 & \text{si } 1 < x \le 4 \\ (x-4)^2 + 2 & \text{si } x > 4 \end{cases}$$

Solución:

• En $x = 1$

$f(1) = 4$

$\lim\limits_{x\to 1^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 1^-} (x^2 + 3) = 4$

$\lim\limits_{x\to 1^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 1^+} 4 = 4$

$\lim\limits_{x\to 1} f(x) = f(1) \Rightarrow$ La función es continua en $x = 1$

• En $x = 4$

$f(4) = 4$

$\lim\limits_{x\to 4^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 4^-} 4 = 4$

$\lim\limits_{x\to 4^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 4^+} ((x-4)^2 + 2) = 2$

$\lim\limits_{x\to 4} f(x) \ne f(4) \Rightarrow$ La función no es continua en $x = 4$

Tiene una discontinuidad de 1.ª especie de salto finito.

63 Estudia la continuidad de la función:

$$f(x) = \begin{cases} \sqrt[3]{x - 2} & \text{si } x \ge 2 \\ x(x - 2) & \text{si } x < 2 \end{cases}$$

Solución:

En $x = 2$

$f(2) = 0$

$\lim_{x \to 2^-} f(x) = \lim_{x \to 2^-} x(x - 2) = 0$

$\lim_{x \to 2^+} f(x) = \lim_{x \to 2^+} \sqrt[3]{x - 2} = 0$

$\lim_{x \to 2} f(x) = f(2) \Rightarrow$ La función es continua en $x = 2$ y por consiguiente es continua en $\mathbb{R}$

64 Estudia la continuidad de $f(x)$:

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x + 2}{x - 1} & \text{si } x \le 2 \\ \dfrac{3x^2 - 2x}{x + 2} & \text{si } x > 2 \end{cases}$$

Solución:

La función está definida mediante dos funciones racionales. Además de estudiar el valor $x = 2$, hay que estudiar el valor $x = 1$, para el que no está definida la función $\dfrac{x + 2}{x - 1}$

- En $x = 1$

  $f(1)$ no existe.

  $\lim_{x \to 1^-} f(x) = \lim_{x \to 1^-} \dfrac{x + 2}{x - 1} = -\infty$

  $\lim_{x \to 1^+} f(x) = \lim_{x \to 1^+} \dfrac{x + 2}{x - 1} = +\infty$

  La función es discontinua en $x = 1$, donde tiene una discontinuidad de 1.ª especie de salto infinito.

- En $x = 2$

  $f(2) = 4$

  $\lim_{x \to 2^-} f(x) = \lim_{x \to 2^-} \dfrac{x + 2}{x - 1} = 4$

  $\lim_{x \to 2^+} f(x) = \lim_{x \to 2^+} \dfrac{3x^2 - 2x}{x + 2} = 2$

  La función es discontinua en $x = 2$, donde tiene una discontinuidad de 1.ª especie de salto finito.

65 Se considera la función:

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2 - 25}{x - 5} & \text{si } x \ne 5 \\ 0 & \text{si } x = 5 \end{cases}$$

a) Demuestra que $f(x)$ no es continua en $x = 5$

b) ¿Existe una función continua que coincida con $f(x)$ para todos los valores $x \ne 5$? En caso afirmativo, da su expresión.

Solución:

a) $f(5) = 0$

$$\lim_{x \to 5} f(x) = \lim_{x \to 5} \frac{x^2 - 25}{x - 5} = \lim_{x \to 5} \frac{\cancel{(x - 5)}(x + 5)}{\cancel{x - 5}} = $$
$$= \lim_{x \to 5} (x + 5) = 10$$

En $x = 5$ hay una discontinuidad evitable. Se evita definiendo $f(5) = 10$

b) $g(x) = \begin{cases} f(x) & \text{si } x \ne 5 \\ 10 & \text{si } x = 5 \end{cases}$

66 Sea $f(x)$ una función continua en $[-1, 5]$ de modo que $f(-1) < 0$ y $f(5) = 7$. Responde de forma razonada si la función $g(x) = f(x) - 5$ tiene al menos un cero en $(-1, 5)$

Solución:

La función $g(x)$ cumple con las hipótesis del teorema de Bolzano:

$g(x)$ es continua en $[-1, 5]$ por ser continua $f(x)$

$g(-1) = f(-1) - 5 < 0$

$g(5) = f(5) - 5 = 7 - 5 = 2 > 0$

Luego existe al menos un $c \in (-1, 5)$ tal que $g(c) = 0$

67 Sea la función $f(x) = 4x^2 - 4x + 1$. Utiliza el teorema de Bolzano y justifica si existe un $c \in (0, 1)$ que verifique que $f(c) = 0$. En caso afirmativo calcula dicho valor.

Solución:

$f(x)$ es continua en $[0, 1]$

$f(0) = 1 > 0$

$f(1) = 1 > 0$

No se cumplen las condiciones del teorema de Bolzano, pero no podemos concluir que no exista un valor $c \in [0, 1]$ tal que $f(c) = 0$. Si se resuelve la ecuación $f(x) = 0$ se obtienen las raíces $x_1 = x_2 = 1/2 \in (0, 1)$

68 Calcula las asíntotas de la función y estudia la posición de la gráfica respecto de ellas.

$$f(x) = \frac{3x^2 - 3x}{x + 2}$$

Solución:

Verticales: $x = -2$

$\lim_{x \to 2^-} \dfrac{3x^2 - 3x}{x + 2} = -\infty$

$\lim_{x \to 2^+} \dfrac{3x^2 - 3x}{x + 2} = +\infty$

Horizontales: no tiene.

Oblicuas:

$\dfrac{3x^2 - 3x}{x + 2} = 3x - 9 + \dfrac{18}{x + 2}$

$y = 3x - 9$

$\lim_{x \to -\infty} \dfrac{18}{x + 2} = 0^-$

La gráfica está por debajo de la asíntota.

$\lim_{x \to +\infty} \dfrac{18}{x + 2} = 0^+$

La gráfica está por encima de la asíntota.

Problemas

69 Se considera la función:

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^3 + 3x + 1}{x} & \text{si } x \geq -1 \\ \dfrac{2x}{x - 1} & \text{si } x < -1 \end{cases}$$

a) Estudia la continuidad de f

b) Halla las asíntotas de la gráfica de f

Solución:

a) La función está definida mediante dos funciones racionales. Además de estudiar el valor $x = -1$, hay que estudiar el valor $x = 0$, para el que no está definida la función $\dfrac{x^3 + 3x + 1}{x}$

• En $x = -1$

$f(-1) = 3$

$$\lim_{x \to -1^-} f(x) = \lim_{x \to -1^-} \frac{2x}{x - 1} = 1$$

$$\lim_{x \to -1^+} f(x) = \lim_{x \to -1^+} \frac{x^3 + 3x + 1}{x} = 3$$

La función es discontinua en $x = -1$, donde tiene una discontinuidad de 1.ª especie de salto finito.

• En $x = 0$

$f(0)$ = no existe.

$$\lim_{x \to 0^-} f(x) = \lim_{x \to 0^-} \frac{x^3 + 3x + 1}{x} = -\infty$$

$$\lim_{x \to 0^+} f(x) = \lim_{x \to 0^+} \frac{x^3 + 3x + 1}{x} = +\infty$$

La función es discontinua en $x = 0$, donde tiene una discontinuidad de 1.ª especie de salto infinito.

b) La función tiene una asíntota vertical en $x = 0$

Tiene una asíntota horizontal en $y = 2$

70 Dada la siguiente función:

$$f(x) = \begin{cases} -2x - a & \text{si } x \leq 0 \\ x - 1 & \text{si } 0 < x \leq 2 \\ bx - 5 & \text{si } x > 2 \end{cases}$$

Determina el valor de a y b para que la función $f(x)$ sea continua.

Solución:

Hay que estudiar los valores $x = 0$ y $x = 2$

$f(0) = -a$

$$\lim_{x \to 0^-} f(x) = \lim_{x \to 0^-} (-2x - a) = -a$$

$$\lim_{x \to 0^+} f(x) = \lim_{x \to 0^+} (x - 1) = -1$$

Se tiene que cumplir:

$$\lim_{x \to 0^-} f(x) = \lim_{x \to 0^+} f(x) = f(0)$$

$-1 = -a \Rightarrow a = 1$

En $x = 2$

$f(2) = 1$

$$\lim_{x \to 2^-} f(x) = \lim_{x \to 2^-} (x - 1) = 1$$

$$\lim_{x \to 2^+} f(x) = \lim_{x \to 2^+} (bx - 5) = 2b - 5$$

Se tiene que cumplir:

$$\lim_{x \to 2^-} f(x) = \lim_{x \to 2^+} f(x) = f(2)$$

$1 = 2b - 5 \Rightarrow 2b = 6 \Rightarrow b = 3$

71 Determina el valor de a y b para que la función $f(x)$ sea continua.

$$f(x) = \begin{cases} 5 + 2\text{sen } x & \text{si } x \leq 0 \\ -x^2 + ax + b & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

Solución:

La función está definida por dos funciones que son continuas. El punto que hay que estudiar es $x = 0$

$f(0) = 5$

$$\lim_{x \to 0^-} f(x) = \lim_{x \to 0^-} (5 + 2\text{ sen } x) = 5$$

$$\lim_{x \to 0^+} f(x) = \lim_{x \to 0^+} (-x^2 + ax + b) = b$$

Se tiene que cumplir: $\lim_{x \to 0^-} f(x) = \lim_{x \to 0^+} f(x) = f(0)$

$b = 5$

La función será continua para $b = 5$ y cualquier valor de a

72 Se considera la función

$$f(x) = \begin{cases} a^x - 6 & \text{si } x < 2 \\ |x - 5| & \text{si } 2 \leq x < 10 \end{cases}$$

Determina el valor de a sabiendo que f es continua y que $a > 0$

Solución:

$f(2) = 3$

$$\lim_{x \to 2^-} f(x) = \lim_{x \to 2^-} (a^x - 6) = a^2 - 6$$

$$\lim_{x \to 2^+} f(x) = \lim_{x \to 2^+} |x - 5| = 3$$

Se tiene que cumplir:

$$\lim_{x \to 2^-} f(x) = \lim_{x \to 2^+} f(x) = f(2)$$

$a^2 - 6 = 3 \Rightarrow a^2 = 9 \Rightarrow a = \pm 3$

Como $a > 0 \Rightarrow a = 3$

73 Se considera la función

$$f(x) = \begin{cases} 3x + 5a & \text{si } x < 0 \\ bx^2 + 3 & \text{si } 0 \leq x < 2 \\ x^2 - 4 & \text{si } 2 \leq x \end{cases}$$

Estudia la continuidad de $f(x)$ según los valores de las constantes a y b

Solución:

En $x = 0$

$f(0) = 3$

$\lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^-} (3x + 5a) = 5a$

$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+} (bx^2 + 3) = 3$

Se tiene que cumplir:

$\lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^+} f(x) = f(0)$

$5a = 3 \Rightarrow a = 3/5$

En $x = 2$

$f(2) = 0$

$\lim_{x\to 2^-} f(x) = \lim_{x\to 2^-} (bx^2 + 3) = 4b + 3$

$\lim_{x\to 2^+} f(x) = \lim_{x\to 2^+} (x^2 - 4) = 0$

Se tiene que cumplir:

$\lim_{x\to 2^-} f(x) = \lim_{x\to 2^+} f(x) = f(2)$

$4b + 3 = 0 \Rightarrow b = -3/4$

74 Estudia la continuidad de $f(x)$:

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{1 + e^{1/x}} & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

Solución:

La función está definida por funciones continuas en sus dominios. El valor que hay que estudiar es $x = 0$

$f(0) = 0$

$\lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^-} \dfrac{1}{1 + e^{1/x}} = \dfrac{1}{1 + 0} = 1$

$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+} \dfrac{1}{1 + e^{1/x}} = \dfrac{1}{\infty} = 0$

La función tiene una discontinuidad de 1.ª especie de salto finito en $x = 0$

75 Estudia la continuidad de $f(x)$:

$$f(x) = \begin{cases} e^x & \text{si } x < -1 \\ \dfrac{4}{x + 3} & \text{si } -1 \leq x \leq 1 \\ 1 + \ln x & \text{si } x > 1 \end{cases}$$

Solución:

La función está definida por funciones continuas en sus dominios. Los valores que se estudian son $x = -1$; $x = 1$

• En $x = -1$

$f(-1) = 2$

$\lim_{x\to -1^-} f(x) = \lim_{x\to -1^-} e^x = 1/e$

$\lim_{x\to -1^+} f(x) = \lim_{x\to -1^+} \dfrac{4}{x + 3} = 2$

La función tiene una discontinuidad de 1.ª especie de salto finito en $x = -1$

• En $x = 1$

$f(1) = 1$

$\lim_{x\to 1^-} f(x) = \lim_{x\to 1^-} \dfrac{4}{x + 3} = 1$

$\lim_{x\to 1^+} f(x) = \lim_{x\to 1^+} (1 + \ln x) = 1$

La función es continua en $x = 1$

76 Se considera la función:

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + ax + a - 1 & \text{si } x \leq 2 \\ \ln (x - 1) & \text{si } x > 2 \end{cases}$$

Estudia la continuidad según el valor del parámetro a

Solución:

$f(2) = 3a + 3$

$\lim_{x\to 2^-} f(x) = \lim_{x\to 2^-} (x^2 + ax + a - 1) = 3a + 3$

$\lim_{x\to 2^+} f(x) = \lim_{x\to 2^+} \ln (x - 1) = 0$

Se tiene que cumplir:

$\lim_{x\to 2^-} f(x) = \lim_{x\to 2^+} f(x) = f(2)$

$3a + 3 = 0 \Rightarrow a = -1$

77 Se considera la función:

$$f(x) = \begin{cases} ax^2 - 2 & \text{si } x \leq -2 \\ a & \text{si } -2 < x \leq 2 \\ x & \text{si } x > 2 \end{cases}$$

a) Calcula el valor de a para que $f(x)$ sea continua en $x = -2$

b) Para el valor de a hallado, ¿es continua la función en $x = 2$?

Solución:

a) En $x = -2$

$f(-2) = 4a - 2$

$\lim_{x\to -2^-} f(x) = \lim_{x\to -2^-} (ax^2 - 2) = 4a - 2$

$\lim_{x\to -2^+} f(x) = \lim_{x\to -2^+} a = a$

Se tiene que cumplir:

$\lim_{x\to -2^-} f(x) = \lim_{x\to -2^+} f(x) = f(-2)$

$4a - 2 = a \Rightarrow a = 2/3$

b) Para $a = 2/3$

$f(2) = 2/3$

$\lim_{x\to 2^-} f(x) = \lim_{x\to 2^-} 2/3 = 2/3$

$\lim_{x\to 2^+} f(x) = \lim_{x\to 2^+} x = 2$

La función tiene una discontinuidad de 1.ª especie de salto finito.

78 Se ha estudiado la evolución de la ganancia y en céntimos de euro en cada instante desde un tiempo inicial, hasta pasados 5 años, por la fabricación de un determinado producto, y se ha modelizado funcionalmente dicha evolución así:

- Durante el primer año: $y = 2t^2$
- Durante el segundo y tercer año: $y = 4t - 2$
- Durante el resto: $y = e^{3-t}$

Explica la continuidad de la función.

Solución:

Se escribe la función:

$$f(t) = \begin{cases} 2t^2 & \text{si } 0 \le t < 1 \\ 4t - 2 & \text{si } 1 \le t < 3 \\ e^{3-t} & \text{si } t \ge 3 \end{cases}$$

Se estudian los valores $t = 1$ y $t = 3$

En $t = 1$

$f(1) = 2$

$\lim\limits_{x \to 1^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 1^-} 2t^2 = 2$

$\lim\limits_{x \to 1^+} f(x) = \lim\limits_{x \to 1^+} (4t - 2) = 2$

La función es continua en $t = 1$

En $t = 3$

$f(3) = 1$

$\lim\limits_{x \to 3^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 3^-} (4t - 2) = 10$

$\lim\limits_{x \to 3^+} f(x) = \lim\limits_{x \to 3^+} e^{3-t} = 1$

La función no es continua en $t = 3$. Tiene una discontinuidad de 1.ª especie de salto finito.

79 Un comerciante vende un determinado producto. Por cada unidad de producto cobra la cantidad de 5 €. No obstante, si se le encargan más de 10 unidades, decide disminuir el precio por unidad, y por cada x unidades cobra la siguiente cantidad:

$$c(x) = \begin{cases} 5x & \text{si } 0 < x \le 10 \\ \sqrt{ax^2 + 500} & \text{si } x > 10 \end{cases}$$

a) Halla a para que el precio varíe de forma continua al variar el número de unidades que se compran.

b) ¿A cuánto tiende el precio de una unidad cuando se compran «muchísimas» unidades?

Solución:

a) Se estudia en $x = 10$

$f(10) = 50$

$\lim\limits_{x \to 10^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 10^-} 5x = 50$

$\lim\limits_{x \to 10^+} f(x) = \lim\limits_{x \to 10^+} \sqrt{ax^2 + 500} = \sqrt{100a + 500}$

Se tiene que cumplir:

$\lim\limits_{x \to 10^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 10^+} f(x) = f(10)$

$\sqrt{100a + 500} = 50 \Rightarrow a = 20$

b) El precio por unidad es:

$$\frac{c(x)}{x}$$

Se calcula $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{\sqrt{20x^2 + 500}}{x} = \sqrt{20}$

Para profundizar

80 Se considera la ecuación:

$$x^3 + mx^2 - 2x = 1$$

Utilizando el teorema de Bolzano:

a) Prueba que si $m > 2$ la ecuación admite alguna solución menor que 1

b) Prueba que si $m < 2$ la ecuación admite alguna solución mayor que 1

Solución:

a) Se considera la función:

$f(x) = x^3 + mx^2 - 2x - 1$

Como la raíz debe ser menor que 1, se toma:

$f(1) = 1 + m - 2 - 1 = m - 2 > 0$ si $m > 2$

Si se toma el intervalo $[0, 1]$, $f(x)$ cumple las hipótesis del teorema de Bolzano.

$f(x)$ es continua en $[0, 1]$

$f(0) = -1 < 0$

$f(1) = m - 2 > 0$ si $m > 2$

Luego existe al menos un $c \in (0, 1)$ tal que $f(c) = 0$

b) Razonando de la misma forma en el intervalo $[1, 2]$:

$f(x)$ es continua en $[1, 2]$

$f(1) = m - 2 < 0$ si $m < 2$

$f(2) = 8 + 4m - 4 - 1 = -3 + 4m$

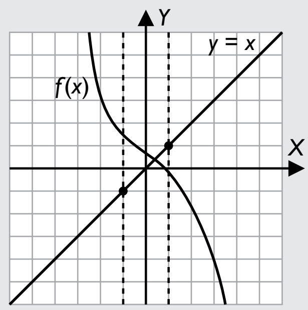
$3 + 4m > 0 \Rightarrow m > -3/4$

Siempre que $-3/4 < m < 2 \Rightarrow f(2) > 0$

Se cumplirían las hipótesis del teorema de Bolzano y se puede garantizar que existe al menos un $c \in [1, 2]$ tal que $f(c) = 0$

81 Si $f(x)$ es una función continua para todo valor de x, y se sabe que $f(-1) \ge -1$ y $f(1) \le 1$, demuestra que existe un punto $a \in [-1, 1]$ con la propiedad de que $f(a) = a$

Solución:



Se trata de ver si la función $f(x)$ y la función $y = x$ tienen algún punto en común.

Se construye la función $g(x) = f(x) - x$

$g(x)$ es continua por serlo $f(x)$

$g(-1) = f(-1) + 1 \geq -1 + 1 = 0$

$g(1) = f(1) - 1 \leq 1 - 1 = 0$

Luego por el teorema de Bolzano existe al menos un $a \in [-1, 1]$ tal que $g(a) = 0$, es decir:

$g(a) = f(a) - a \Rightarrow f(a) = a$

82 Se sabe que una función $g(x)$ es continua en el intervalo $[0, 1]$ y que para $0 < x \leq 1$ es $g(x) = \dfrac{f(x)}{x}$, donde $f(x) = |x^3 - x|$. ¿Cuánto vale $g(0)$?

Solución:

Como $g(x)$ es continua en [0, 1], se tiene que:

$$g(0) = \lim_{x \to 0^+} \frac{f(x)}{x}$$

Como $f(x) = |x^3 - x|$, $x \in (0, 1)$

$x^3 < x \Rightarrow f(x) = x - x^3 \Rightarrow g(x) = 1 - x^2$

$$g(0) = \lim_{x \to 0^+} (1 - x^2) = 1$$

83 Supongamos que nos dan la función:

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{4}(x - 4) & \text{si } 0 \leq x \leq \dfrac{1}{2} \\ e^{-x^2} & \text{si } \dfrac{1}{2} < x \leq 1 \end{cases}$$

Esta función está definida en el intervalo [0, 1], $f(0) = -1 < 0$ y $f(1) = e^{-1} > 0$, pero no existe ningún punto $c \in (0, 1)$ tal que $f(c) = 0$

¿Contradice el teorema de Bolzano? Razona la respuesta.

Solución:

La función no cumple con la hipótesis de ser continua en el intervalo [0, 1]

En $x = 1/2$, se tiene:

$f(1/2) = -7/8$

$$\lim_{x \to 1/2^-} f(x) = \lim_{x \to 1/2^-} \frac{1}{4}(x - 4) = -7/8$$

$$\lim_{x \to 1/2^+} f(x) = \lim_{x \to 1/2^+} e^{-1/4}$$

La función tiene una discontinuidad de 1.ª especie de salto finito en $x = 1/2$

No se contradice el teorema de Bolzano.

84 Estudia la continuidad de la función $f(x) = \dfrac{|x|}{x}$ en el intervalo $[-1, 1]$

¿Se cumple el teorema de Bolzano?

Solución:

$$f(x) = \frac{|x|}{x} = \begin{cases} -1 & \text{si } -1 \leq x < 0 \\ 1 & \text{si } 0 < x \leq 1 \end{cases}$$

$f(x)$ es discontinua en $x = 0$ porque no existe $f(0)$, luego no se puede aplicar el teorema de Bolzano.

85 Estudia la continuidad de la siguiente función:

$$f(x) = \frac{x}{1 + |x|}$$

Solución:

Es el cociente de dos funciones continuas, luego es continua; salvo cuando se anule el denominador, lo que nunca sucede, ya que:

$$1 + |x| \geq 1$$

La función es continua en $\mathbb{R}$

86 Calcula, de forma razonada, dos funciones que no sean continuas en un cierto valor $x = a$ de su dominio y tales que la función suma sea continua en dicho valor.

Solución:

Cualquier función constante es continua en $\mathbb{R}$. Se trata de buscar dos funciones que se rompan en un punto y que al sumarlas dé una constante. Por ejemplo:

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leq 0 \\ 1 & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

$$g(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \leq 0 \\ 0 & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

La función $f(x) + g(x) = 1$ es continua en $\mathbb{R}$

Practica

Halla los siguientes límites y representa la función correspondiente para comprobarlo gráficamente.

92 $\lim\limits_{x\to 2} (x^3 - 2x + 1)$

Solución:

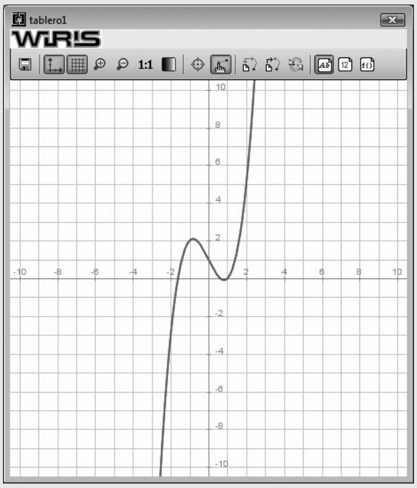
Ejercicio 92

$f(x) = x^3 - 2x + 1 \Rightarrow x \mapsto x^3 - 2 \cdot x + 1$

$\lim\limits_{x\to 2} f(x) \Rightarrow 5$

dibujar(f(x), {color = rojo, anchura_línea = 2})

Cuando x → 2, se ve que y → 5



93 $\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{4^x + 5^x}{3^x + 6^x}$

Solución:

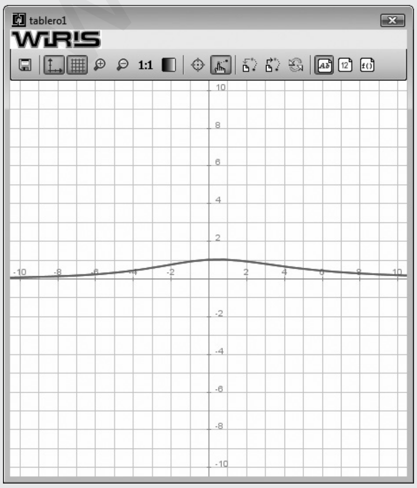
Ejercicio 93

$f(x) = \dfrac{4^x + 5^x}{3^x + 6^x} \Rightarrow x \mapsto \dfrac{4^x + 5^x}{3^x + 6^x}$

$\lim\limits_{x\to +\infty} f(x) \Rightarrow 0$

dibujar(f(x), {color = rojo, anchura_línea = 2})

Cuando x → +∞, se ve que y → 0



94 $\lim\limits_{x\to +\infty} (e^x - x^2)$

Solución:

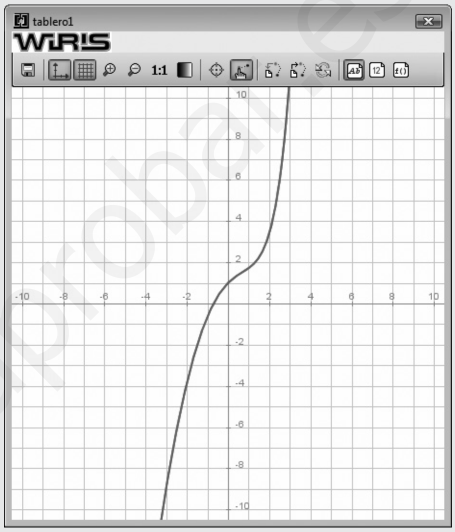
Ejercicio 94

$f(x) = e^x - x^2 \Rightarrow x \mapsto e^x - x^2$

$\lim\limits_{x\to +\infty} f(x) \Rightarrow +\infty$

dibujar(f(x), {color = rojo, anchura_línea = 2})

Cuando x → +∞, se ve que y → +∞



95 $\lim\limits_{x\to 2} 5x - 2$

Solución:

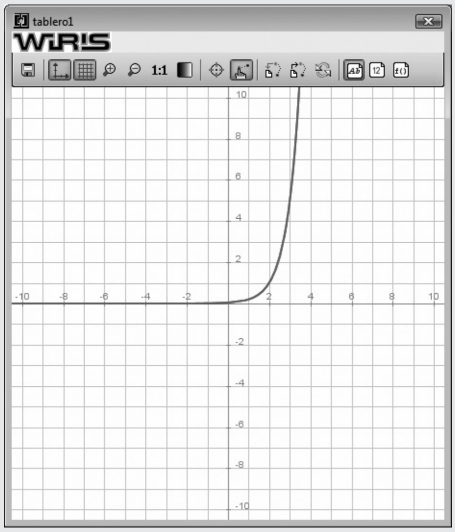
Ejercicio 95

$f(x) = 5^{x-2} \Rightarrow x \mapsto 5^{x-2}$

$\lim\limits_{x\to 2} f(x) \Rightarrow 1.$

dibujar(f(x), {color = rojo, anchura_línea = 2})

Cuando x → 2, se ve que y → 1



96 $\lim\limits_{x \to -\infty} (-x^3 + x^2 + 3x - 1)$

Solución:

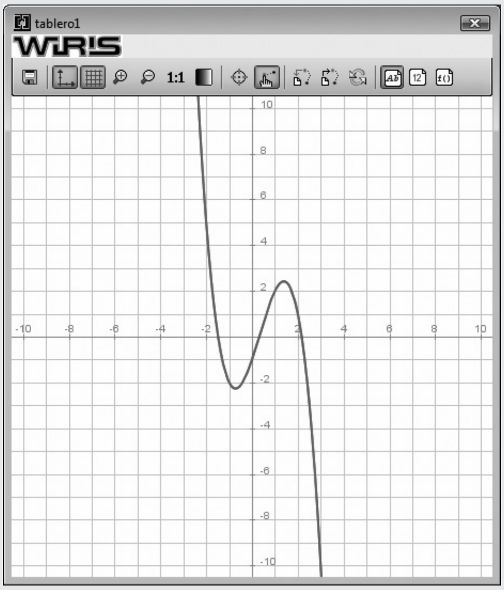
Ejercicio 96

$f(x) = -x^3 + x^2 + 3x - 1 \;\Rightarrow\; x \mapsto -x^3 + x^2 + 3 \cdot x - 1$

$\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) \;\Rightarrow\; +\infty$

dibujar(f(x), {color = rojo, anchura_línea = 2})

Cuando x → -∞, se ve que y → +∞



97 $\lim\limits_{x \to +\infty} (-x^3 + x^2 + 3x - 1)$

Solución:

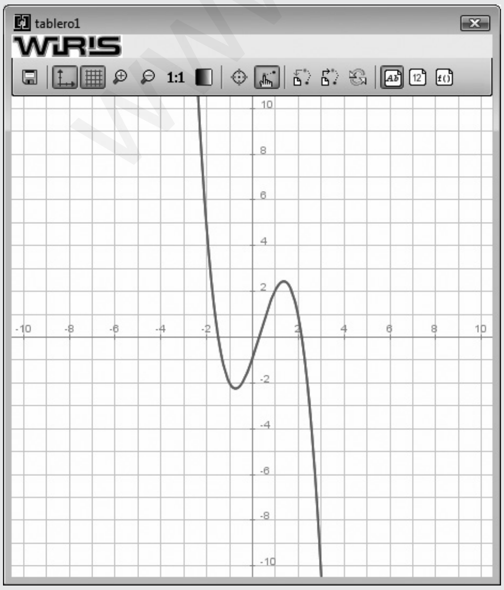
Ejercicio 97

$f(x) = -x^3 + x^2 + 3x - 1 \;\Rightarrow\; x \mapsto -x^3 + x^2 + 3 \cdot x - 1$

$\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) \;\Rightarrow\; -\infty$

dibujar(f(x), {color = rojo, anchura_línea = 2})

Cuando x → +∞, se ve que y → -∞



98 $\lim\limits_{x \to 3} \dfrac{x - 3}{x^2 - 3x}$

Solución:

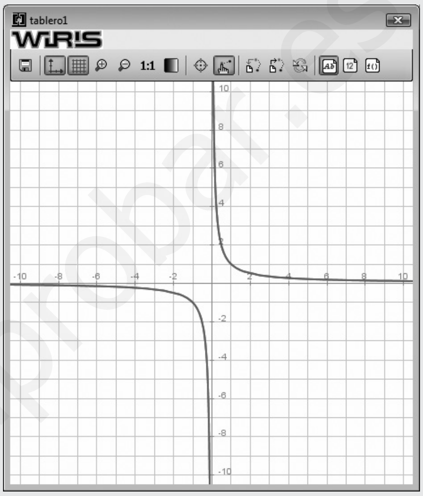
Ejercicio 98

$f(x) = \dfrac{x - 3}{x^2 - 3x} \;\Rightarrow\; x \mapsto \dfrac{1}{x}$

$\lim\limits_{x \to 3} f(x) \;\Rightarrow\; \dfrac{1}{3}$

dibujar(f(x), {color = rojo, anchura_línea = 2})

Cuando x → 3, y → $\dfrac{1}{3}$



99 $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{3x - 5}{x - 2}$

Solución:

Ejercicio 99

$f(x) = \dfrac{3x - 5}{x - 2} \;\Rightarrow\; x \mapsto \dfrac{3 \cdot x - 5}{x - 2}$

$\lim\limits_{x \to 2} f(x) \;\Rightarrow\; \pm\infty$

Como da más y menos infinito, tenemos que hayar los dos límites laterales

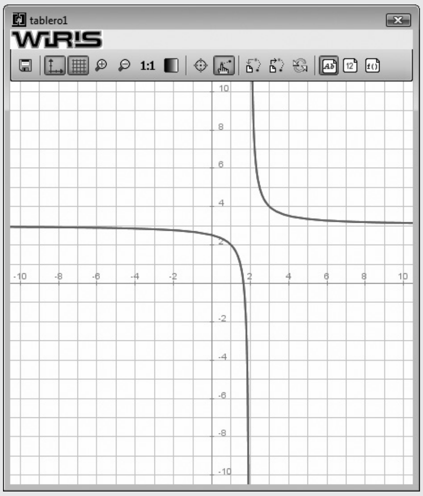
$\lim\limits_{x \to 2^+} f(x) \;\Rightarrow\; +\infty$

$\lim\limits_{x \to 2^-} f(x) \;\Rightarrow\; -\infty$

dibujar(f(x), {color = rojo, anchura_línea = 2})

Cuando x → 2^+, se ve que y → +∞

Cuando x → 2^-, se ve que y → -∞



100 $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(x + 1 - \dfrac{x^3}{x^2 - 9} \right)$

Solución:

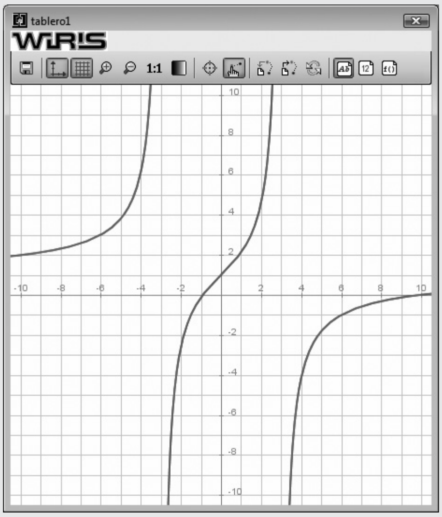
Ejercicio 100

$f(x) = x + 1 - \dfrac{x^3}{x^2 - 9} \;\Rightarrow\; x \mapsto \dfrac{x^2 - 9 \cdot x - 9}{x^2 - 9}$

$\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) \;\Rightarrow\; 1$

dibujar(f(x), {color = rojo, anchura_línea = 2})

Cuando $x \to +\infty$, $y \to 1$



101 $\lim\limits_{x \to -\infty} \left(x + \sqrt{x^2 + x} \right)$

Solución:

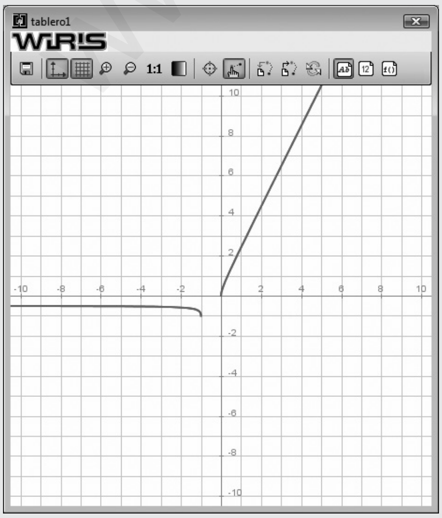
Ejercicio 101

$f(x) = x + \sqrt{x^2 + x} \;\Rightarrow\; x \mapsto \sqrt{x^2 + x} + x$

$\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) \;\Rightarrow\; -\dfrac{1}{2}$

dibujar(f(x), {color = rojo, anchura_línea = 2})

Cuando $x \to -\infty$, $y \to -\dfrac{1}{2}$



102 $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{\sqrt{5x - 6} - 2}{x - 2}$

Solución:

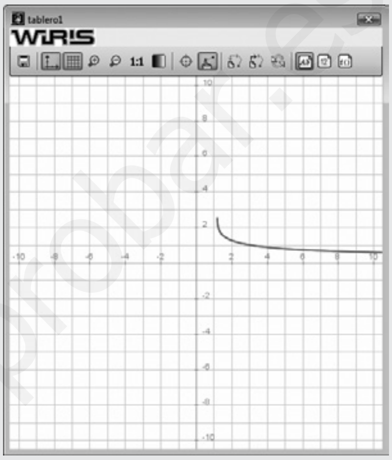
Ejercicio 102

$f(x) = \dfrac{\sqrt{5x - 6} - 2}{x - 2} \;\Rightarrow\; x \mapsto \dfrac{1}{x - 2} \cdot \sqrt{5 \cdot x - 6} + \dfrac{2}{-x + 2}$

$\lim\limits_{x \to 2} f(x) \;\Rightarrow\; \dfrac{5}{4}$

dibujar(f(x), {color = rojo, anchura_línea = 2})

Cuando $x \to +\infty$, $y \to \dfrac{5}{4}$



103 $\lim\limits_{x \to 1} = \left(\dfrac{x + 2}{2x + 1} \right)^{\frac{x}{x - 1}}$

Solución:

Ejercicio 103

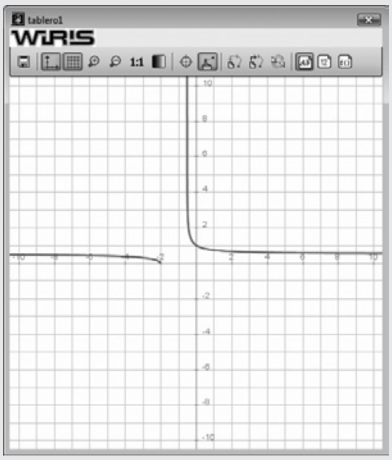
$f(x) = \left(\dfrac{x + 2}{2x + 1} \right)^{\frac{x}{x - 1}} \;\Rightarrow\; x \mapsto \left(\dfrac{x + 2}{2 \cdot x + 1} \right)^{\frac{x}{x - 1}}$

$\lim\limits_{x \to 1} f(x) \;\Rightarrow\; \dfrac{\sqrt[3]{e^2}}{e}$

$\dfrac{\sqrt[3]{e^2}}{e} \;\Rightarrow\; 0.71653$

dibujar(f(x), {color = rojo, anchura_línea = 2})

Cuando $x \to 1$, se ve que $y \to \dfrac{\sqrt[3]{e^2}}{e} = 0.71653$



Representa las siguientes funciones y estudia sus continuidades.

104 $f(x) = \dfrac{x^2 - 1}{x - 1}$

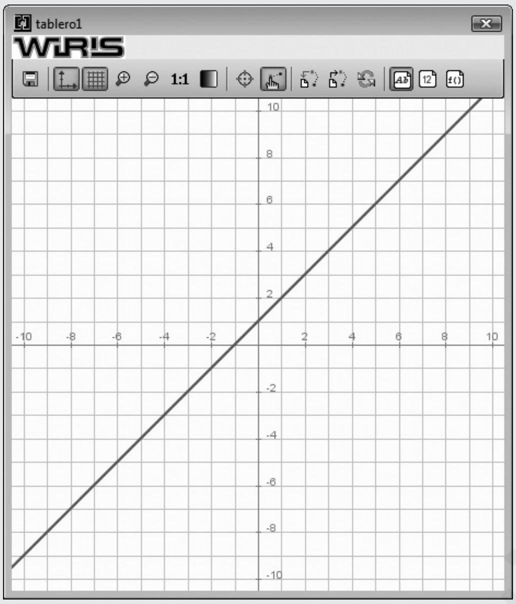
Solución:

Ejercicio 104

$f(x) = \dfrac{x^2 - 1}{x - 1} \Rightarrow x \mapsto x+1$

dibujar(f(x), {color = rojo, anchura_línea = 2})

Es discontinua en x = 1, donde tiene una discontinuidad evitable.



105 $f(x) = \sqrt{x^2 - 1}$

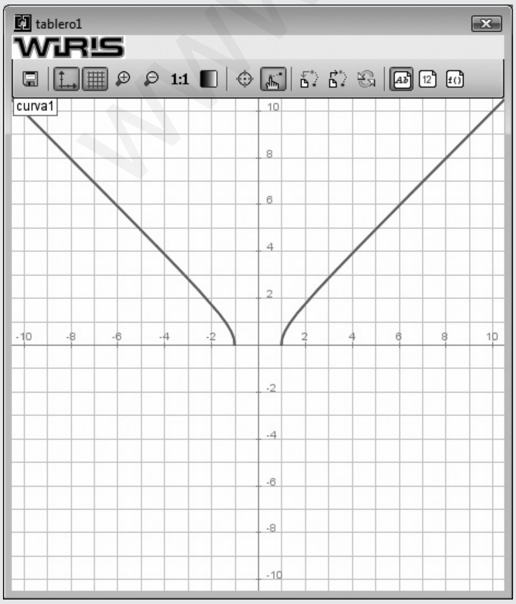
Solución:

Ejercicio 105

$f(x) = \sqrt{x^2 - 1} \Rightarrow x \mapsto \sqrt{x^2-1}$

dibujar(f(x), {color = rojo, anchura_línea = 2})

Es discontinua en x = − 1, y en x = 1, donde tiene una discontinuidad de 2ª especie.



106 $f(x) = \begin{cases} -2x & \text{si } x \le 2 \\ x^2 - 2x + 1 & \text{si } x > 2 \end{cases}$

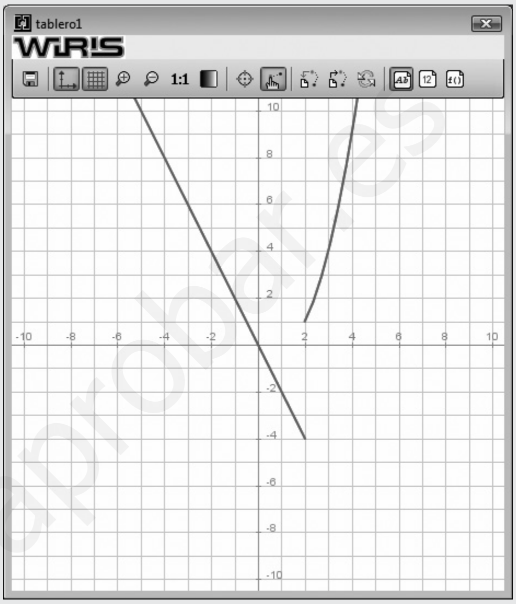
Solución:

Ejercicio 106

dibujar($-2x$, $-\infty..2$, {color = rojo, anchura_línea = 2}) ⇒ tablero1

dibujar($x^2 - 2x + 1$, $2..+\infty$, {color = rojo, anchura_línea = 2}) ⇒ tablero1

Es discontinua en x = 2, donde tiene una discontinuidad de 1ª especie de salto 5



107 $f(x) = \begin{cases} 2^x - 2 & \text{si } x \le 1 \\ \ln x & \text{si } x > 1 \end{cases}$

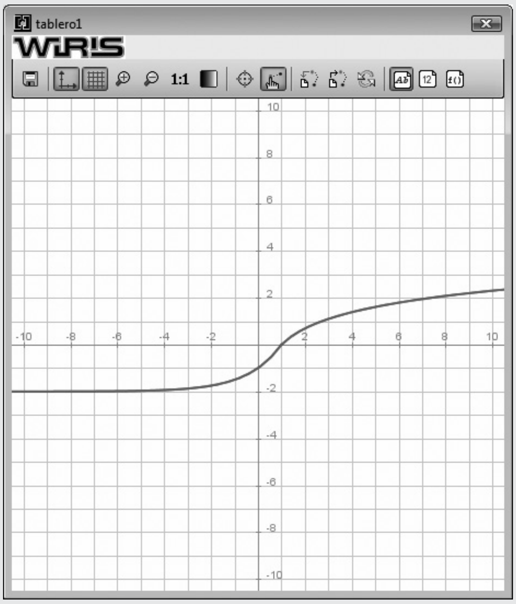
Solución:

Ejercicio 107

dibujar($2^x - 2$, $-\infty..1$, {color = rojo, anchura_línea = 2})

dibujar(ln(x), $1..+\infty$, {color = rojo, anchura_línea = 2})

Es continua en toda la recta real IR



108 Demuestra que la función $f(x) = x^2 - 2x - 1$ tiene un cero en el intervalo (2, 3). Representa la función y comprueba que se cumplen las condiciones del teorema de Bolzano.

Solución:

Problema 108

$f(x) = x^2 - 2x - 1 \Rightarrow x \mapsto x^2 - 2 \cdot x - 1$

dibujar(f(x), {color = rojo, anchura_línea = 2})

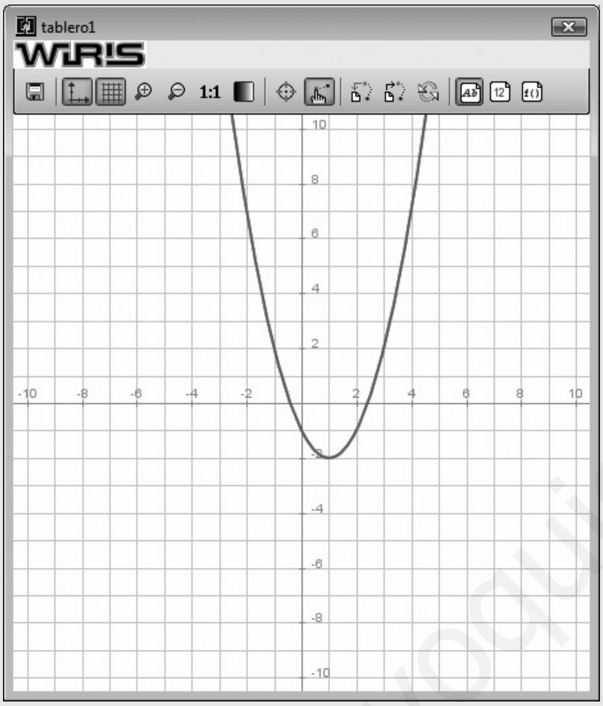
Tomamos el intervalo cerrado [2, 3] en el que f(x) es continua por ser polinómica.

$f(2) \Rightarrow -1$

$f(3) \Rightarrow 2$

f(x) toma valores de signo opuesto en los extremos.

Por el teorema de Bolzano tiene un cero en el intervalo abierto (2, 3)



Representa las siguientes funciones, halla sus asíntotas y represéntalas:

109 $f(x) = \dfrac{x^2}{x + 2}$

Solución:

Ejercicio 109

dibujar$\left(\dfrac{x^2}{x+2}\right.$, {color = rojo, anchura_línea = 2}$\left.\right)$

Asíntota vertical:

dibujar(x = − 2, {color = verde, anchura_línea = 2})

Asíntota horizontal: no tiene

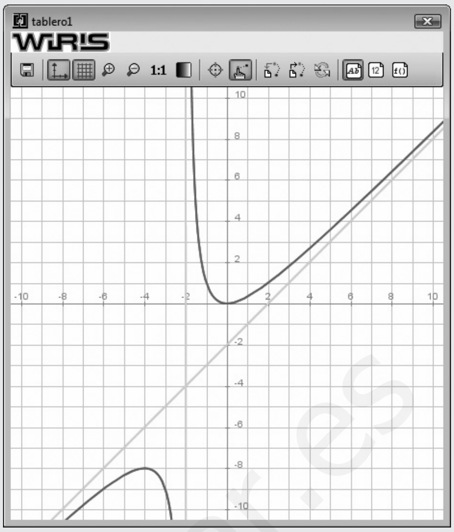
Asíntota oblicua:

$x^2 \;\; \underline{|\, x + 2} \Rightarrow x^2 \;\; \underline{|\, x+2}$

$\qquad\qquad\qquad\quad 4 \quad\;\; x-2$

La asíntota oblicua es y = x − 2

dibujar(x − 2, {color = verde, anchura_línea = 2})



110 $f(x) = \sqrt{x^2 - x}$

Solución:

Ejercicio 110

$f(x) = \sqrt{x^2 - x} \Rightarrow x \mapsto \sqrt{x^2 - x}$

dibujar(f(x), {color = rojo, anchura_línea = 2})

$m1 = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{f(x)}{x} \Rightarrow 1$

$b1 = \lim\limits_{x \to +\infty} (f(x) - m1 \cdot x) \Rightarrow -\dfrac{1}{2}$

La asíntota oblícua por la derecha es $y = x - \dfrac{1}{2}$

dibujar$\left(y = x - \dfrac{1}{2}\right.$, {color =verde, anchura_línea = 2}$\left.\right)$

$m2 = \lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{f(x)}{x} \Rightarrow -1$

$b2 = \lim\limits_{x \to -\infty} (f(x) - m2 \cdot x) \Rightarrow \dfrac{1}{2}$

La asíntota oblícua por la izquierda es $y = -x + \dfrac{1}{2}$

dibujar$\left(y = -x + \dfrac{1}{2}\right.$, {color =verde, anchura_línea = 2}$\left.\right)$