PROGRAMACIÓN LINEAL

1. La región factible de un problema de programación lineal es la intersección de primer cuadrante con los tres semiplanos definidos por las siguientes inecuaciones:

$$\frac{x}{10}+\frac{y}{8}\leq 1 \qquad \frac{x}{5}+\frac{y}{8}\geq 1 \qquad \frac{x}{10}+\frac{y}{4}\geq 1$$

   a) Dibuja dicha región y determina sus vértices.
   b) Calcula el mínimo de la función objetivo z = 4x + 5y, en el recinto anterior.

2. Las 18 chicas y los 24 chicos de 2º de Bachillerato de un centro docente organizan un viaje. Para financiarlo, deciden trabajar por las tardes en una empresa encuestadora que contrata equipos de dos tipos:

   - Tipo A: dos chicas y cuatro chicos.
   - Tipo B: tres chicas y tres chicos.

   La empresa abona por una tarde de trabajo 300 € al equipo del tipo A y 500 € al equipo del tipo B. Se pide:

   a) Dibuja la región factible.
   b) ¿Cómo les conviene distribuirse para obtener la mayor cantidad posible de dinero?.
   c) Si la empresa abonara por una tarde de trabajo 40 € al equipo de tipo A y 40 € al equipo del tipo B, ¿cómo les convendría entonces hacer la distribución?

3. Dibuja la región del plano determinada por estas desigualdades:

$$\left.\begin{array}{l} 2x+y\leq 2 \\ 4x+y\geq 0 \\ y\geq 0 \end{array}\right\}$$

   Calcula después el máximo de la función z = x + y en esta región.

4. Una factoría produce coches de los modelos A y B. El beneficio por la venta de un coche del modelo A es de 450 € y la venta del modelo B reporta un beneficio de 600 €.
   La capacidad de la factoría impide producir más de 400 coches por día del modelo A y más de 300 coches por día del modelo B. Además, no es posible producir diariamente más de 500 coches entre ambos modelos.

   Se vende toda la producción que se hace y se desea saber, razonadamente, cuántos coches interesa fabricar de cada modelo para obtener el máximo beneficio.

5. Un vendedor de libros usados tiene 180 libros de la editorial A y 160 de la editorial B, con los que decide hacer dos tipos de lotes: el lote económico, con tres libros de la editorial A y uno de la editorial B, que venderá a 8 €, y el lote selecto, con un libro de la editorial A y dos de la editorial B, que venderá a 10 €. Deduce razonadamente cuántos lotes debe hacer de cada tipo para maximizar sus ingresos al vender todos los lotes.

6. En un almacén de frutas hay 800 kg de naranjas, 800 kg de manzanas y 500 kg de plátanos. Para su venta se hacen dos lotes: A y B. El lote A contiene 1 kg de naranjas, 2 kg de manzanas y 1 kg de plátanos. El beneficio que se obtiene con el lote A es de 1,20 € y con el lote B de 1,40 €.
   Determina, justificando las respuestas:

   c) El número de lotes de cada clase que se deben formar para conseguir unos beneficios máximos.
   d) El valor de dichos beneficios máximos.

7. Por Navidades, un hombre quiere preparar dos tipos de cestas, C_1 y C_2. Cada cesta del tipo C_1 ha de contener 4 barras de turrón y 2 botellas de cava, y cada cesta del tipo C_2 ha de contener 3 barras de turrón y 3 botellas de cava. Con cada cesta del tipo C_1 se obtiene un beneficio de 3 € y con cada cesta del tipo C_2, un beneficio de 4 €. El hombre dispone de 480 barras de turrón y 360 botellas de cava.
   ¿Cuántas cestas de cada tipo se tienen que preparar para obtener el beneficio máximo?.

8. En una fundición disponen de 1200 kg de hierro, 800 kg de cobre y 700 kg de níquel. Fabrican dos tipos de aleaciones: la A, en la que se mezclan los tres a partes iguales, y la B, en la que se mezclan 4 partes de hierro con dos de cobre y 1 de níquel.
   Los precios de venta por gramo son de 0,06 € para la aleación A y 0,08 € para la B.

   Determina cuántos kilos de cada tipo de aleación se deben fabricar para que la ganancia obtenida sea máxima.

9. Una fábrica de madera produce dos líneas de muebles: el clásico (C) y el funcional (F). Para su fabricación, los muebles requieren tiempo de proceso de construcción y pintura.
   El mueble clásico precisa una unidad de tiempo de construcción y tres de pintura, mientras que el funcional requiere dos unidades de tiempo de construcción y una de pintura.

   La situación actual de la empresa no permite utilizar más de diez unidades de tiempo de construcción y quince de pintura.

   a) Plantea el problema y representa gráficamente el conjunto de soluciones.
   b) ¿Qué combinaciones de muebles puede fabricar?.
   c) Si el beneficio empresarial es función del número de unidades fabricadas de acuerdo con la relación $B = 3C + 2F$, ¿cuántas unidades de cada línea deben fabricarse para maximizar el beneficio?. ¿Cuál es el beneficio máximo?

10. Un distribuidor de aceite de oliva compra la materia prima a dos almazaras, A y B. Las almazaras A y B venden el aceite a 2000 y 3000 euros por tonelada, respectivamente. Cada almazara le vende un mínimo de 2 toneladas y un máximo de 7 y para atender a su demanda, el distribuidor debe comprar en total un mínimo de 6 toneladas. El distribuidor debe comprar como máximo a la almazara A el doble de aceite que a la almazara B. ¿Qué cantidad de aceite debe comprar el distribuidor a cada una de las almazaras para obtener el mínimo coste? Determínese dicho coste mínimo.

11. Un fabricante de coches lanza una oferta especial en dos de sus modelos, ofreciendo el modelo A a un precio de 15000 € y el modelo B a un precio de 20000 €. La oferta está limitada por las existencias que son 20 coches del modelo A y 10 del modelo B, queriendo vender al menos, tantas unidades del modelo A como del modelo B.
    Por otra parte, para cubrir gastos de esta campaña, los ingresos obtenidos en ella deben ser, al menos, de 60000 €.

    a) Plantear el problema y representar gráficamente su conjunto de soluciones.
    b) ¿Cuántos coches deberá vender de cada modelo para maximizar sus ingresos?¿Cuál es su importe?

12. Una compañía de telefonía móvil quiere celebrar una jornada de “Consumo razonable” y ofrece a sus clientes la siguiente oferta: 15 céntimos de euro por cada mensaje SMS y 25 céntimos por cada minuto de conversación incluyendo el coste de establecimiento de llamada. Impone las condiciones:

    - El número de llamadas de un minuto no puede ser mayor que el número de mensajes aumentado en 3, ni ser menor que el número de mensajes disminuido en 3.
    - Sumando el quíntuplo del número de mensajes con el número de llamadas no puede obtenerse más de 27.

    a) Dibuja la región factible.

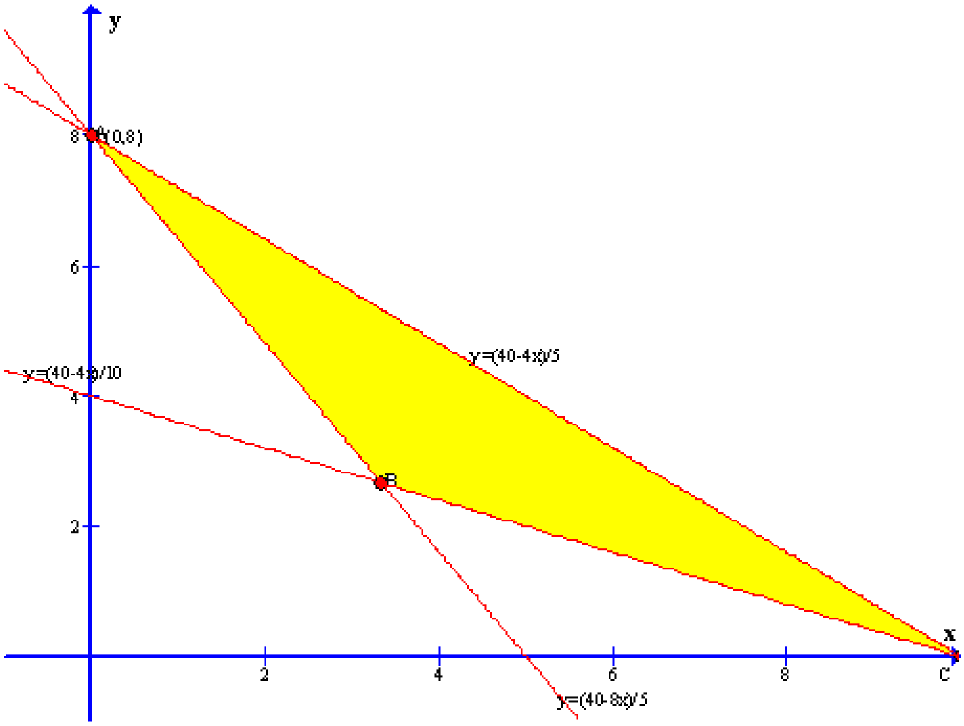
b) Determina el número de mensajes y de llamadas para que el beneficio sea máximo.
c) ¿Cuál es ese beneficio máximo?

13. Cierto armador se dedica a la pesca de rape y merluza. Las cuotas pesqueras imponen que sus capturas totales no excedan las 30 toneladas (Tm). Por otro lado, la cantidad de rape como máximo puede triplicar a la de merluza y, además, esta última no puede superar las 18 Tm. Si el precio del rape es de 15 €/Kg y el de la merluza 10 €/Kg, ¿Qué cantidades de cada especie debe pescar para maximizar sus ingresos?

14. Se desea invertir una cantidad de dinero menor o igual que 125000 euros, distribuidos entre acciones del tipo A y del tipo B. Las acciones del tipo A garantizan una ganancia del 10% anual, siendo obligatorio invertir en ellas un mínimo de 30000 euros y un máximo de 81000 euros. Las acciones del tipo B garantizan una ganancia del 5% anual, siendo obligatorio invertir en ellas un mínimo de 25000 euros. La cantidad invertida en acciones del tipo B no puede superar el triple de la cantidad invertida en acciones del tipo A. ¿Cuál debe ser la distribución de la inversión para maximizar la ganancia anual? Determínese dicha ganancia máxima.

15. Una refinería utiliza dos tipos de petróleo, A y B, que compra a un precio de 350 euros y 400 euros por tonelada, respectivamente. Por cada tonelada de petróleo de tipo A que refina, obtiene 0,10 toneladas de gasolina y 0,35 toneladas de fuel-oil. Por cada tonelada de petróleo de tipo B que refina, obtiene 0,05 toneladas de gasolina y 0,55 toneladas de fuel-oil. Para cubrir sus necesidades necesita obtener al menos 10 toneladas de gasolina y al menos 50 toneladas de fuel-oil. Por cuestiones de capacidad, no puede comprar más de 100 toneladas de cada tipo de petróleo. ¿Cuántas toneladas de petróleo de cada tipo debe comprar la refinería para cubrir sus necesidades a mínimo coste? Determinar dicho coste mínimo.

1.



A(0,8)   B(10/3, 8/3)   C(10,0)

Evaluamos z en cada vértice:

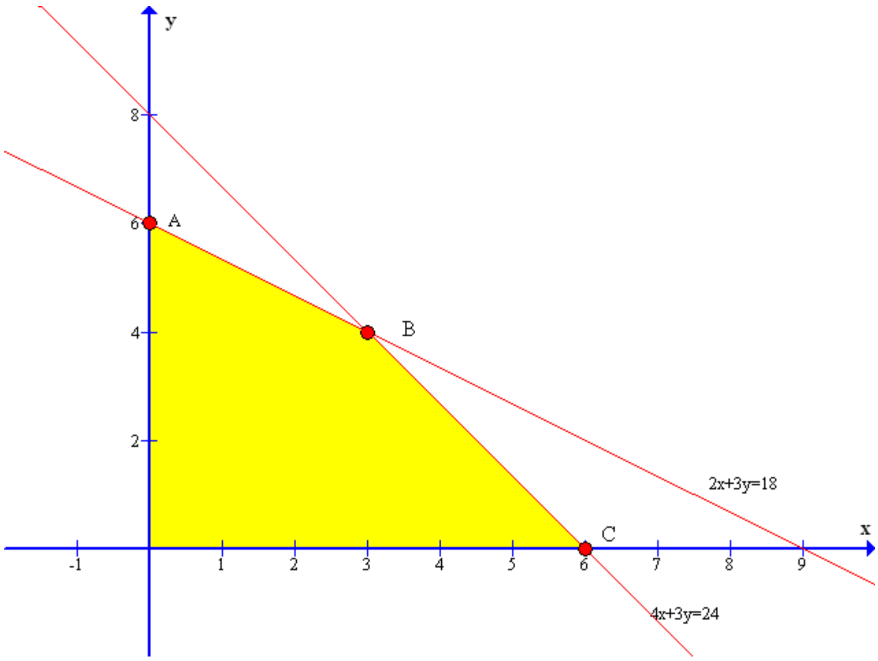
- A $\rightarrow z = 4 \cdot 0 + 5 \cdot 8 = 40$
- B $\rightarrow z = 4 \cdot 10/3 + 5 \cdot 8/3 = 80/3 = 26{,}66\ldots.$
- C $\rightarrow z = 4 \cdot 10 + 5 \cdot 0 = 40$

El mínimo se alcanza en B y el valor mínimo es 80/3

2. Sea x: el número de equipos del tipo A
y: el número de equipos del tipo B

Las restricciones del problema son:

$$\left.\begin{array}{l} 2x+3y \le 18 \\ 4x+3y \le 24 \\ x \ge 0 \\ y \ge 0 \end{array}\right\}$$



A(0,6) B(3,4) C(6,0)

b) El beneficio viene dado por la expresión z = 300x + 500y

Evaluamos z en cada vértice:

- A $\rightarrow$ z = 300 · 0 + 500 · 6 = 3000
- B $\rightarrow$ z = 300 · 3 + 500 · 4 = 2900
- C $\rightarrow$ z = 300 · 6 + 500 · 0 = 1800

Luego, para obtener la mayor cantidad posible de dinero, les conviene distribuirse en 6 equipos del tipo B.

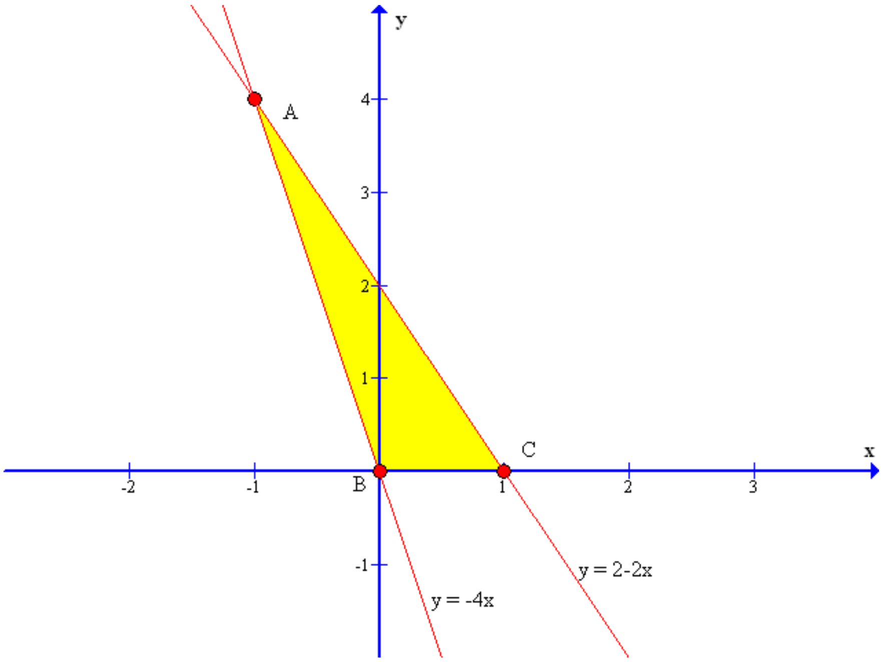
c) Ahora la función objetivo es z = 40x + 40y

Evaluamos z en cada vértice:

- A $\rightarrow z = 40 \cdot 0 + 40 \cdot 6 = 240$
- B $\rightarrow z = 40 \cdot 3 + 40 \cdot 4 = 280$
- C $\rightarrow z = 40 \cdot 6 + 40 \cdot 0 = 240$

Esta vez les conviene distribuirse en 3 equipos tipo A y 4 equipos tipo B

3. El recinto es:



La función objetivo es $z = x + y$

Evaluamos z en cada vértice:

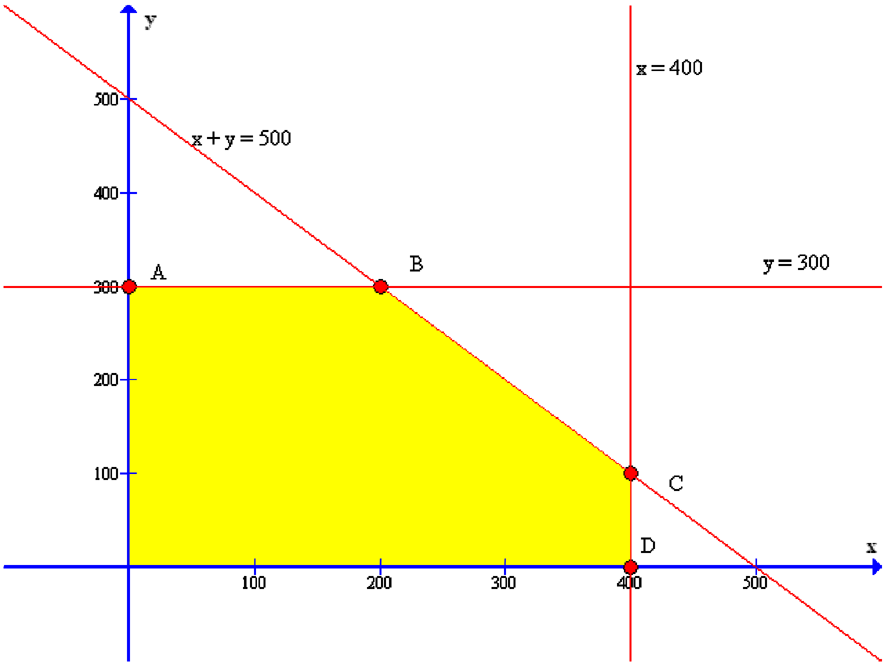
- A $\rightarrow z = -1 + 4 = 3$
- B $\rightarrow z = 0 + 0 = 0$
- C $\rightarrow z = 1 + 0 = 1$

En el punto A(-1,4) la función $z = x + y$ presenta un máximo

4. Sea x: el número de coches del modelo A
   y: el número de coches del modelo B

Las restricciones del problema son:

$$\left.\begin{array}{l} 0 \le x \le 400 \\ 0 \le y \le 300 \\ x + y \le 500 \end{array}\right\}$$ El recinto es :



La función objetivo es z = 450x + 600y

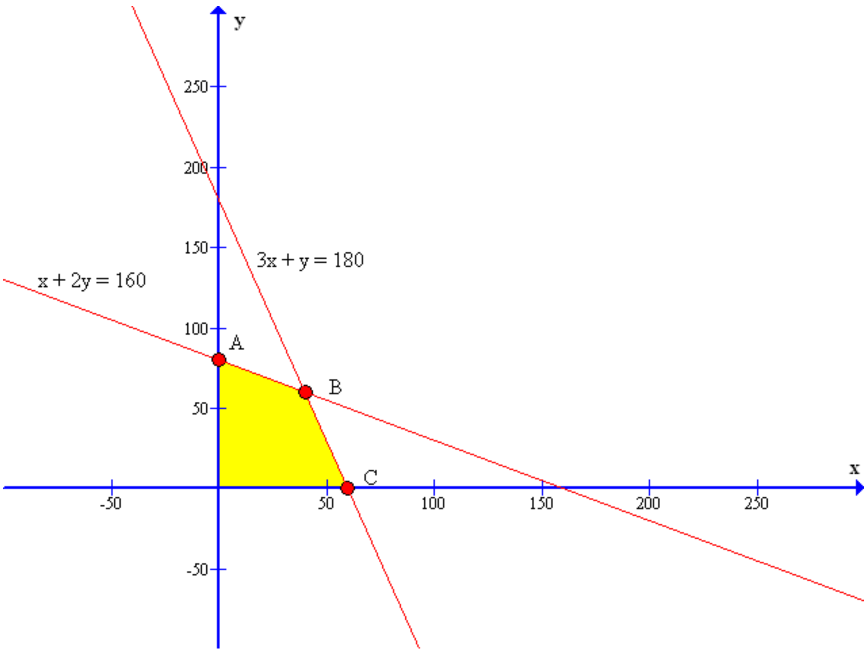
Evaluamos z en cada vértice:

- A $\rightarrow$z = 450 · 0 + 600 · 300 = 180.000
- B $\rightarrow$z = 450 · 200 + 600 · 300= 270.000
- C $\rightarrow$z = 450 · 400 + 600 · 100 = 240.000
- D $\rightarrow$z = 450 · 400 + 600 · 0 = 180.000
-

Para obtener el máximo beneficio interesa que la factoría fabrique 200 coches del modelo A y 300 coches del modelo B y se obtendrá un beneficio de 270.000 €.

5. Las restricciones del problema son:

$$\left.\begin{array}{l} 3x + y \le 180 \\ x + 2y \le 160 \\ x \ge 0 \\ y \ge 0 \end{array}\right\}$$ El recinto es :



A(0,80) B(40,60) C(60,0)

La función a maximizar es z = 8x + 10y

Evaluamos z en cada vértice:

- A $\rightarrow$z = 8 · 0 +10 · 80 = 800
- B $\rightarrow$z = 8 · 40 + 10 · 60= 920
- C $\rightarrow$z =8 · 60 + 10 · 0 = 480

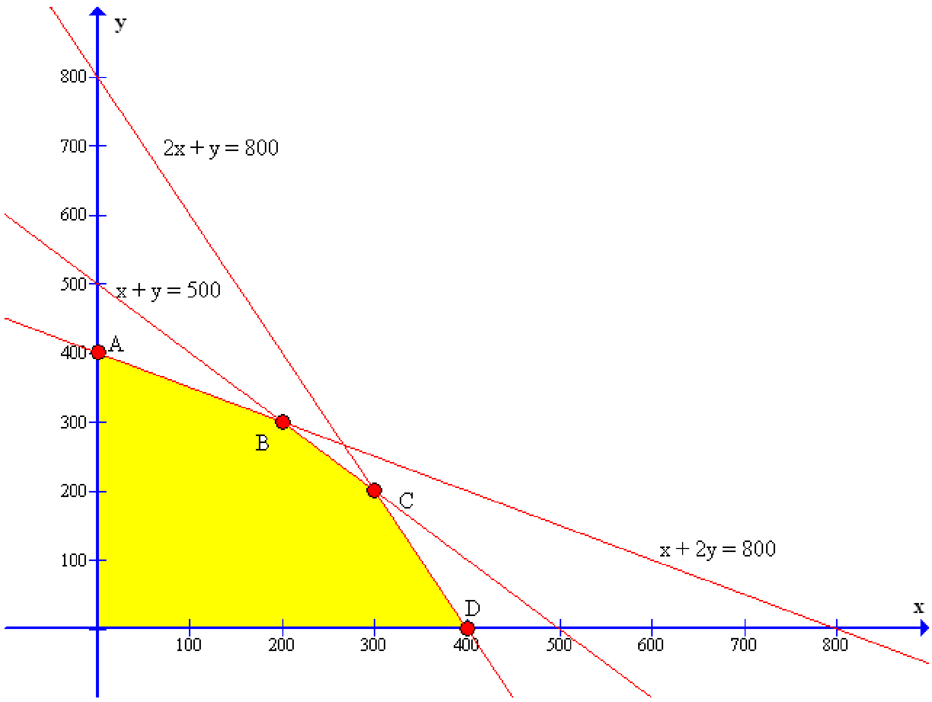
Para obtener le máximo beneficio deberá hacer 40 lotes de tipo económico y 60 lotes del tipo selecto.

6. Sean x. el número de lotes de A

Y: el número de lotes de B

Las restricciones son:

$$\left.\begin{array}{l} x+2y\leq 800 \\ 2x+y\leq 800 \\ x+y\leq 500 \\ x\geq 0 \\ y\geq 0 \end{array}\right\} \text{ El recinto es:}$$



La función objetivo es z = 1,20x + 1,40 y

Evaluamos z en cada vértice:

- A $\rightarrow$z = 1,20 · 0 + 1,40· 400 = 560
- B $\rightarrow$z = 1,20 · 200 + 1,40 · 300= 660
- C $\rightarrow$z = 1,20 · 300 + 1,40 · 200 = 640
- D $\rightarrow$z = 1,20 · 400 +1,40 · 0 = 480

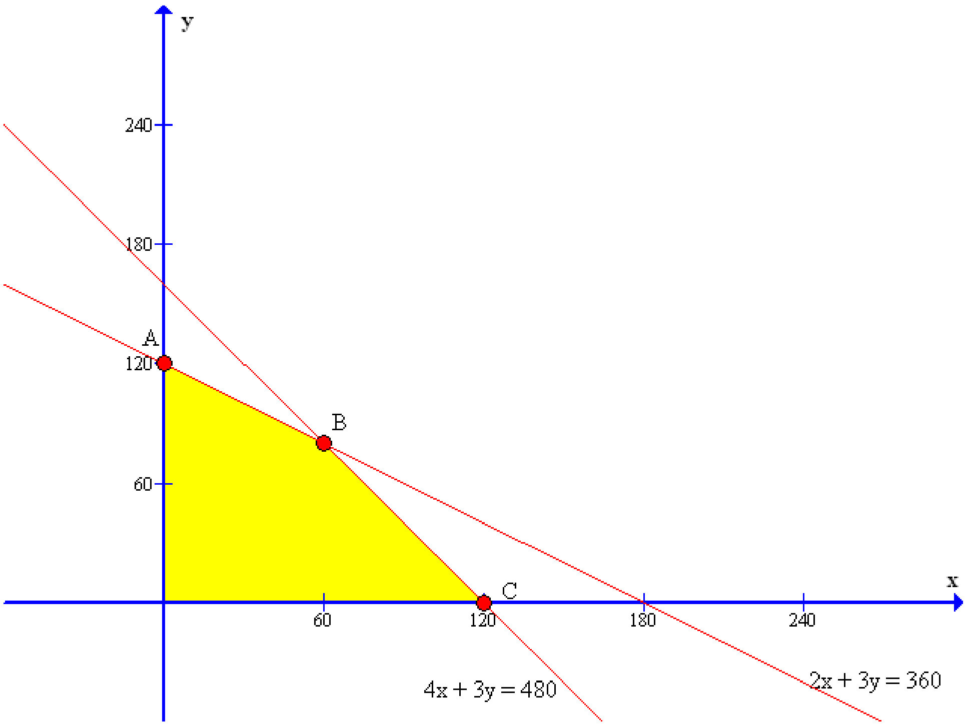
Para conseguir los beneficios máximos se deben formar 200 lotes A y 300 lotes B.

El valor del beneficio máximo es de 660€.

7. Sean x. el número de cestas C_1
Y: el número de cestas C_2

Las restricciones son:

$$\left.\begin{aligned} 4x + 3y &\le 480 \\ 2x + 3y &\le 360 \\ x &\ge 0 \\ y &\ge 0 \end{aligned}\right\} \text{ El recinto es:}$$



La función objetivo es z =3x + 4y

Evaluamos z en cada vértice:

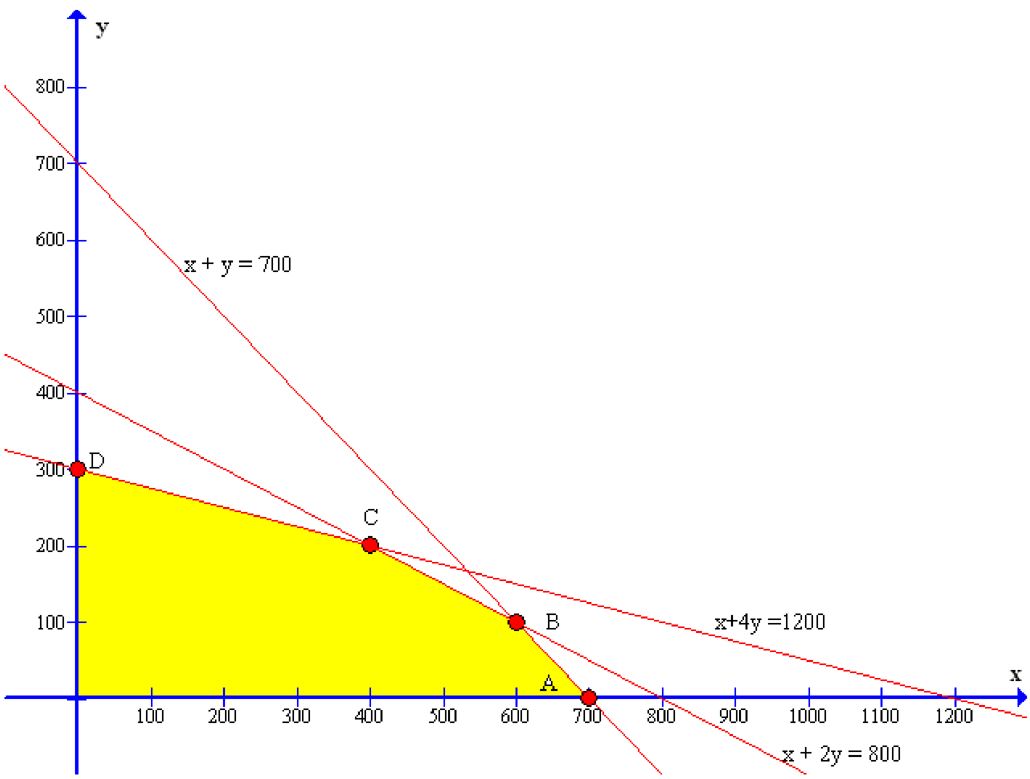
- A $\rightarrow z = 3 \cdot 0 + 4 \cdot 120 = 480$
- B $\rightarrow z = 3 \cdot 60 + 4 \cdot 80 = 500$
- C $\rightarrow z = 3 \cdot 120 + 4 \cdot 0 = 360$

Se tienen que preparar 60 cestas C_1 y 80 cestas C_2, Para obtener un beneficio máximo de 500 €

8. Sea x: El número de kilos de aleación A
   Y: El número de kilos de aleación B

Las restricciones son:

$$\left.\begin{array}{l} x+4y \leq 1200 \\ x+2y \leq 800 \\ x+y \leq 700 \\ x \geq 0 \\ y \geq 0 \end{array}\right\}$$ El recinto es:



La función objetivo es z = 60x + 80 y

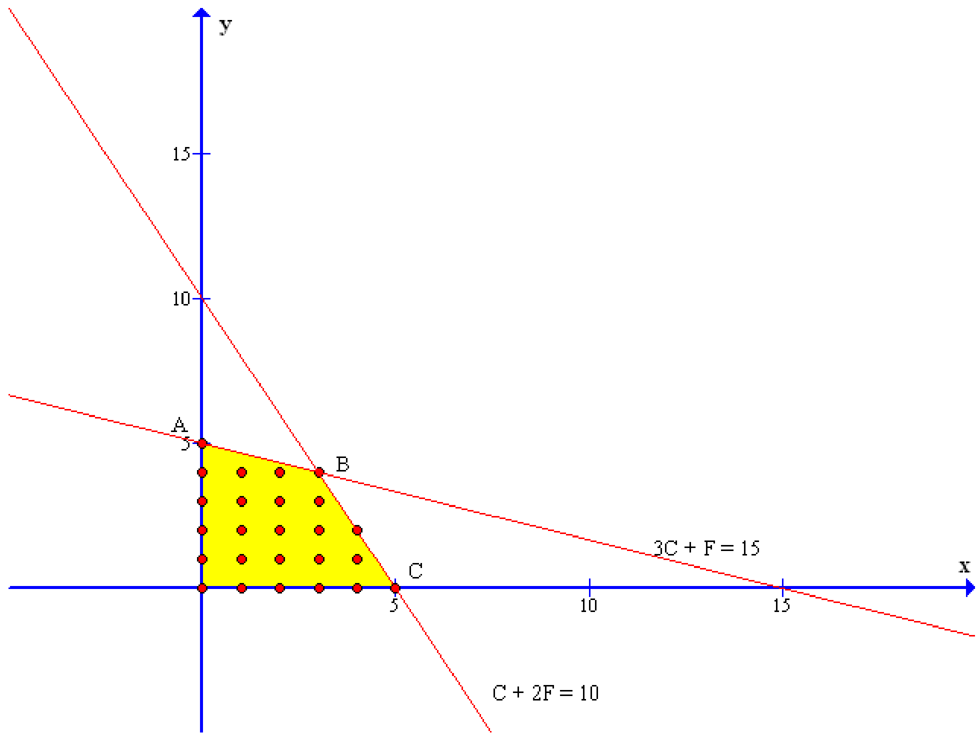
Evaluamos z en cada vértice:

- A $\rightarrow$z = 60 · 700 +80 · 0= 42000
- B $\rightarrow$z = 60· 600 + 80 · 100= 44000
- C $\rightarrow$z = 60 ·400 + 80 ·200 = 40000
- D $\rightarrow$z = 60 · 0 + 80 ·300 = 24000
-

Para que la ganancia sea máxima se deben fabricar 600 kg de aleación A y 100 kg de aleación B

9. Las restricciones son:

$$\left.\begin{array}{l} C + 2F \leq 10 \\ 3C + F \leq 15 \\ C \geq 0 \\ F \geq 0 \end{array}\right\}$$ El recinto es:



La combinación es:

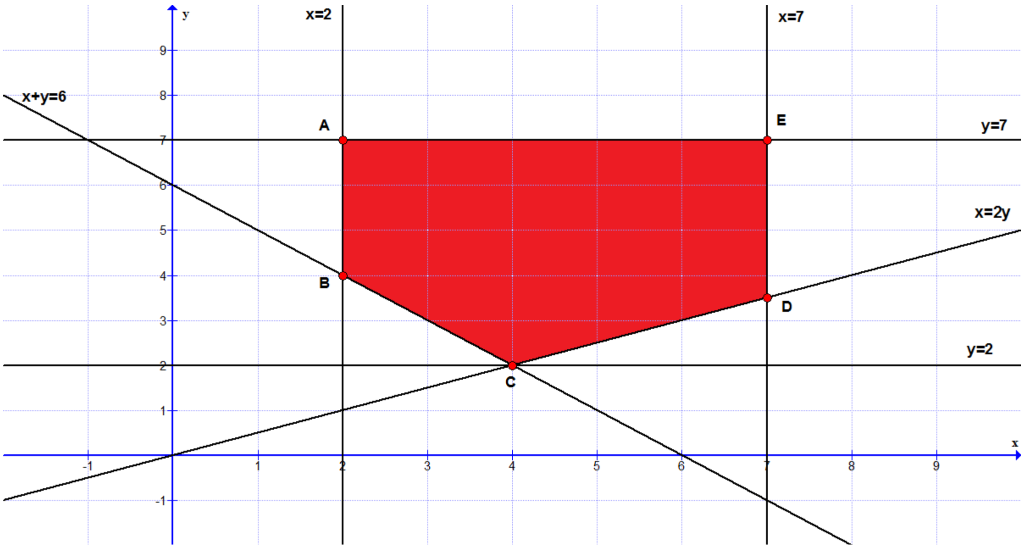
Unidades de F	Unidades de C
0	1,2,3,4 ó 5
1	0,1,2,3 ó 4
2	0,1,2,3 ó 4
3	0,1,2,3 ó 4
4	0,1 ó 2
5	0

El punto que da el beneficio máximo es B. Así deben fabricarse 4 muebles clásicos y 3 funcionales, con un beneficio de 3 · 4 + 2 · 3 = 18

10. Sean:
x = número de toneladas de aceite de almazara A
y = número de toneladas de aceite de almazara B.

z = 2000x + 3000y función objetivo. Las restricciones son:

$$\left.\begin{array}{l} 2 \le x \le 7 \\ 2 \le y \le 7 \\ x + y \ge 6 \\ x \le 2y \\ x \ge 0, y \ge 0 \end{array}\right\} \text{y, por tanto, la región factible es:}$$



Evaluamos la función objetivo en cada uno de los vértices:

$$\begin{array}{l} A(2,7) \to Z = 2000 \cdot 2 + 3000 \cdot 7 = 25000 \\ B(2,4) \to Z = 2000 \cdot 2 + 3000 \cdot 4 = 16000 \\ C(4,2) \to Z = 2000 \cdot 4 + 3000 \cdot 2 = 14000 \\ D(7,7) \to Z = 2000 \cdot 7 + 3000 \cdot 7 = 35000 \\ E(7,3'5) \to Z = 2000 \cdot 7 + 3000 \cdot 3,5 = 24500 \end{array}$$

El mínimo se alcanza en el vértice C, por tanto, la cantidad de aceite será de 4 toneladas de la almazara A y 2 toneladas de la almazara B.

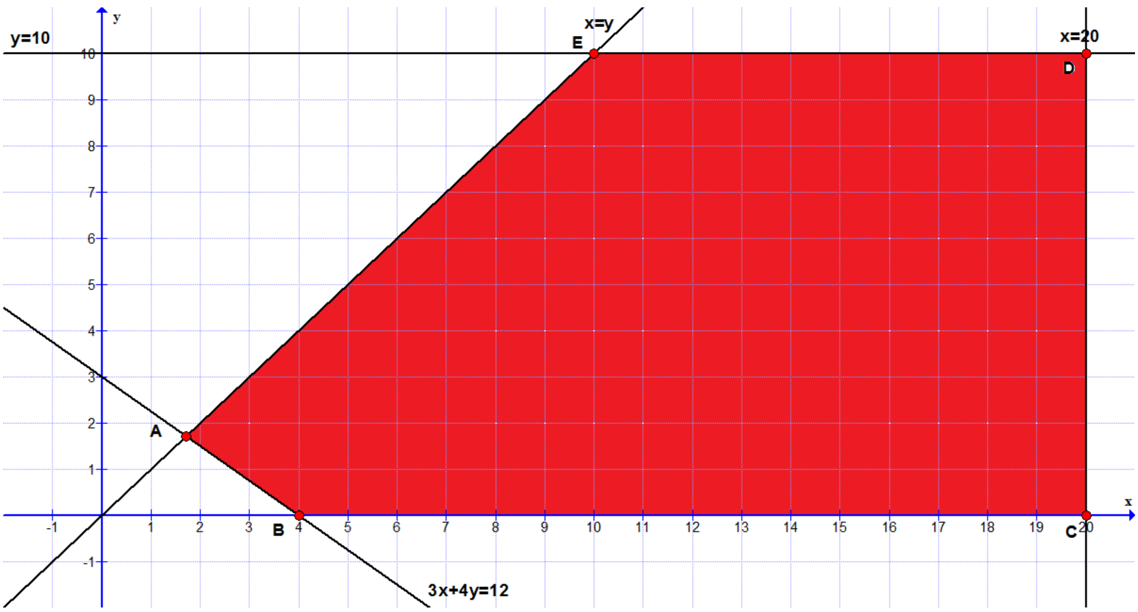
11. Sean:

x = número de coches del modelo A
y = número de coches del modelo B

z = 15000x + 20000y función objetivo

Las restricciones:

$$\left.\begin{array}{l} x \le 20 \\ y \le 10 \\ x \ge y \\ 15000x + 20000y \ge 60000 \to 3x + 4y \ge 12 \\ x \ge 0, y \ge 0 \end{array}\right\} \text{la región factible es:}$$



Evaluamos la función objetivo en cada uno de los vértices:

$A\left(\frac{12}{7}, \frac{12}{7}\right) \to$ z = 15000•12/7 + 20000•12/7 = 60.000
$B(4,0) \to$ z = 15000•4 + 20000•0 = 60.000
$C(20,0) \to$ z = 15000•20 + 20000•0 = 300.000
$D(20,10) \to$ z = 15000•20 + 20000•10 = 500.000
$E(10,10) \to$ z = 15000•10 + 20000•10 = 350.000

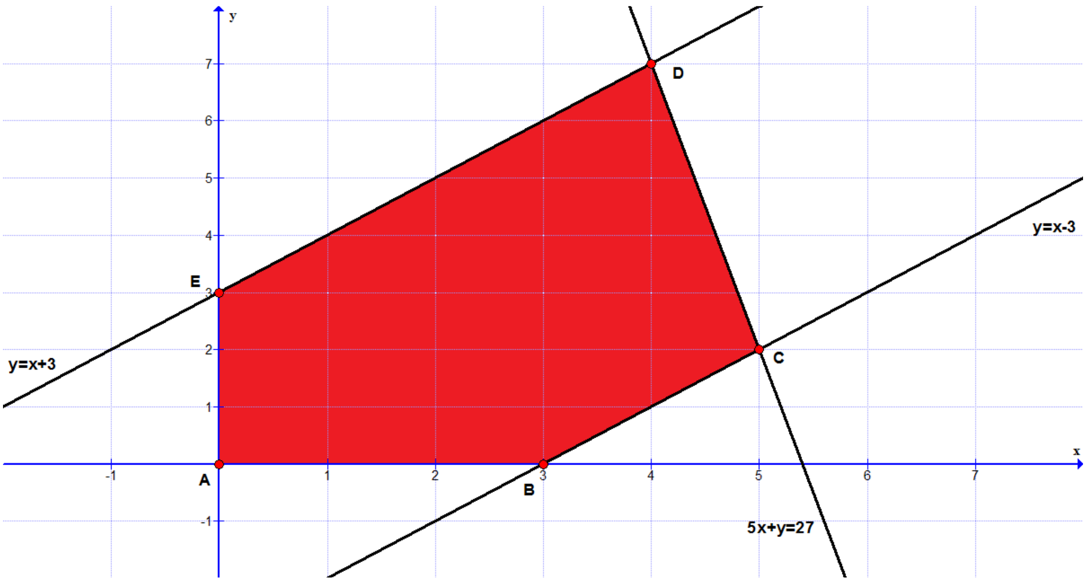
El máximo se alcanza en el vértice D, por tanto, el número de coches será de 20 del modelo A y 10 del modelo B, con un importe de 500000 €.

12. Sean:

x = número de mensajes
y = número de llamadas
z = 0,15x + 0,25y función objetivo

Restricciones:

$$\left.\begin{array}{l} x \geq 0 \\ y \geq 0 \\ x - 3 \leq y \leq x + 3 \\ 5x + y \leq 27 \end{array}\right\}$$ y la región factible es, por tanto:



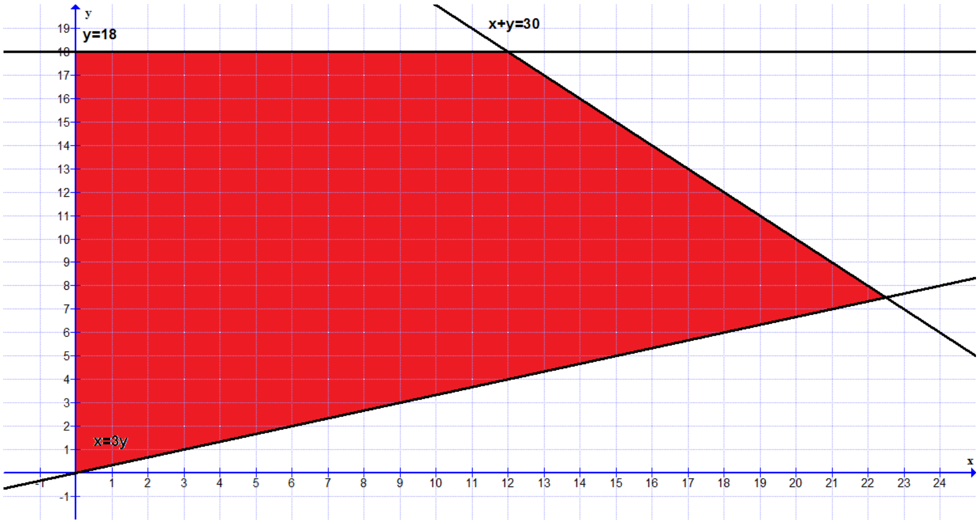
El máximo se alcanza en el vértice D, por tanto, el número de mensajes será de 4 y el número de llamadas de 7, con un importe de 2,35 €.

13. Sean:

x = número de Tm de rape
y = número de Tm de merluza

z = 15x + 10y función objetivo

Restricciones: $$\left.\begin{array}{l} x \geq 0 \\ y \geq 0 \\ x + y \leq 30 \\ x \leq 3y \\ y \leq 18 \end{array}\right\}$$ y la región factible:



El número de Tm de rape será de 22,5 y el número de Tm de merluza de 7,5.