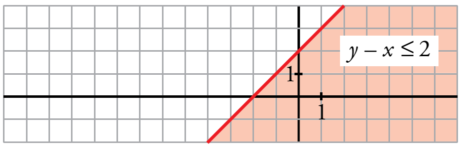
Resuelve

Página 107

Resolución de inecuaciones lineales

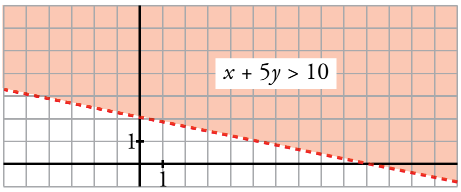
■ **Para representar $x - y \le 2$, representa la recta de ecuación $y - x = 2$. Después, para decidir a cuál de los dos semiplanos corresponde la inecuación, toma un punto cualquiera exterior a la recta y comprueba si sus coordenadas verifican o no la desigualdad.**



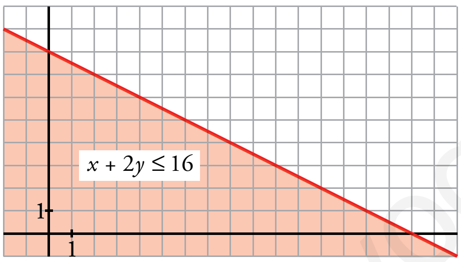
■ **Representa, de forma análoga, las siguientes inecuaciones:**

a) $x + 5y > 10$ **b)** $x + 2y \le 16$ **c)** $2x + y \le 20$

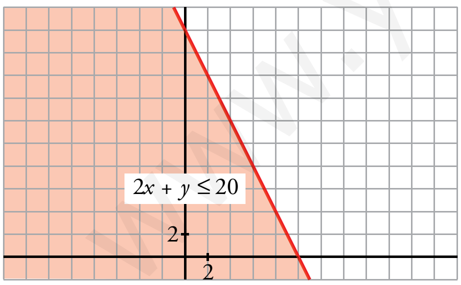
a)



b)



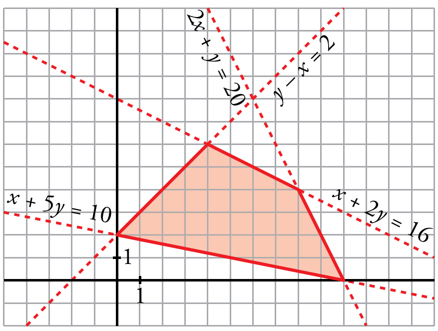
c)



Resolución de sistemas de inecuaciones

■ **Representa el recinto formado por las siguientes condiciones:**

$$\begin{cases} y - x \le 2 \\ x + 5y \ge 10 \\ x + 2y \le 16 \\ 2x + y \le 20 \end{cases}$$



2 Programación lineal para dos variables. Enunciado general

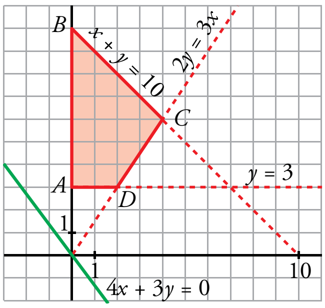
Página 116

1 Representa la región definida por el siguiente sistema de inecuaciones:

$$\boldsymbol{x \ge 0, \quad y \ge 3, \quad x + y \le 10, \quad 2y \ge 3x}$$

Averigua en qué puntos se hace máxima y mínima la función $F(x, y) = 4x + 3y$.

Representamos las rectas y vemos en qué puntos se cortan:



$\left.\begin{array}{l} x = 0 \\ y = 3 \end{array}\right\} A(0, 3)$ $\qquad$ $\left.\begin{array}{l} x = 0 \\ x + y = 10 \end{array}\right\} B(0, 10)$

$\left.\begin{array}{l} x + y = 10 \\ 2y = 3x \end{array}\right\} C(4, 6)$ $\qquad$ $\left.\begin{array}{l} 2y = 3x \\ y = 3 \end{array}\right\} D(2, 3)$

$F(A) = F(0, 3) = 9 \qquad F(B) = F(0, 10) = 30$

$F(C) = F(4, 6) = 34 \qquad F(D) = F(2, 3) = 17$

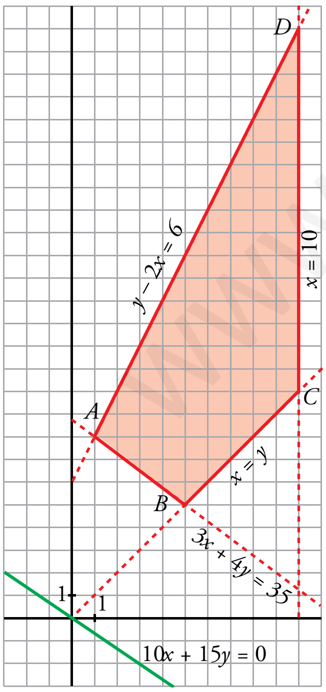
$F(x, y) = 4x + 3y$ se hace mínima en $A(0, 3)$ y máxima en $C(4, 6)$.

2 Representa el recinto definido por estas inecuaciones:

$$\boldsymbol{x \ge 0 \qquad y \ge 0 \qquad x \le 10 \qquad x \le y \qquad y - 2x \le 6 \qquad 3x + 4y \ge 35}$$

¿En qué punto la función $F(x, y) = 10x + 15y$ **alcanza el valor máximo?**

Representamos las rectas y vemos en qué puntos se cortan:



$\left.\begin{array}{l} y - 2z = 6 \\ 3x + 4y = 35 \end{array}\right\} A(1, 8)$

$\left.\begin{array}{l} 3x + 4y = 35 \\ x = y \end{array}\right\} B(5, 5)$

$\left.\begin{array}{l} x = y \\ x = 10 \end{array}\right\} C(10, 10)$

$\left.\begin{array}{l} x = 10 \\ y - 2x = 6 \end{array}\right\} D(10, 26)$

$F(A) = F(1, 8) = 130$

$F(B) = F(5, 5) = 125$

$F(C) = F(10, 10) = 250$

$F(D) = F(10, 26) = 490$

Representamos después la dirección de las rectas que son de la forma $10x + 15y = K$.

$F(x, y) = 10x + 15y$ alcanza el valor máximo en el punto $D(10, 26)$.

3 **En una confitería se elaboran tartas de NATA y de MANZANA. Cada tarta de nata requiere medio kilo de azúcar y 8 huevos; y una de manzana, 1 kg de azúcar y 6 huevos. En la despensa quedan 10 kg de azúcar y 120 huevos.**

¿Cuántas tartas de cada tipo se deben hacer si pretendemos que los ingresos por su venta sean máximos?

Considera tres casos:

a) Sus precios son: T. NATA, 12 €; T. MANZANA, 15 €.

b) Sus precios son: T. NATA, 16 €; T. MANZANA, 12 €.

c) Sus precios son: T. NATA, 15 €; T. MANZANA, 10 €.

Anotamos los datos en una tabla:

	CANTIDAD (kg)	HUEVOS	AZÚCAR
NATA	x	$8x$	$(1/2)x$
MANZANA	y	$6y$	$1y$

Restricciones del problema:

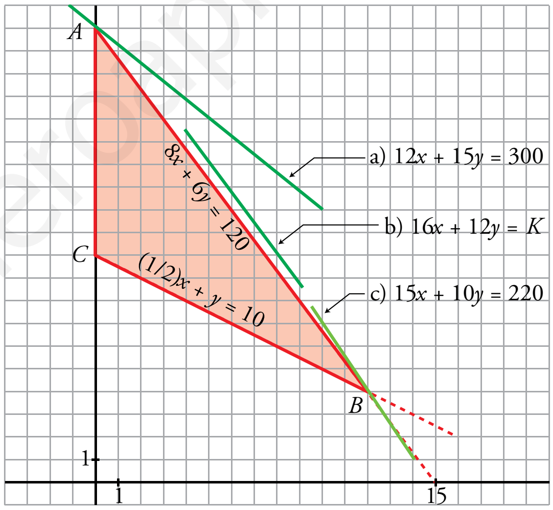
$$\begin{cases} x \ge 0 \\ y \ge 0 \\ 8x + 6y \le 120 \\ (1/2)x + y \le 10 \end{cases}$$

Dibujamos las rectas y hallamos los puntos de intersección:

$$\left.\begin{array}{l} x = 0 \\ 8x + 6y = 120 \end{array}\right\} A(0, 20)$$

$$\left.\begin{array}{l} 8x + 6y = 120 \\ (1/2)x + y = 10 \end{array}\right\} B(12, 4)$$

$$\left.\begin{array}{l} (1/2)x + y = 10 \\ x = 0 \end{array}\right\} C(0, 10)$$



a) Función objetivo: $F_1(x, y) = 12x + 15y$. Dibujamos la dirección de $12x + 15y = K$ trazando $12x + 15y = 300$. $F_1(x, y)$ alcanza el máximo en el punto $A(0, 20)$. Es decir, hay que hacer 20 tartas de manzana y ninguna de nata.

b) Función objetivo: $F_2(x, y) = 16x + 12y$. Dibujamos la dirección de $16x + 12y = K$. El máximo para $F_2(x, y)$ se consigue en cualquier punto, de coordenadas enteras, del lado que pasa por los puntos $A(0, 20)$ y $B(12, 4)$. Además de estas dos, las soluciones son (3, 16), (6, 12) y (9, 8) (la primera coordenada indica las tartas de nata que habría que hacer y la segunda, las tartas de manzana).

c) Función objetivo: $F_3(x, y) = 15x + 10y$. Dibujamos la dirección de $15x + 10y = K$ trazando la recta $15x + 10y = 220$. El máximo de $F_3(x, y)$ está en $B(12, 4)$: 12 tartas de nata y 4 de manzana.

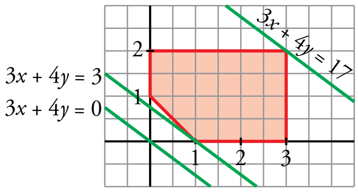
Ejercicios y problemas resueltos

Página 117

1. Optimización sin contexto

Hazlo tú. En el mismo recinto, ¿para qué valores es máxima la función $z = 3x + 4y$? ¿Y mínima?

$z = 3x + 4y$



Obtenemos el máximo en el vértice (3, 2):

$$z(3, 2) = 3 \cdot 3 + 4 \cdot 2 = 17$$

El mínimo está en el vértice (1, 0), en el que:

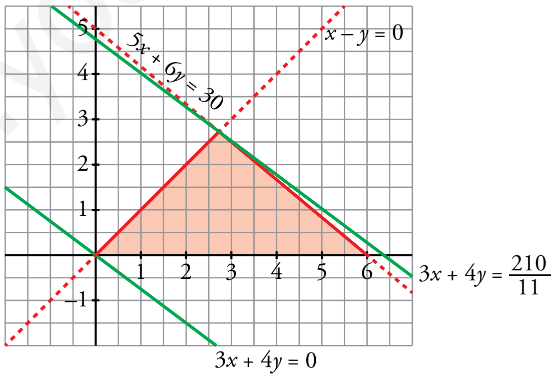
$$z(1, 0) = 3 \cdot 1 + 4 \cdot 0 = 3$$

2. Optimización sin contexto

Hazlo tú. Con la misma función $F(x, y)$ haz lo mismo para el siguiente recinto:

$$5x + 6y \le 30; \quad x - y \ge 0; \quad x \ge 0; \quad y \ge 0$$

$F(x, y) = 3x + 4y$



Obtenemos el máximo en el vértice $\left(\frac{30}{11}, \frac{30}{11}\right)$:

$$F\left(\frac{30}{11}, \frac{30}{11}\right) = 3 \cdot \frac{30}{11} + 4 \cdot \frac{30}{11} = \frac{210}{11} = 19,1$$

El mínimo está en el vértice (0, 0), en el que:

$$F(0, 0) = 3 \cdot 0 + 4 \cdot 0 = 0$$

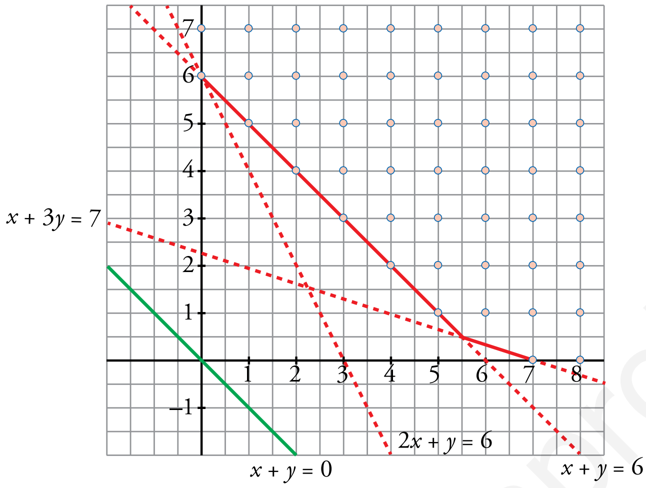
3. Puntos de coordenadas enteras

Hazlo tú. Calcula x e y que hacen máxima y mínima la función $z = x + y$ sujeta a estas restricciones: x e y deben ser números naturales y además:

$$x + y \geq 6;\ \ 2x + y \geq 6;\ \ x + 3y \geq 7$$

Como deben ser números naturales, añadimos las restricciones: $x \geq 0$, $y \geq 0$.

La región que se obtiene es:



Tomamos una recta paralela a la función objetivo y vemos que, al trasladarla, los primeros puntos de la región factible por los que pasa son los de la recta $x + y = 6$.

Por tanto, el valor mínimo se obtiene en los puntos (0, 6), (1, 5), (2, 4), (3, 3), (4, 2) y (5, 1).

No hay máximo. La función $x + y$ se puede hacer tan grande como se quiera en el recinto propuesto.

Página 118

4. Coste mínimo

Hazlo tú. En una granja hay un total de 9 000 conejos. La dieta mensual mínima que debe consumir cada conejo es de 48 unidades de hidratos de carbono y 60 unidades de proteínas. En el mercado hay dos productos (A y B) que aportan estas necesidades de consumo. Cada envase de A contiene 2 unidades de hidratos de carbono y 4 unidades de proteínas y cada envase de B contiene 3 unidades de hidratos de carbono y 3 unidades de proteínas. Cada envase de A cuesta 0,24 euros y cada envase de B cuesta 0,20 euros.

Calcula el número de envases de cada tipo que se debe adquirir para que el coste sea mínimo. Halla el valor de dicho coste mensual mínimo.

x = envases del producto A

y = envases del producto B

Hacemos una tabla con los datos:

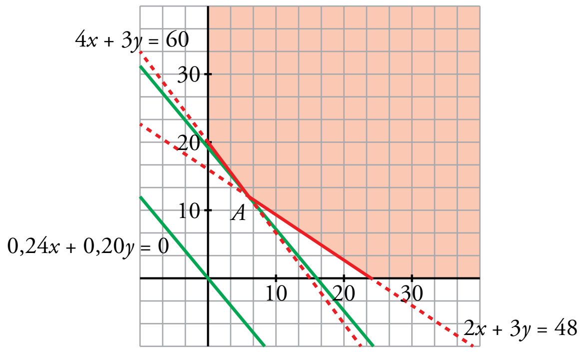
	HIDRATOS DE CARBONO	PROTEÍNAS	COSTE (€)
ENVASE DE A	2	4	0,24
ENVASE DE B	3	3	0,20

Las restricciones son:

$$\begin{cases} 2x + 3y \geq 48 \\ 4x + 3y \geq 60 \\ x \geq 0 \\ y \geq 0 \end{cases}$$

El coste que hay que minimizar es: Coste $= 0{,}24x + 0{,}20y$

La región factible es:



Tomamos una recta paralela a la función objetivo y vemos que al trasladarla, el primer punto de la región factible por donde pasa es su vértice $A(6, 12)$ (corte de las rectas $2x + 3y = 48$ y $4x + 3y = 60$). Este será el valor mínimo.

Es decir, para cada conejo, para minimizar el coste, hay que comprar 6 envases de tipo A y 12 de tipo B. Para 9 000 conejos habrá que comprar $6 \cdot 9\,000 = 54\,000$ envases de tipo A y $12 \cdot 9\,000 = 108\,000$ envases de tipo B.

El coste mensual mínimo será:

$$\text{Coste} = 0{,}24 \cdot 54\,000 + 0{,}20 \cdot 108\,000 = 34\,560 \text{ €}$$

Página 119

5. Beneficio máximo

Hazlo tú. En la fabricación de piensos se utilizan tres ingredientes, P, Q y R. Se dispone de 90 toneladas de P, 90 de Q y 70 de R. Se desea fabricar dos tipos de pienso, M_1 y M_2.

Una vagoneta de pienso M_1 requiere 2 t de P, 1 t de Q y 1 t de R y se vende a 1 200 €, y una vagoneta de M_2 requiere 1 t de P, 2 t de Q y 1 t de R, y se vende a 1 000 €.

¿Cuántas toneladas de cada pienso deben facturarse para obtener el mayor beneficio?

x = toneladas de pienso M_1

y = toneladas de pienso M_2

Hacemos un tabla con los datos:

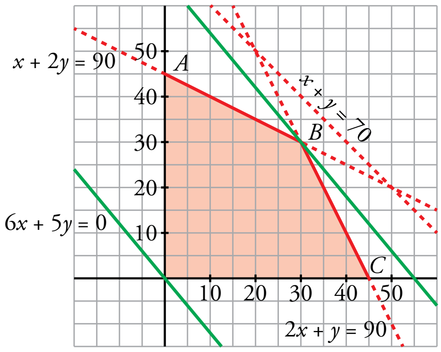
	INGREDIENTE $P(t)$	INGREDIENTE $Q(t)$	INGREDIENTE $R(t)$	COSTE (€)
VAGONETA DE PIENSO M_1	2	1	1	1 200
VAGONETA DE PIENSO M_2	1	2	1	1 000

Las restricciones son:

$$\begin{cases} 2x + y \le 90 \\ x + 2y \le 90 \\ x + y \le 70 \\ x \ge 0 \\ y \ge 0 \end{cases}$$

Beneficio que se quiere maximizar: $z = 1\,200x + 1\,000y$ en euros.

La representación de la región de validez y la función objetivo es:



El último punto de la región factible en el que tocan las rectas paralelas a la función objetivo es el vértice $B(30, 30)$, punto en el que z será máxima.

Por tanto, deben facturarse 30 toneladas de M_1 y 30 toneladas de M_2.

6. Solución múltiple

Hazlo tú. Un tendero va al mercado central con su furgoneta, que puede cargar 700 kg, y con 500 € en el bolsillo, a comprar fruta para su tienda. Encuentra las manzanas a 0,80 €/kg y las naranjas a 0,50 €/kg. El tendero cree que podrá vender las manzanas a 0,88 €/kg y las naranjas a 0,55 €/kg. ¿Qué cantidad de manzanas y de naranjas le conviene comprar si quiere obtener el mayor beneficio posible?

x = cantidad de manzanas (kg)

y = cantidad de naranjas (kg)

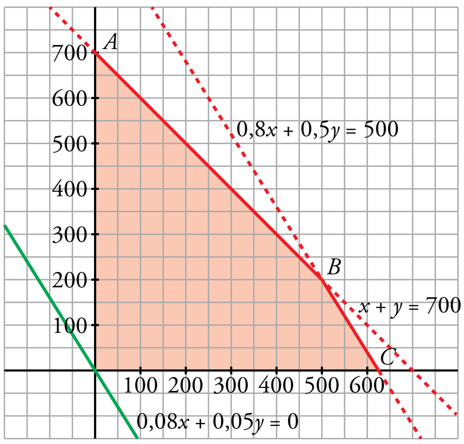
Las restricciones son:

$$\begin{cases} x + y \le 700 \\ 0,8x + 0,5y \le 500 \\ x \ge 0 \\ y \ge 0 \end{cases}$$

Beneficio que se quiere maximizar:

$$z = 0{,}08x + 0{,}05y \text{ en euros.}$$

La representación de la región de validez y la función objetivo se muestra a la derecha:



Como la recta $0{,}8x + 0{,}5y = 500$ es paralela a la función de beneficio, cualquier punto del segmento BC es una solución válida. Es decir, cualquier cantidad de manzanas entre 500 kg y 625 kg y de naranjas entre 0 kg y 200 kg que verifique la igualdad $0{,}8x + 0{,}5y = 500$ conseguirá un beneficio máximo. Por ejemplo, comprar 500 kg de manzanas y 200 kg de naranjas, o 500 kg de manzanas y ninguna naranja, o 400 kg de manzanas y 360 kg de naranjas, hace que el beneficio que se obtiene en todos los casos sea máximo:

$$z = 0{,}08 \cdot 500 + 0{,}05 \cdot 200 = 50 \text{ €}$$

$$z = 0{,}08 \cdot 625 + 0{,}05 \cdot 0 = 50 \text{ €}$$

$$z = 0{,}08 \cdot 400 + 0{,}05 \cdot 360 = 50 \text{ €}$$

Página 120

7. Problema de transporte

Hazlo tú. **Una fábrica de tintas dispone de 1 000 kg del color A, 800 kg del color B y 300 kg del color C, con los que fabrica dos tipos de tinta, una para la etiqueta de un refresco y otra para un cartel. Cada bote de tinta de la etiqueta necesita 10 kg del color A, 5 kg del color B y 5 kg del color C y cada bote de tinta del cartel requiere 5 kg del A y 5 kg del B.**

La fábrica obtiene un beneficio de 30 € por cada bote de tinta para etiquetas y de 20 € por cada uno de tinta para carteles.

Si vende todos los botes fabricados, ¿cuántos botes de cada tipo de tinta debe fabricar para maximizar su beneficio? ¿Cuál es el beneficio máximo?

x = número de botes de tinta para etiquetas

y = número de botes de tinta para carteles

Hacemos una tabla con los datos:

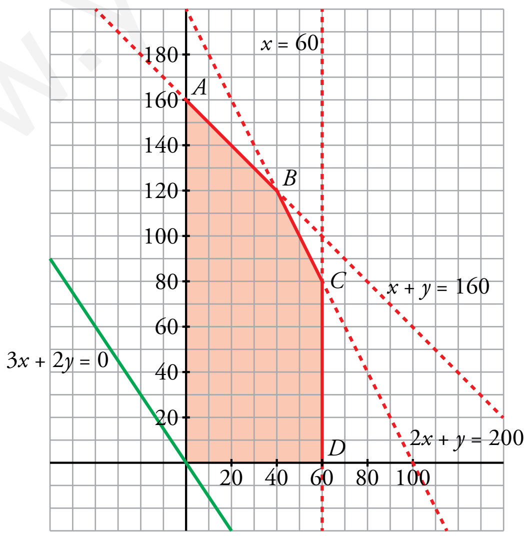
	TINTA A (kg)	TINTA B (kg)	TINTA C (kg)	BENEFICIO (€)
BOTE PARA ETIQUETAS	10	5	5	30
BOTE PARA CARTELES	5	5	0	20

Las restricciones son:

$$\begin{cases} 10x + 5y \le 1\,000 \\ 5x + 5y \le 800 \\ 5x \le 300 \\ x \ge 0 \\ y \ge 0 \end{cases}$$

Beneficio que se quiere maximizar: $z = 30x + 20y$ en euros.

La representación de la región de validez y la función de beneficio es:



Evidentemente, la recta variable $30x + 20y = K$ toma su valor máximo (dentro de los válidos) en el punto $B(40, 120)$, es decir, debe fabricar 40 botes para etiquetas y 120 botes para carteles para maximizar el beneficio.

El beneficio máximo será de $30 \cdot 40 + 20 \cdot 120 = 3\,600$ €.

Ejercicios y problemas guiados

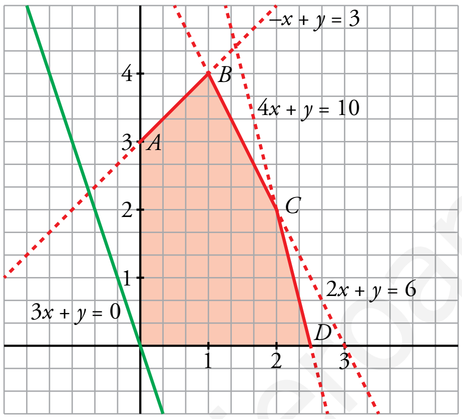
Página 121

1. Optimización de la función objetivo dada una región factible con datos continuos

Maximizar la función $F(x, y) = 6x + 2y - 7$ con las siguientes restricciones:

$$\begin{cases} 2x + y \le 6 \\ 4x + y \le 10 \\ -x + y \le 3 \\ x \ge 0 \\ y \ge 0 \end{cases}$$

La representación de la región de validez y la función objetivo es:



La recta variable $3x + y = K$ toma su valor máximo (dentro de los válidos) en el punto $C(2, 2)$.

El máximo es $F(2, 2) = 6 \cdot 2 + 2 \cdot 2 - 7 = 9$.

2. Optimización de la función objetivo dada una región factible con datos discretos

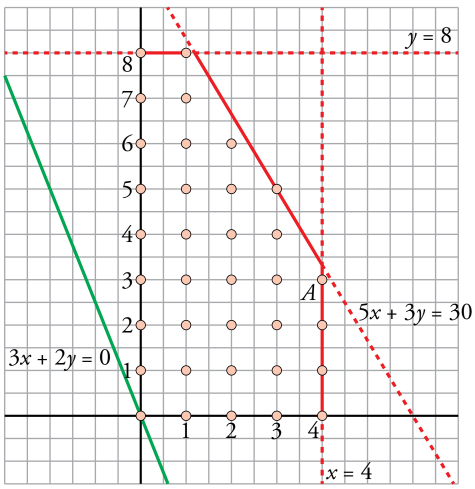
Maximizar $F(x, y) = 500x + 200y$ teniendo en cuenta que el conjunto de soluciones son puntos de coordenadas enteras y con las siguientes restricciones:

$$\begin{cases} 0 \le x \le 4 \\ 0 \le y \le 8 \\ 5x + 3y \le 30 \end{cases}$$

La representación de la región de validez y la función objetivo se muestra a la derecha:

La recta variable $500x + 200y = K$ toma su valor máximo (dentro de los válidos) en el punto $A(4, 3)$.

El máximo es $F(4, 3) = 500 \cdot 4 + 200 \cdot 3 = 2\,600$.



3. Mecánicos y electricistas

En una empresa van a trabajar mecánicos y electricistas. Por necesidad del mercado debe haber mayor o igual número de electricistas que de mecánicos, y el número de electricistas no debe superar el doble del de mecánicos. Se necesitan al menos 20 electricistas y no hay más de 30 mecánicos disponibles.

Si por cada mecánico se obtienen 2 000 € de beneficio mensual y por cada electricista, 2 500 €, ¿cuántos de cada clase se deben contratar para maximizar el beneficio?

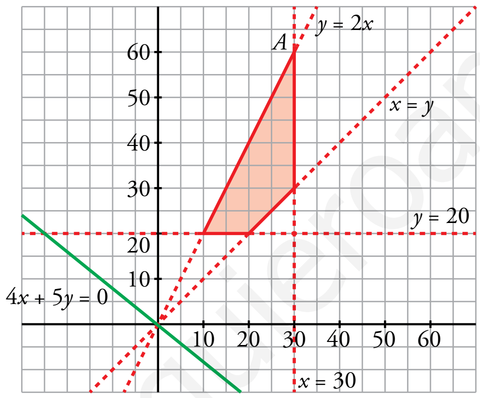
Llamamos x al número de mecánicos e y, al de electricistas.

Restricciones:

$$\begin{cases} x \le y \\ y \le 2x \\ y \ge 20 \\ x \le 30 \\ x \ge 0 \\ y \ge 0 \end{cases}$$

Función objetivo: $F(x, y) = 2000x + 2500y$

La representación de la región de validez y la función objetivo es:



La recta variable $2000x + 2500y = K$ toma su valor máximo (dentro de los válidos) en el punto $A(30, 60)$.

Hay que contratar 30 mecánicos y 60 electricistas para obtener un beneficio máximo.

4. Dos tipos de abonos

Ana debe fertilizar los terrenos de su finca con dos abonos, A y B. El abono A cuesta 0,9 €/kg y el B, 1,5 €/kg. El abono A tiene un 20 % de nitrógeno y un 10 % de fósforo, mientras que el B contiene un 18 % y un 15 %, respectivamente.

Los terrenos están bien fertilizados con al menos 180 kg de nitrógeno y 120 kg de fósforo.

¿Cuál es el gasto mínimo que debe hacer Ana para fertilizar de manera correcta sus terrenos?

Llamamos x al número de kilos de abono A e y al número de kilos de abono B.

Hacemos una tabla con los datos:

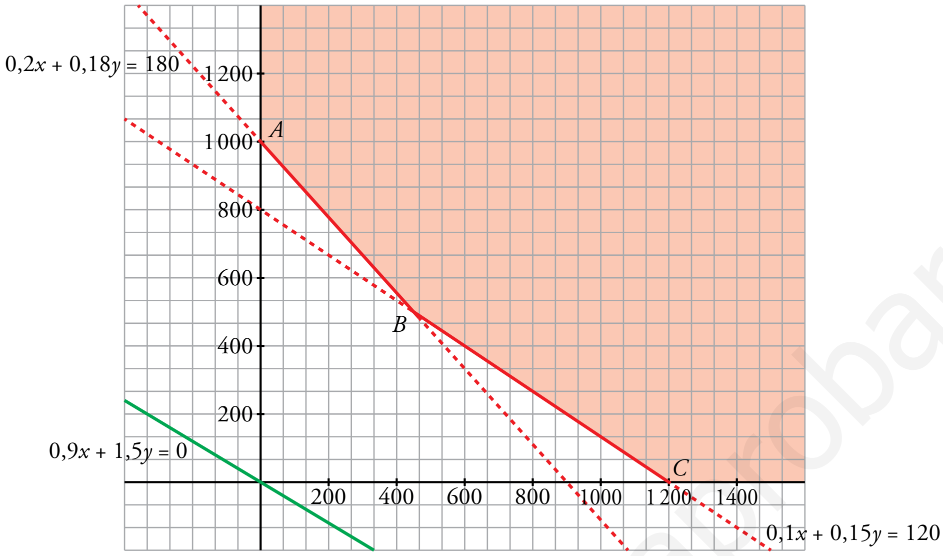
	FERTILIZANTE *A*	FERTILIZANTE *B*	NECESIDADES
NITRÓGENO	20 %	18 %	180 kg
FÓSFORO	10 %	15 %	120 kg
COSTE	0,9	1,5	

La función objetivo es $F(x, y) = 0{,}9x + 1{,}5y$ en euros.

Las restricciones son:

$$\begin{cases} 0,2x + 0,18y \geq 180 \\ 0,1x + 0,15y \geq 120 \\ x \geq 0 \\ y \geq 0 \end{cases}$$

La representación de la región de validez y la función beneficio es:



La recta variable $0,9x + 1,5y = K$ toma su valor mínimo (dentro de los válidos) en el vértice $C(1\,200, 0)$.

Ana debe comprar solo 1 200 kg de fertilizante A para realizar un gasto mínimo.

Este gasto será de $F(1\,200, 0) = 0,9 \cdot 1\,200 = 1\,080$ €.

Ejercicios y problemas propuestos

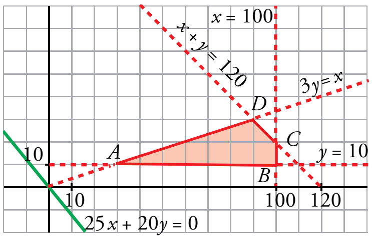
Página 122

Para practicar

1 **Maximiza la función $F(x, y) = 25x + 20y$ sometida a las siguientes restricciones:**

$$\begin{cases} x + y \le 120 \\ 3y \le x \\ x \le 100 \\ y \ge 10 \end{cases}$$

Dibujamos las rectas y hallamos los puntos de corte:



$\left.\begin{matrix} 3y = x \\ y = 10 \end{matrix}\right\} A(30, 10)$ $\quad \left.\begin{matrix} y = 10 \\ x = 100 \end{matrix}\right\} B(100, 10)$

$\left.\begin{matrix} x = 100 \\ x + y = 120 \end{matrix}\right\} C(100, 20)$ $\quad \left.\begin{matrix} x + y = 120 \\ 3y = x \end{matrix}\right\} D(90, 30)$

$F(A) = F(30, 10) = 950$

$F(B) = F(100, 10) = 2\,700$

$F(C) = F(100, 20) = 2\,900$

$F(D) = F(90, 30) = 2\,850$

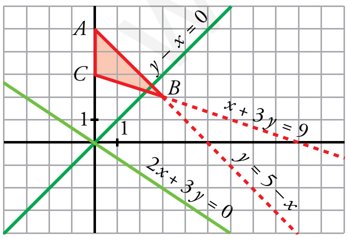
El máximo se alcanza en $C(100, 20)$ y vale 2 900.

2 **a) Maximiza y minimiza la función $F(x, y) = 2x + 3y$ con las siguientes restricciones:**

$$\begin{cases} x + y \le 5 \\ x + 3y \ge 9 \\ x \ge 0 \\ y \ge 0 \end{cases}$$

b) Haz lo mismo con la función $G(x, y) = y - x$.

Representamos las rectas y la región que cumple las condiciones del problema:



$\left.\begin{matrix} x = 0 \\ y = 5 - x \end{matrix}\right\} A(0, 5)$ $\quad \left.\begin{matrix} y = 5 - x \\ x + 3y = 9 \end{matrix}\right\} B(3, 2)$

$\left.\begin{matrix} x + 3y = 9 \\ x = 0 \end{matrix}\right\} C(0, 3)$

a) Dibujamos $2x + 3y = 0$ para ver la dirección de las rectas $2x + 3y = K$.

$F(A) = F(0, 5) = 15$; $F(B) = F(3, 2) = 12$; $F(C) = F(0, 3) = 9$.

El máximo de $F(x, y)$ se alcanza en $A(0, 5)$, y el mínimo, en $C(0, 3)$.

b) Dibujamos $y - x = 0$ para ver la dirección de las rectas $y - x = K$.

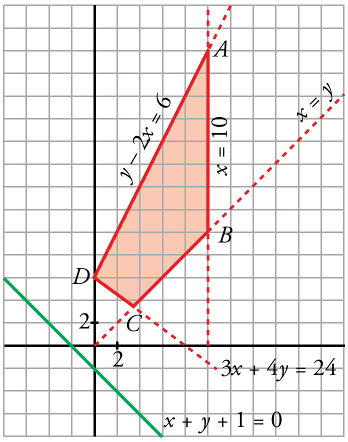
$G(A) = G(0, 5) = 5$; $G(B) = G(3, 2) = -1$; $G(C) = G(0, 3) = 3$.

El máximo de $G(x, y)$ se alcanza en $A(0, 5)$, y el mínimo, en $B(3, 2)$.

3 Maximiza la función $z = x + y + 1$ sujeta a las siguientes restricciones:

$$\begin{cases} 0 \le y \\ 0 \le x \le 10 \\ x \le y \\ y - 2x \le 6 \\ 3x + 4y \ge 24 \end{cases}$$

Representamos las rectas y la dirección de $x + y + 1 = K$. Obtenemos la región que cumple las condiciones del problema:



$\left.\begin{array}{l} y - 2x = 6 \\ x = 10 \end{array}\right\} A(10, 26)$

$\left.\begin{array}{l} x = 10 \\ x = y \end{array}\right\} B(10, 10)$

$\left.\begin{array}{l} x = y \\ 3x + 4y = 24 \end{array}\right\} C\left(\dfrac{24}{7}, \dfrac{24}{7}\right)$

$\left.\begin{array}{l} 3x + 4y = 24 \\ y - 2x = 6 \end{array}\right\} D(0, 6)$

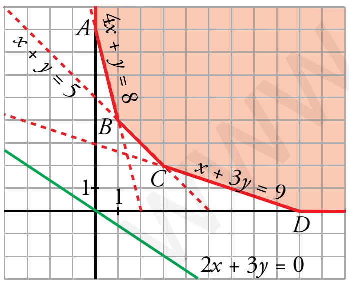
$z = F(x, y) = x + y + 1$

$F(A) = F(10, 26) = 37$; $F(B) = F(10, 10) = 21$; $F(C) = F\left(\dfrac{24}{7}, \dfrac{24}{7}\right) = \dfrac{55}{7}$; $F(D) = F(0, 6) = 7$

El máximo se alcanza en el punto $A(10, 26)$ y vale 37.

4 En la región determinada por $x + y \ge 5$, $x + 3y \ge 9$, $4x + y \ge 8$, $x \ge 0$ e $y \ge 0$, halla el punto en el que la función $F(x, y) = 2x + 3y$ alcanza su valor mínimo. ¿Puede alcanzar su máximo en esa región?

Representamos las rectas, la dirección de $2x + 3y = K$ y la región que cumple las condiciones del problema, teniendo en cuenta que $x \ge 0$ e $y \ge 0$.



$\left.\begin{array}{l} x = 0 \\ 4x + y = 8 \end{array}\right\} A(0, 8)$

$\left.\begin{array}{l} 4x + y = 8 \\ x + y = 5 \end{array}\right\} B(1, 4)$

$\left.\begin{array}{l} x + y = 5 \\ x + 3y = 9 \end{array}\right\} C(3, 2)$

$\left.\begin{array}{l} x + 3y = 9 \\ y = 0 \end{array}\right\} D(9, 0)$

El mínimo de $F(x, y)$ se encuentra en uno de los vértices de la región factible:

$F(A) = F(0, 8) = 24$

$F(B) = F(1, 4) = 14$

$F(C) = F(3, 2) = 12$

$F(D) = F(9, 0) = 18$

El mínimo se alcanza en el punto $C(3, 2)$ y vale 12.

No tiene máximo, pues hay puntos en la región en los que $F(x, y)$ toma valores tan grandes como queramos.

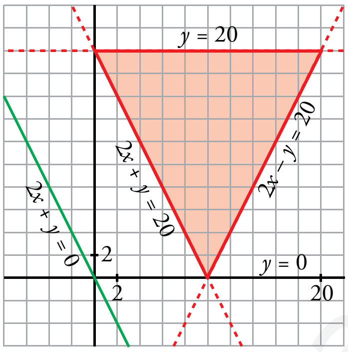
5 **Calcula los puntos del siguiente recinto:**

$$\begin{cases} 2x + y \geq 20 \\ 2x - y \leq 20 \\ 0 \leq y \leq 20 \end{cases}$$

que hacen mínima o máxima la función $z = 2x + y$. ¿Cuántas soluciones hay?

Representamos las rectas $\begin{cases} 2x + y = 20 \\ 2x - y = 20 \\ y = 20 \\ y = 0 \end{cases}$ y obtenemos la región que cumple las restricciones dadas.

Representamos la dirección de las rectas $2x + y = K$ dibujando $2x + y = 0$. Esta recta es paralela a $2x + y = 20$, que determina uno de los lados del recinto.



Hay infinitos puntos que hacen mínima la función: todos los que están sobre el segmento de recta $2x + y = 20$, con $0 \leq x \leq 10$.

El máximo se alcanza en el punto de intersección de las rectas:

$$\left. \begin{array}{r} 2x - y = 20 \\ y = 20 \end{array} \right\} \text{ Punto } (20, 20)$$

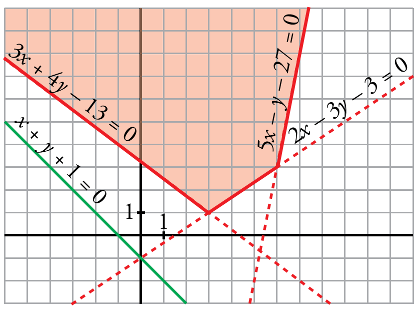
6 **¿Es posible maximizar y minimizar la función $z = x + y + 1$ sujeta a estas restricciones?:**

$$\begin{cases} 3x + 4y - 13 \geq 0 \\ 2x - 3y - 3 \leq 0 \\ 5x - y - 27 \leq 0 \end{cases}$$

Para obtener el recinto que cumple las restricciones del problema, representamos las rectas:

$$\begin{cases} 3x + 4y - 13 = 0 \\ 2x - 3y - 3 = 0 \\ 5x - y - 27 = 0 \end{cases}$$

Para ver la dirección de $z = x + y + 1$, representamos la recta $x + y + 1 = 0$.



No existe máximo ni mínimo.

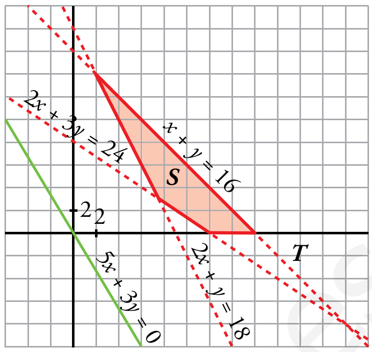
7 **Las rectas $2x + y = 18$, $2x + 3y = 24$ y $x + y = 16$ se cortan dos a dos en tres puntos que son los vértices de un triángulo *T*. Sea *S* la intersección del triángulo *T* con el primer cuadrante. Halla el máximo de la función $z = 5x + 3y$ cuando x e y varían en *S*. Expresa el recinto mediante un sistema de inecuaciones.**

Representamos las rectas:

$$\begin{cases} 2x + y = 18 \\ 2x + 3y = 24 \\ x + y = 16 \end{cases}$$

para obtener el triángulo *T* y la región que hemos sombreado, *S*.

Representamos la dirección de las rectas $z = 5x + 3y = K$ dibujando $5x + 3y = 0$.



El máximo se alcanza en el punto de corte de $x + y = 16$ con el eje *X*; es decir, en el punto (16, 0). El máximo vale $z = 5 \cdot 16 + 3 \cdot 0 = 80$.

El sistema de inecuaciones que representa el recinto es: $\begin{cases} x \geq 0, \ \ y \geq 0 \\ 2x + y \geq 18 \\ 2x + 3y \geq 24 \\ x + y \leq 16 \end{cases}$

8 **Dibuja el recinto determinado por:** $\begin{cases} x \geq 0; \ \ y \geq 0 \\ y - x + 1 \geq 0 \\ y - 4 \leq 0 \\ y + 2x - 5 \leq 0 \end{cases}$

a) Localiza los puntos de este recinto en los que la función objetivo $F(x, y) = x + y$ se hace máxima y mínima, respectivamente.

b) Sobre el mismo recinto, halla el máximo y el mínimo de la función $G(x, y) = 5x + y$.

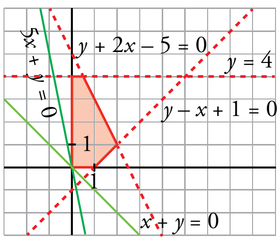
Representamos las rectas:

$$\begin{cases} x = 0, \ \ y = 0 \\ y - x + 1 = 0 \\ y - 4 = 0 \\ y + 2x - 5 = 0 \end{cases}$$

y obtenemos el recinto que cumple las condiciones del problema.

Representamos la dirección de las rectas $x + y = K$ dibujando la recta $x + y = 0$.

Representamos la dirección de las rectas $5x + y = K$ dibujando la recta $5x + y = 0$.



a) $F(x, y)$ alcanza el máximo en el punto de intersección de las rectas:

$$\left.\begin{array}{r} y + 2x - 5 = 0 \\ y = 4 \end{array}\right\} \left.\begin{array}{l} x = \dfrac{1}{2} \\ y = 4 \end{array}\right\} \text{ Punto } \left(\frac{1}{2}, 4\right)$$

$F(x, y)$ alcanza el mínimo en el punto (0, 0).

b) $G(x, y)$ alcanza el máximo en el punto de corte de las rectas:

$$\left.\begin{array}{r} y - x + 1 = 0 \\ y + 2x - 5 = 0 \end{array}\right\} \left.\begin{array}{l} x = 2 \\ y = 1 \end{array}\right\} \text{ Punto } (2,\ 1)$$

El máximo vale $G(2, 1) = 11$.

$G(x, y)$ alcanza el mínimo en el punto $(0, 0)$ y vale $G(0, 0) = 0$.

9 **Considera el triángulo de vértices (0, 0), (2, 8) y (10, 3). Determina razonadamente el punto en el que cada una de las siguientes funciones alcanza su máximo:**

a) $\boldsymbol{F(x, y) = -4x + y + 9}$

b) $\boldsymbol{F(x, y) = 4x + y + 12}$

Sabemos que el máximo se alcanza en algún vértice (o en un lado). Calculamos el valor de la función dada en cada uno de los vértices:

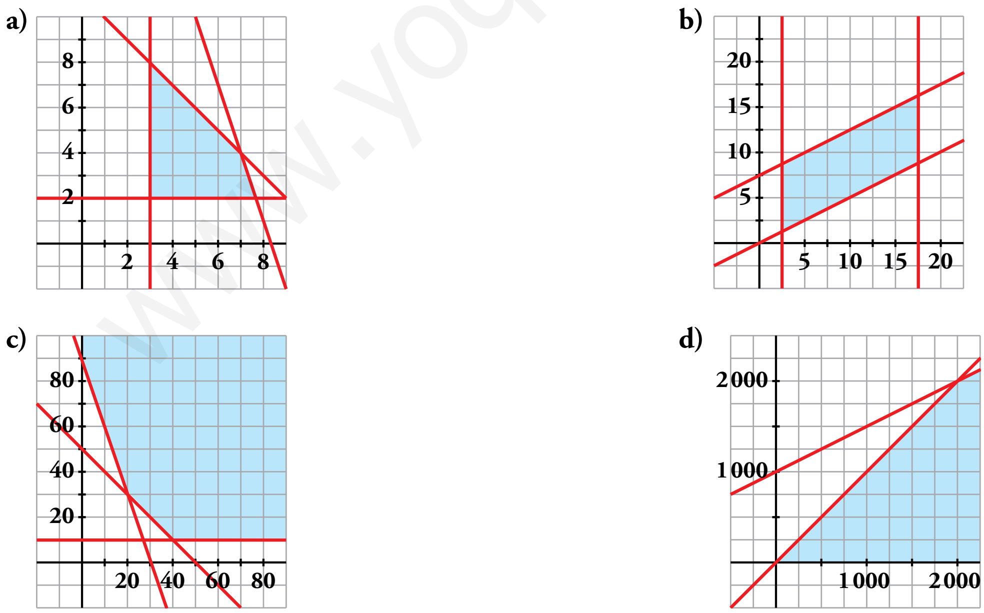
a) $F(x, y) = -4x + y + 9$

$$\left.\begin{array}{l} F(0, 0) = 9 \\ F(2, 8) = 9 \\ F(10, 3) = -28 \end{array}\right\}$$ Hay infinitos puntos que hacen máxima la función: todos los puntos del lado que une los vértices (0, 0) y (2, 8).

b) $F(x, y) = 4x + y + 12$

$$\left.\begin{array}{l} F(0, 0) = 12 \\ F(2, 8) = 28 \\ F(10, 3) = 55 \end{array}\right\}$$ La función alcanza el máximo en el punto (10, 3).

10 **Define mediante un sistema de inecuaciones cada uno de los recintos representados en las siguientes figuras:**



a) $\begin{cases} x \ge 3 \\ y \ge 2 \\ x + y \le 11 \\ 3x + y - 25 \le 0 \end{cases}$ b) $\begin{cases} x \ge 2,5 \\ x \le 17,5 \\ x - 2y \le 0 \\ x - 2y + 15 \ge 0 \end{cases}$ c) $\begin{cases} x \ge 0 \\ y \ge 10 \\ x + y \ge 50 \\ 3x + y - 90 \ge 0 \end{cases}$ d) $\begin{cases} y \le x \\ 2y - 2\,000 - x \le 0 \\ y \ge 0 \\ x \ge 0 \end{cases}$

11 **a) Calcula los puntos donde se hace máxima y mínima la función $F(x, y) = 2x + y$ para la región de validez del apartado a) del ejercicio anterior.**

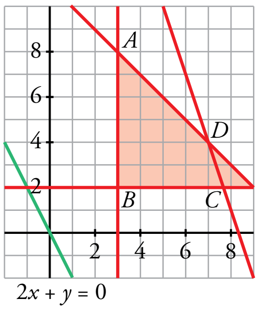
Haz lo mismo para estas otras funciones:

b) Para el apartado b): $G(x, y) = x + 2y$

c) Para el apartado c): $H(x, y) = 3x + 4y$

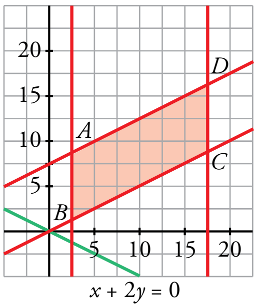
d) Para el apartado d): $I(x, y) = x - 3y$

a) La representación de la región de validez y la función objetivo es:



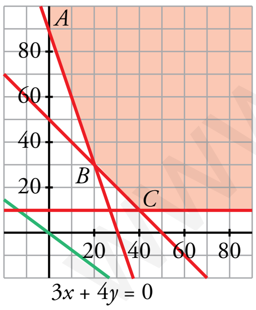
La recta variable $2x + y = K$ toma su valor máximo (dentro de los válidos) en el vértice $D(7, 4)$; y su valor mínimo en el vértice $B(3, 2)$.

b) La representación de la región de validez y la función objetivo es:



La recta variable $x + 2y = K$ toma su valor máximo (dentro de los válidos) en el vértice $D(17{,}5;\ 16{,}25)$; y su valor mínimo en el vértice $B(2{,}5;\ 1{,}25)$.

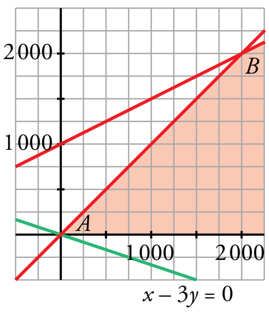
c) La representación de la región de validez y la función objetivo es:



La recta variable $3x + 4y = K$ toma su valor mínimo (dentro de los válidos) en el vértice $C(40, 10)$.

No hay máximo en esta región pues $H(x, y)$ se puede hacer tan grande como se quiera en el recinto propuesto.

d) La representación de la región de validez y la función objetivo es:



La recta variable $x - 3y = K$ no toma un valor máximo ni mínimo en esta región. La función $I(x, y)$ se puede hacer tan grande y tan pequeña como se quiera en el recinto propuesto.

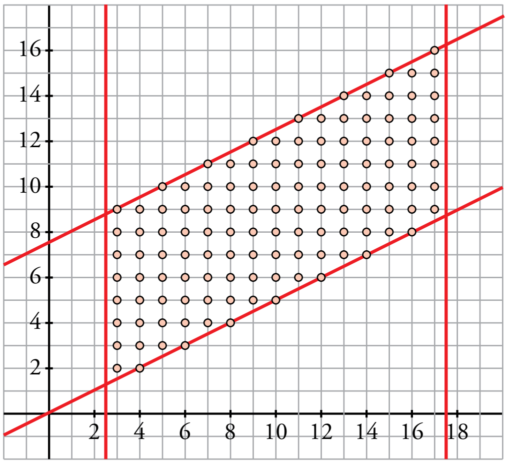
12 **Suponemos que en el apartado b) del ejercicio 10 solo consideramos los números enteros de la región de validez.**

a) Indica todas las posibles soluciones de dicha región.

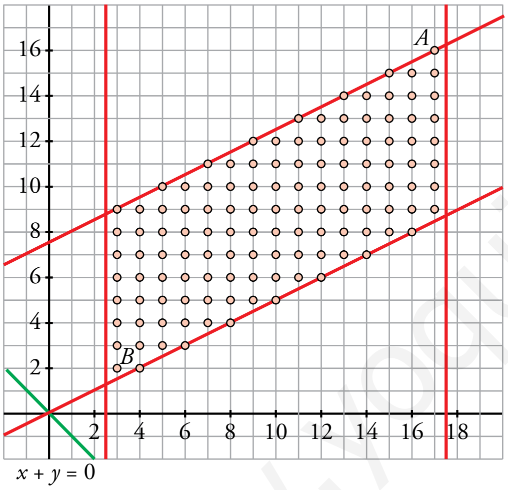
b) Calcula los puntos de la región que hacen máxima y mínima la función $F(x, y) = x + y$.

c) Halla los puntos que hacen máxima y mínima la función $G(x, y) = x - 2y$.

a) Las soluciones posibles son los puntos señalados en la siguiente figura:

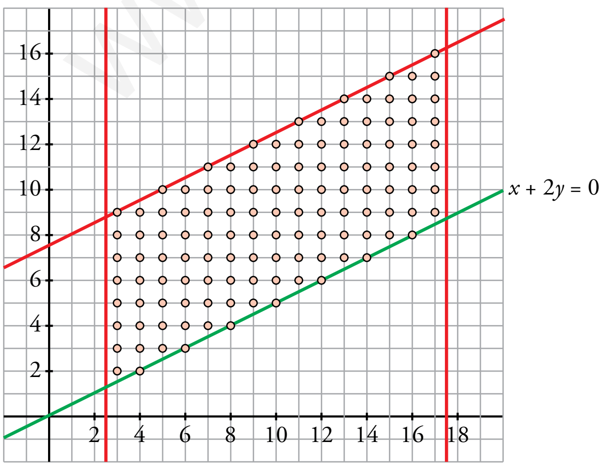


b)



La recta variable $x + y = K$ toma su valor máximo (dentro de los válidos) en el punto $A(17, 16)$, y su valor mínimo en el punto $B(3, 2)$.

c)



Como las rectas $x - 2y = 0$ y $x - 2y + 15 = 0$ son paralelas a la función objetivo, $G(x, y)$ alcanza el máximo en: (4, 2), (6, 3), (8, 4), (10, 5), (12, 6), (14, 7), (16, 8); y alcanza el mínimo en: (3, 9), (5, 10), (7, 11), (9, 12), (11, 13), (13, 14), (15, 15) y (17, 16).

Página 123

Para resolver

13 **Una persona tiene 15 000 € para invertir en dos tipos de acciones, A y B. El tipo A tiene un interés anual del 9 %, y el tipo B, del 5 %.**

Decide invertir, como máximo, 9 000 € en A, y como mínimo, 3 000 € en B. Además, quiere invertir en A tanto o más que en B.

a) Dibuja la región factible.

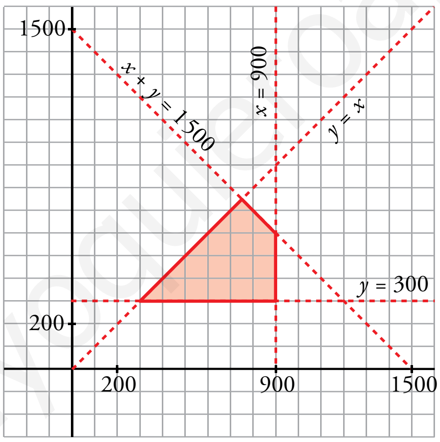
b) ¿Cómo debe invertir los 15 000 € para que el beneficio sea máximo? ¿Cuál es ese beneficio anual máximo?

a) Llamamos x a la cantidad de euros invertidos en acciones de tipo A e y a la cantidad de euros invertidos en acciones de tipo B.

Las restricciones del problema son:

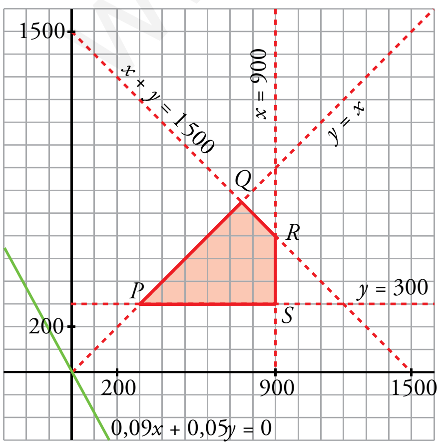
$$\begin{cases} x \geq 0 \\ x \leq 900 \\ y \geq 300 \\ x \geq y \\ x + y \leq 1500 \end{cases}$$

Representamos las rectas y obtenemos la región factible, que es la zona sombreada:



b) La función objetivo es $F(x, y) = 0{,}09x + 0{,}05y$.

Vemos cuál es el valor de esta función en los vértices de la región factible:



$P(300, 300)$ $\quad$ $S(900, 300)$

$$\left.\begin{array}{l} x + y = 1500 \\ x = y \end{array}\right\} Q(750, 750)$$

$$\left.\begin{array}{l} x + y = 1500 \\ x = 900 \end{array}\right\} R(900, 600)$$

$F(P) = F(300, 300) = 42$

$F(Q) = F(750, 750) = 105$

$F(R) = F(900, 600) = 111$

$F(S) = F(900, 300) = 96$

Para que el beneficio sea máximo, se deben invertir 900 € en acciones de tipo A y 600 € en acciones de tipo B. El beneficio máximo anual es de 111 €.

14 **Una confitería es famosa por sus dos especialidades en tartas: la tarta imperial y la tarta de lima.**

La tarta imperial requiere para su elaboración medio kilo de azúcar y 8 huevos, y tiene un precio de venta de 8 €. La tarta de lima necesita 1 kilo de azúcar y 8 huevos, y tiene un precio de venta de 10 €. En el almacén les quedan 10 kilos de azúcar y 120 huevos.

a) ¿Qué combinaciones de especialidades pueden hacer?

b) ¿Se cumplirían los requisitos si decidieran elaborar 3 tartas imperiales y 9 tartas de lima?

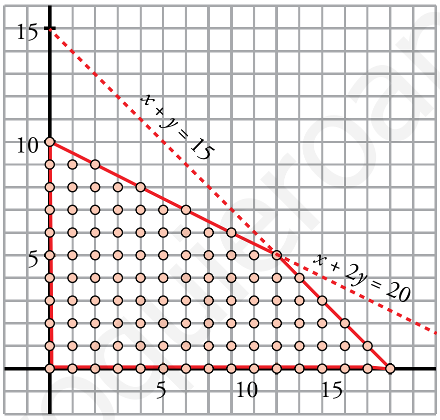
c) ¿Cuántas unidades de cada tipo de tarta debe elaborar la confitería para obtener el mayor ingreso por ventas?

a) Llamamos x al número de tartas de tipo imperial e y al número de tartas de lima.

Las restricciones del problema son:

$$\begin{cases} x \geq 0 \\ y \geq 0 \\ 0,5x + y \leq 10 \;\rightarrow\; x + 2y \leq 20 \\ 8x + 8y \leq 120 \;\rightarrow\; x + y \leq 15 \\ x,\ y \text{ enteros} \end{cases}$$

Representamos el conjunto de restricciones:



Las posibles combinaciones de especialidades que pueden hacer se corresponden con los puntos de coordenadas enteras dentro de este recinto, incluida la frontera.

b) Por tanto, sí se cumplirían los requisitos si decidieran elaborar 3 imperiales y 9 de lima.

c) La función que da los ingresos por ventas es $F(x, y) = 8x + 10y$.

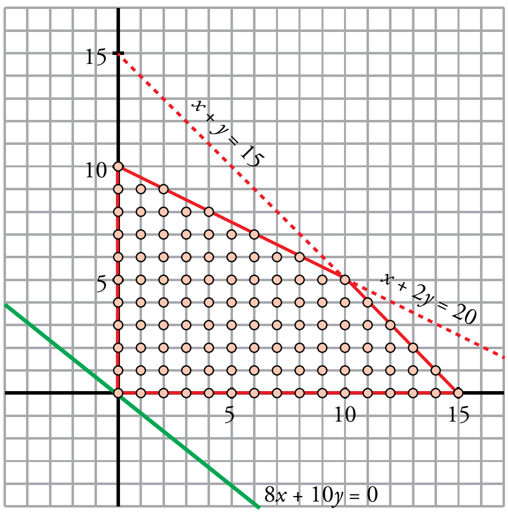
Tendremos que maximizar esta función, sujeta a las restricciones anteriores.

Representamos el conjunto de restricciones y la recta $8x + 10y = 0 \;\rightarrow\; 4x + 5y = 0$, que nos da la dirección de las rectas $8x + 10y = K$.

El máximo se alcanza en el punto de intersección de las rectas:

$$\left.\begin{array}{l} x + \ \ y = 15 \\ x + 2y = 20 \end{array}\right\} \text{ Punto } (10, 5)$$

Por tanto, han de fabricar 10 tartas imperiales y 5 de lima.



15 **Una persona quiere invertir 100 000 € en dos tipos de acciones A y B. Las de tipo A tienen más riesgo, pero producen un beneficio del 10 %. Las de tipo B son más seguras, pero producen solo el 7 % nominal.**

Decide invertir como máximo 60 000 € en la compra de acciones A y, por lo menos, 20 000 € en la compra de acciones B. Además, quiere que lo invertido en A sea, por lo menos, igual a lo invertido en B.

¿Cómo debe invertir los 100 000 € para que el beneficio anual sea máximo?

Llamamos x al dinero invertido en acciones de tipo A e y al dinero invertido en acciones de tipo B (x e y en decenas de miles de euros).

Las restricciones del problema son:

$$\begin{cases} x + y \le 10 \\ 0 \le x \le 6 \\ y \ge 2 \\ x \ge y \end{cases}$$

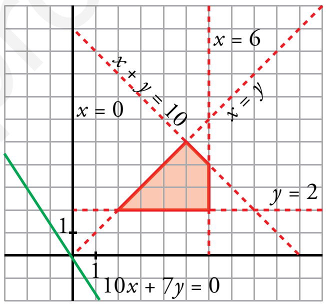
La función $F(x, y) = 0{,}1x + 0{,}07y$ da el beneficio anual y hemos de maximizarla, sujeta a las restricciones señaladas.

Representamos el recinto de restricciones y la recta $0{,}1x + 0{,}07y = 0 \rightarrow 10x + 7y = 0$, que da la dirección de las rectas $0{,}1x + 0{,}07y = K$.

El máximo se alcanza en el punto de intersección de las rectas:

$$\left.\begin{array}{l} x + y = 10 \\ x = 6 \end{array}\right\} \text{ Punto } (6, 4)$$

Por tanto, debe invertir 60 000 € en acciones de tipo A y 40 000 € en acciones de tipo B.



16 **Un orfebre fabrica dos tipos de joyas. La unidad de tipo A se hace con 1 g de oro y 1,5 g de plata, y se vende a 25 €. La de tipo B se vende a 30 € y lleva 1,5 g de oro y 1 g de plata. Si solo dispone de 750 g de cada metal, ¿cuántas joyas ha de fabricar de cada tipo para obtener el máximo beneficio?**

Llamamos x al número de unidades de tipo A e y al número de unidades de tipo B.

Las restricciones del problema son:

$$\begin{cases} x \ge 0, \quad y \ge 0 \\ x + 1{,}5y \le 750 \\ 1{,}5x + y \le 750 \end{cases}$$

La función que tenemos que maximizar, sujeta a las restricciones anteriores, es:

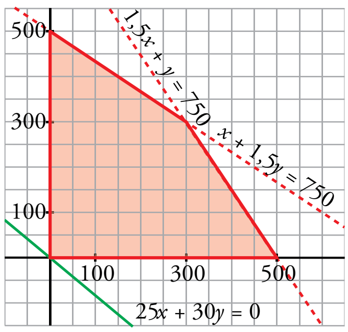
$$F(x, y) = 25x + 30y$$

Representamos el conjunto de restricciones y la recta $25x + 30y = 0 \rightarrow 5x + 6y = 0$, que da la dirección de las rectas $25x + 30y = K$.

El máximo se alcanza en el punto de corte de las rectas:

$$\left.\begin{array}{r} 1{,}5x + \quad y = 750 \\ x + 1{,}5y = 750 \end{array}\right\} \text{ Punto } (300, 300)$$

Por tanto, ha de fabricar 300 joyas de cada uno de los dos tipos.



17 **Un sastre tiene 80 m² de tela de algodón y 120 m² de tela de lana. Un traje de caballero requiere 1 m² de algodón y 3 m² de lana, y un vestido de señora necesita 2 m² de cada una de las telas.**

Halla el número de trajes y vestidos que debe confeccionar el sastre para maximizar los beneficios si un traje y un vestido se venden por el mismo precio.

Llamamos x al número de trajes e y al número de vestidos. Resumimos la información en la tabla siguiente:

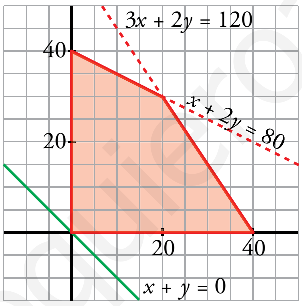
	ALGODÓN	LANA
TRAJE	x	$3x$
VESTIDO	$2y$	$2y$
TOTAL	$x + 2y$	$3x + 2y$

Las restricciones del problema son:

$$\begin{cases} x \ge 0, \quad y \ge 0 \\ x + 2y \le 80 \\ 3x + 2y \le 120 \end{cases}$$

Si llamamos k al beneficio obtenido por la venta de un traje o de un vestido, la función que nos da el beneficio total es $F(x, y) = k(x + y)$. Tenemos que maximizar esta función, sujeta a las restricciones anteriores.

Representamos el recinto de restricciones y la recta $k(x + y) = 0 \rightarrow x + y = 0$, que nos da la dirección de las rectas $k(x + y) = K$.



El máximo se alcanza en el punto de intersección de las rectas:

$$\left.\begin{array}{l} 3x + 2y = 120 \\ x + 2y = 80 \end{array}\right\} \text{ Punto } (20, 30)$$

Por tanto, debe confeccionar 20 trajes y 30 vestidos.

18 **Una fábrica produce chaquetas y pantalones. Tres máquinas (de cortar, coser y teñir) se emplean en la producción.**

- **Hacer una chaqueta representa usar la máquina de cortar 1 h; la de coser, 3 h, y la de teñir, 1 h.**
- **Hacer unos pantalones representa usar la máquina de cortar 1 h; la de coser, 1 h y la de teñir, ninguna hora.**

La máquina de teñir se puede usar durante 3 horas; la de coser, 11 horas, y la de cortar, 7 horas.

Todo lo que se fabrica es vendido y se obtiene un beneficio de 8 € por chaqueta y 5 € por pantalón. ¿Cómo emplearemos las máquinas para conseguir el beneficio máximo?

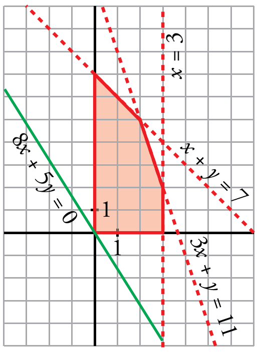
Llamamos x al número de chaquetas e y al número de pantalones.

Las restricciones del problema son:

$$\begin{cases} x \ge 0, \quad y \ge 0; \quad x, \; y \text{ enteros} \\ x \le 3 \\ x + y \le 7 \\ 3x + y \le 11 \end{cases}$$

$F(x, y) = 8x + 5y$ es la función que nos da el beneficio. Tenemos que maximizar esta función sujeta a las restricciones anteriores.

Representamos el conjunto de restricciones y la recta $8x + 5y = 0$, que nos da la dirección de las rectas que son de la forma $8x + 5y = K$.



El máximo se alcanza en el punto (2, 5). Por tanto, han de fabricarse 2 chaquetas y 5 pantalones.

19 **Un ganadero debe suministrar un mínimo diario de 4 mg de vitamina A y 6 mg de vitamina B en el pienso que da a su reses.**

Dispone para ello de dos tipos de pienso, P_1 y P_2, cuyos contenidos vitamínicos por kilogramo aparecen en la tabla.

	A	B
P_1	2	6
P_2	4	3

El kilogramo de pienso P_1 vale 0,40 € y el de P_2 vale 0,60 €. ¿Cómo deben mezclarse los piensos para suministrar a las reses las vitaminas requeridas con un coste mínimo?

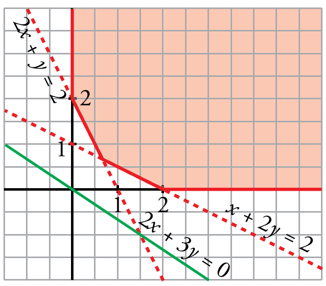
Si llamamos x a los kilos de pienso P_1 e y a los kilos de pienso P_2, las restricciones del problema son:

$$\begin{cases} x \ge 0, \quad y \ge 0 \\ 2x + 4y \ge 4 \;\rightarrow\; x + 2y \ge 2 \\ 6x + 3y \ge 6 \;\rightarrow\; 2x + y \ge 2 \end{cases}$$

La función que nos da el coste es $F(x, y) = 0{,}4x + 0{,}6y$.

Tenemos que minimizar esta función, sujeta a las restricciones anteriores.

Representamos el conjunto de restricciones y la recta $0{,}4x + 0{,}6y = 0 \;\rightarrow\; 2x + 3y = 0$, que nos da la dirección de las rectas $0{,}4x + 0{,}6y = K$.



El mínimo se alcanza en el punto de intersección de las rectas:

$$\left.\begin{array}{r} 2x + y = 2 \\ x + 2y = 2 \end{array}\right\} \text{ Punto } \left(\frac{2}{3}, \frac{2}{3}\right)$$

Por tanto, se deben mezclar $\frac{2}{3}$ kg de pienso P_1 con $\frac{2}{3}$ kg de pienso P_2.

20 **Una industria papelera elabora dos clases de papel a partir de dos tipos de madera. Las cantidades de madera (en metros cúbicos) necesarias por tonelada de fabricación de cada tipo de papel y las disponibilidades semanales son:**

	PAPEL 1	PAPEL 2	DISPONIBILIDADES
MADERA 1	8	8	64
MADERA 2	4	8	50

a) Si el beneficio neto por cada tonelada de papel del tipo 1 y 2 son 100 000 € y 200 000 €, respectivamente, ¿cuánto papel de cada clase nos dará el beneficio máximo?

b) Analiza gráficamente qué ocurre si las disponibilidades de MADERA 1 se reducen a 50 metros cúbicos.

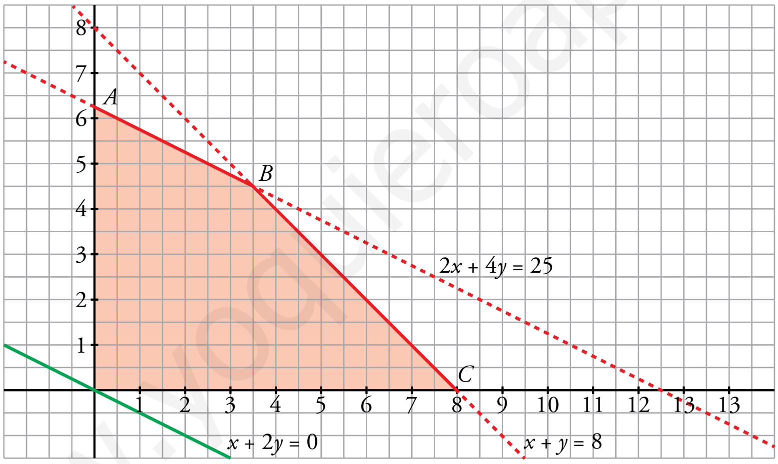
a) Llamamos x a la cantidad de papel 1 e y a la cantidad de papel 2.

Restricciones:

$$\begin{cases} 8x + 8y \le 64 \ \rightarrow \ x + y \le 8 \\ 4x + 8y \le 50 \ \rightarrow \ 2x + 4y \le 25 \\ x \ge 0 \\ y \ge 0 \end{cases}$$

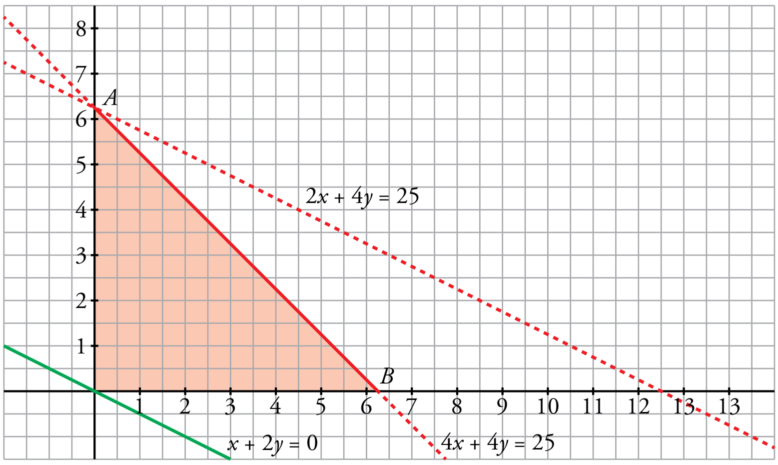
La función que nos da el beneficio es: $F(x, y) = 100\,000x + 200\,000y$

La representación de la región de validez y la función objetivo es:



Como la recta $2x + 4y = 25$ es paralela a la función de beneficio, cualquier punto del segmento AB es una solución válida. Es decir, cualquiera cantidad de papel 1 entre 0 t y 3,5 t y de papel 2 entre 0 t y 4,5 t que verifique la igualdad $2x + 4y = 25$ conseguirá un beneficio máximo.

b) En este caso, la primera de las restricciones sería $4x + 4y \le 25$. Y la región de validez sería:



La recta variable $x + 2y = K$ toma su valor máximo (dentro de los válidos) en el vértice $A(0; 6,25)$.

21 **Una empresa constructora dispone de un terreno de 100 dam² para construir dos tipos de casas. Las casas de tipo A ocuparían una superficie de 4 dam² y las de tipo B, de 2 dam². Sobre plano ya se han vendido 4 casas de tipo A y 18 de tipo B, por tanto, deben construir al menos esas unidades. Además, por estudios de mercado han decidido construir al menos el triple de casas de tipo B que de tipo A.**

a) ¿Cuántas casas pueden construir de cada tipo? Plantea el problema y representa el conjunto de soluciones.

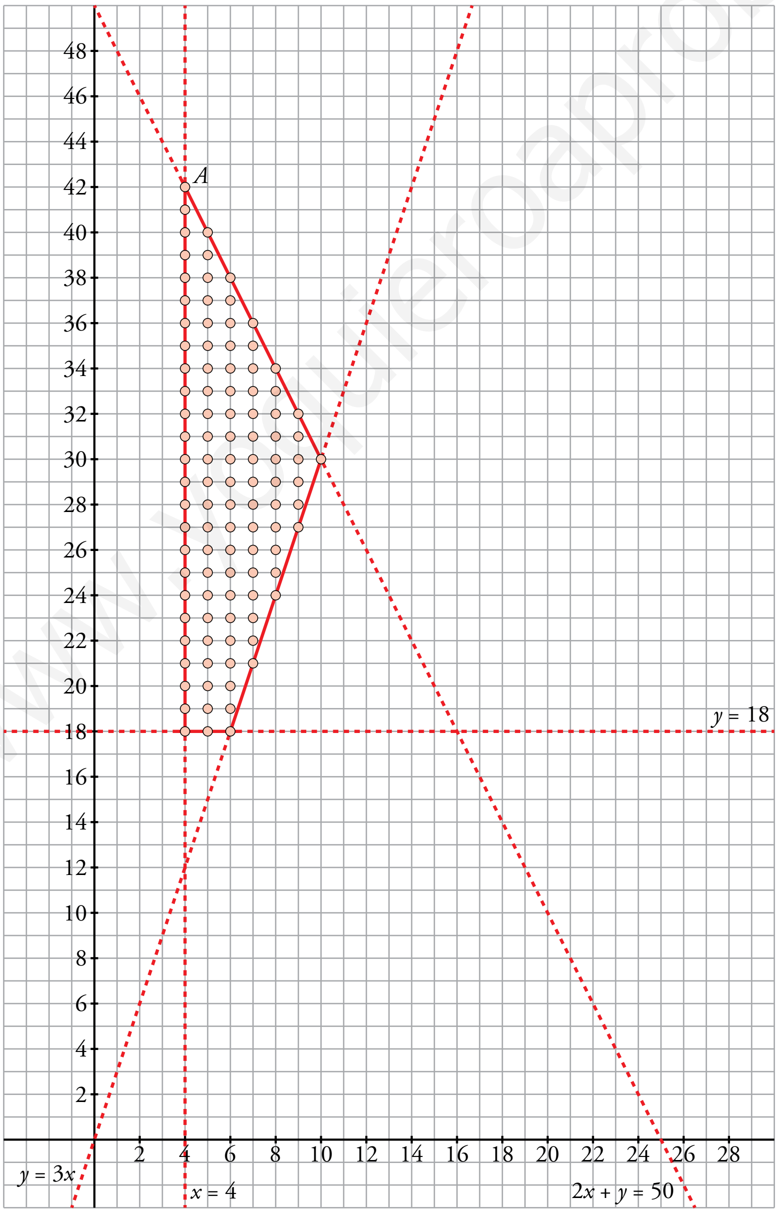
b) Si por cada casa de tipo A obtienen un beneficio de 100 000 €, y por cada casa de tipo B, uno de 60 000 €, ¿cuántas deben construir de cada tipo para maximizar beneficios?

a) Llamamos x al número de casas de tipo A e y al número de casas de tipo B.

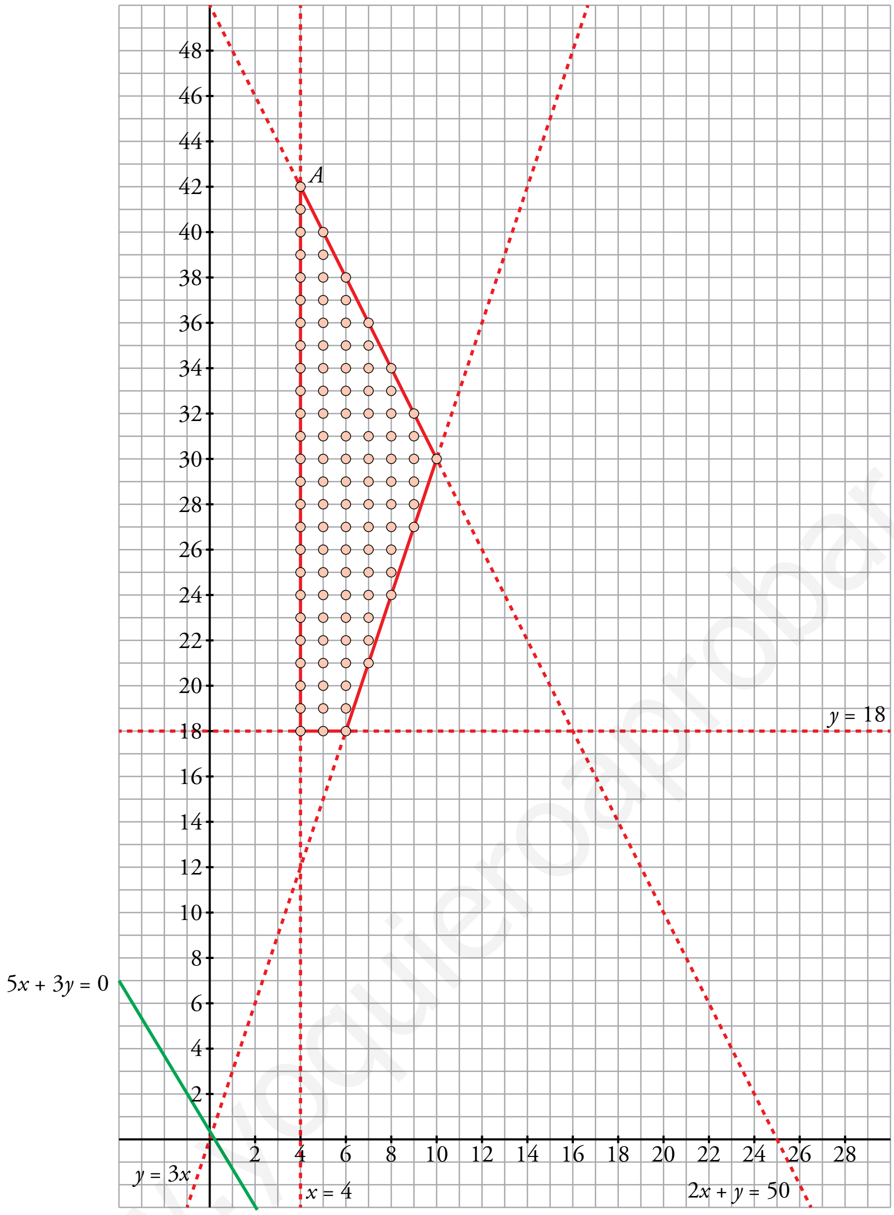
Restricciones:

$$\begin{cases} 4x + 2y \le 100 \;\rightarrow\; 2x + y \le 50 \\ x \ge 4 \\ y \ge 18 \\ y \ge 3x \end{cases}$$

El conjunto de soluciones son todos los puntos de la región de validez cuyas coordenadas son números naturales. Son los puntos de la cuadrícula que están dentro de la región siguiente:



b) La función que nos da el beneficio es: $F(x, y) = 100\,000x + 60\,000y$



La recta variable $100\,000x + 60\,000y = K$ toma su valor máximo (dentro de los válidos) en el vértice $A(4, 42)$. Se deben construir 4 casas de tipo A y 42 casas de tipo B para maximizar beneficios.

Página 124

22 **Una compañía minera extrae dos tipos de carbón, hulla y antracita, de forma que todo el carbón extraído es vendido. Por exigencias gubernamentales, debe extraer diariamente al menos el triple de camiones de hulla que de antracita. Además, por la propia infraestructura de la compañía, como mucho se pueden extraer 80 camiones de carbón en un día y al menos 10 de ellos deben ser de antracita.**

a) ¿Cuántos camiones de cada tipo de carbón se pueden extraer en un día? Plantea el problema y representa gráficamente el conjunto de soluciones. ¿Podría extraer en un día 20 camiones de hulla y 15 de antracita?

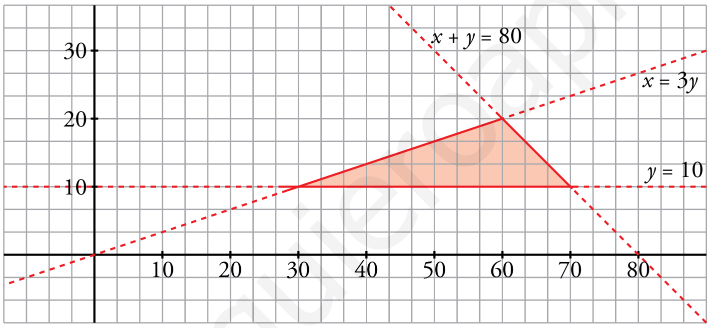
b) Si por cada camión de hulla ganan 4 000 € y por cada uno de antracita, 6 000 €, ¿cuántos camiones de cada tipo debería extraer en un día para maximizar sus ganancias?

a) Llamamos x al número de camiones de hulla e y al número de camiones de antracita.

Restricciones:

$$\begin{cases} x \geq 3y \\ x + y \leq 80 \\ y \geq 10 \\ x \geq 0 \end{cases}$$

El conjunto de soluciones son todos los puntos de la región de validez siguiente cuyas coordenadas son números naturales:

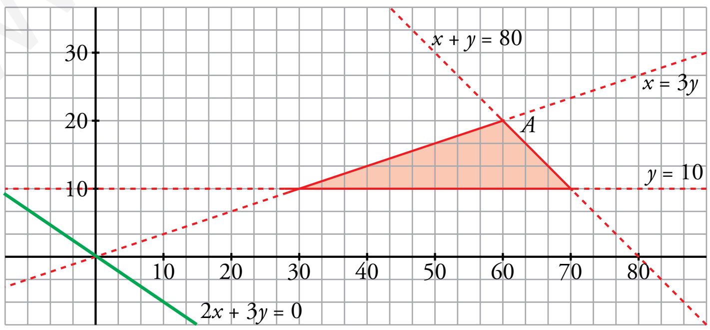


El punto (20, 15) no está en la región, luego no se podrían extraer en un día 20 camiones de hulla y 15 de antracita.

b) La función que nos da el beneficio es:

$$F(x, y) = 4\,000x + 6\,000y$$

La representación de la región de validez y la función beneficio es:



La recta variable $4\,000x + 6\,000y = K$ toma su valor máximo (dentro de los válidos) en el vértice $A(60, 20)$.

Hay que extraer 60 camiones de hulla y 20 de antracita para maximizar las ganancias.

23 **Se dispone de 120 refrescos de cola con cafeína y de 180 refrescos de cola sin cafeína. Los refrescos se venden en paquetes de dos tipos:**

- **Tipo A, con 3 refrescos con cafeína y 3 sin cafeína.**
- **Tipo B, con 2 refrescos con cafeína y 4 sin cafeína.**

El vendedor gana 6 € por cada paquete que vende de tipo A y 5 € por cada paquete de tipo B. Calcula de forma razonada cuántos paquetes ha de vender de cada tipo para que el beneficio sea máximo. ¿Cuál es ese beneficio?

Llamamos x al número de paquetes de tipo A e y al número de paquetes de tipo B.

Resumimos la información en una tabla:

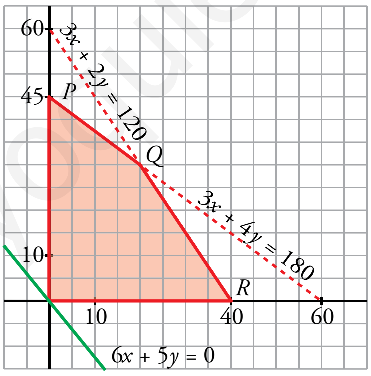
	A	B	REF. DISPONIBLES
CON CAFEÍNA	$3x$	$2y$	120
SIN CAFEÍNA	$3x$	$4y$	180
GANANCIA (€)	$6x$	$5y$	

Las restricciones del problema son:

$$\begin{cases} x \ge 0 \\ y \ge 0 \\ 3x + 2y \le 120 \\ 3x + 4y \le 180 \end{cases}$$

La función objetivo es la de ganancias, $G(x, y) = 6x + 5y$. Hemos de maximizar esta función, sometiéndola a las restricciones anteriores.

Representamos el conjunto de restricciones y la recta $6x + 5y = 0$, que nos da la dirección de las rectas $6x + 5y = k$.



El máximo se alcanza en uno de los vértices de la región factible (zona sombreada).

$P(0, 45)$

$$\left.\begin{array}{l} 3x + 2y = 120 \\ 3x + 4y = 180 \end{array}\right\} Q(20, 30)$$

$R(40, 0)$

$G(P) = G(0, 45) = 225$; $G(Q) = G(20, 30) = 270$; $G(R) = G(40, 0) = 240$

El máximo beneficio es de 270 €, y se alcanza vendiendo 20 paquetes de tipo A y 30 paquetes de tipo B.

24 Un tren de mercancías puede arrastrar un máximo de 27 vagones. En cierto viaje transporta coches y motocicletas. Para los coches ha de dedicar un mínimo de 12 vagones, y para las motocicletas, no menos de la mitad de los vagones dedicados a los coches. Si los ingresos de la compañía ferroviaria son de 540 € por cada vagón de coches y de 360 € por cada vagón de motos, ¿cómo se han de distribuir los vagones para obtener el máximo ingreso? ¿Cuál es ese ingreso?

Llamamos x al número de vagones para coches e y al número de vagones para motos.

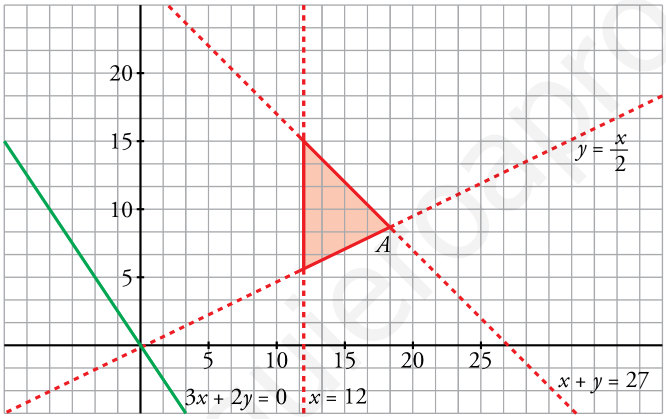
Restricciones:

$$\begin{cases} x + y \le 27 \\ x \ge 12 \\ y \ge \dfrac{1}{2}x \\ y \ge 0 \end{cases}$$

La función que nos da los ingresos es:

$$F(x, y) = 540x + 360y$$

La representación de la región de validez y la función de beneficio es:



El conjunto de soluciones son todos los puntos de la región de validez cuyas coordenadas son números naturales.

La recta variable $540x + 360y = K$ toma su valor máximo (dentro de los válidos) en el vértice $A(18, 9)$.

Se deben transportar 18 vagones de coches y 9 vagones de motos para maximizar el ingreso.

25 Una peña de aficionados de un equipo de fútbol encarga a una empresa de transportes el viaje para llevar a los 1 200 socios a ver un partido de su equipo. La empresa dispone de autobuses de 50 plazas y de microbuses de 30 plazas. El precio de cada autobús es de 1 260 €, y el de cada microbús, de 900 €. La empresa solo dispone, ese día, de 28 conductores. ¿Qué número de autobuses y microbuses deben contratarse para conseguir el mínimo coste posible? ¿Cuál es ese coste?

a) Llamamos x al número de autobuses a y al de microbuses.

Las restricciones del problema son las siguientes:

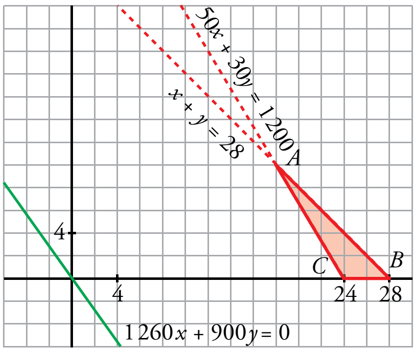
$$\begin{cases} x \ge 0, \quad y \ge 0 \\ x + y \le 28 \\ 50x + 30y \ge 1\,200 \\ x, y \ \text{ enteros} \end{cases}$$

La función que nos da el coste, función objetivo, es:

$$F(x, y) = 1\,260x + 900y$$

Hemos de minimizar esta función, sujeta a las restricciones anteriores.

Representado el conjunto de restricciones, la región factible es la zona coloreada:



El mínimo se alcanzará en uno de los vértices de esta zona (representamos también, $1\,260x + 900y = 0$).

$$\left.\begin{aligned} x + y &= 28 \\ 5x + 3y &= 120 \end{aligned}\right\} \quad A(18, 10) \;\to\; F(A) = F(18, 10) = 6\,336\ €$$

$B(28, 0) \;\to\; F(B) = F(28, 0) = 7\,056\ €$

$C(24, 0) \;\to\; F(C) = F(24, 0) = 6\,048\ €$

El mínimo se alcanza en el punto (24, 0). Es decir, deben contratarse 24 autobuses y ningún microbús.

b) El valor del coste mínimo es 6 048 €.

OTRA RESOLUCIÓN

Este problema se puede resolver de forma trivial sin programación lineal.

Precio por persona en autobús $\to$ 1 260 : 50 = 25,20 €

Precio por persona en microbús $\to$ 900 : 30 = 30 €

Por tanto, es más barato ubicar en autobuses a tantos viajeros como sea posible, y si pueden ser todos, mejor.

1 200 viajeros : 50 plazas/autobús = 24 autobuses

En 24 autobuses caben los 1 200 aficionados.

26 Una empresa fabricante de automóviles produce dos modelos, A y B. Tiene dos factorías, F_1 y F_2.

- **En F_1 se producen diariamente 6 coches tipo A y 4 tipo B, con un coste de 32 000 € diarios. F_1 no funciona más de 50 días.**
- **En F_2 se producen 4 de A y 4 de B, con un coste de 24 000 € diarios.**

Para abastecer el mercado, se han de poner a la venta al menos 360 coches de tipo A y al menos 300 de tipo B.

¿Cuántos días debe funcionar cada factoría para que el coste sea mínimo? ¿Cuál es ese coste?

Llamamos x al número de días que debe funcionar F_1 e y al número de días que debe funcionar F_2.

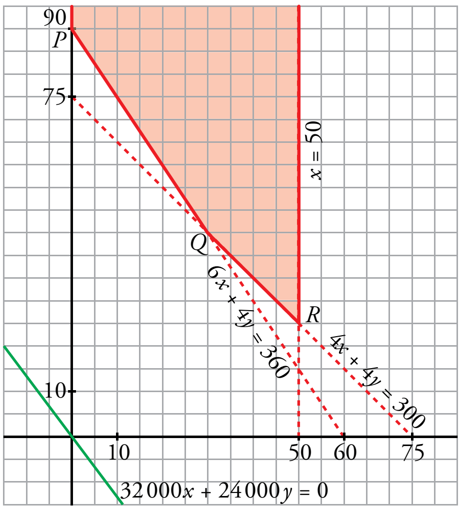
Colocamos los datos en una tabla y escribimos las restricciones del problema:

	FACTORÍA F_1	FACTORÍA F_2	N.° DE COCHES
MODELO A	$6x$	$4y$	360
MODELO B	$4x$	$4y$	300
COSTE	$32\,000x$	$24\,000y$	

$$\begin{cases} 0 \le x \le 50 \\ y \ge 0 \\ 6x + 4y \ge 360 \\ 4x + 4y \ge 300 \end{cases}$$

Hemos de minimizar la función objetivo, $F(x, y) = 32\,000x + 24\,000y$.

Representamos las restricciones del problema y la dirección de la función objetivo. La región factible es la zona sombreada:



$P(0, 90)$

$\left.\begin{array}{l} 6x + 4y = 360 \\ 4x + 4y = 300 \end{array}\right\} \; Q(30, 45)$

$\left.\begin{array}{l} 4x + 4y = 300 \\ x = 50 \end{array}\right\} \; R(50, 25)$

$F(P) = F(0, 90) = 2\,160\,000$

$F(Q) = F(30, 45) = 2\,040\,000$

$F(R) = F(50, 25) = 2\,200\,000$

El coste mínimo, 2 040 000 €, se obtiene cuando la factoría F_1 funciona 30 días y la F_2 funciona 45 días.

27 **Se desea obtener dos elementos químicos a partir de las sustancias A y B. Un kilo de A contiene 8 gramos del primer elemento y 1 gramo del segundo; un kilo de B tiene 4 gramos del primer elemento y 1 gramo del segundo. Se desea obtener, como mínimo, 24 gramos del primer elemento, la cantidad del segundo ha de ser como mucho 10 gramos y la cantidad de B utilizada debe ser como mucho, el cuádruple que la de A. Si un kilo de A vale 10 € y uno de B vale 4 €, ¿qué cantidades de A y B se deben comprar para minimizar los costes globales?**

Llamamos x a los kilos de A que compraremos e y a los kilos de B.

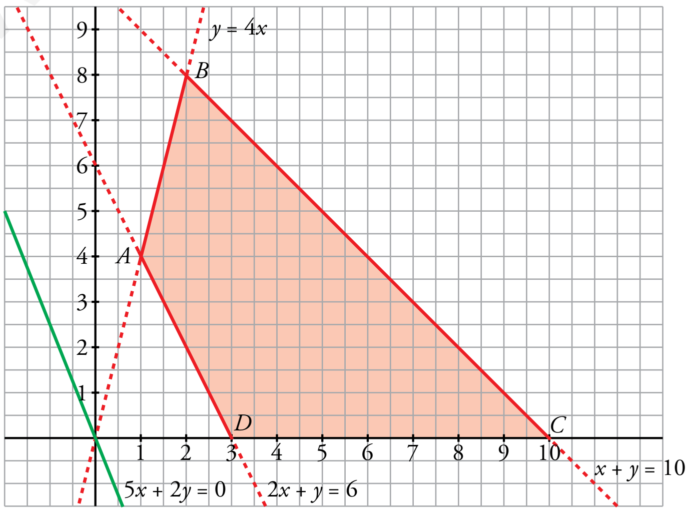
	ELEMENTO 1	ELEMENTO 2	COSTE (€/kg)
A	8	1	10
B	4	1	4

Restricciones:

$$\begin{cases} 8x + 4y \ge 24 \;\rightarrow\; 2x + y \ge 6 \\ x + y \le 10 \\ y \le 4x \\ x \ge 0 \\ y \ge 0 \end{cases}$$

La función que nos da el coste es: $F(x, y) = 10x + 4y$

La representación de la región de validez y la función de coste es:



La recta variable $10x + 4y = K$ toma su valor mínimo (dentro de los válidos) en el vértice $A(1, 4)$. Se deben comprar, para minimizar los costes globales, 1 kg de A y 4 kg de B.

28 **Una fábrica hace dos tipos de mesas: clásicas y modernas.**

- **Cada mesa del modelo clásico requiere 4 horas de lijado y 3 horas de barnizado, y deja un beneficio de 200 €. No deben fabricarse más de 9 de estas mesas.**
- **Cada mesa moderna necesita 3 horas de lijado y 4 horas de barnizado, y su beneficio es de 100 €.**
- **Entre mesas clásicas y modernas no pueden fabricarse más de 17.**

a) Si se dispone de 48 horas para lijado y de 60 horas para barnizado, ¿cuántas mesas de cada tipo ha de fabricar para que sus beneficios sean máximos?

b) ¿Qué información ha resultado superflua para la resolución del problema?

a) Llamamos x al número de mesas clásicas e y al número de mesas modernas. Disponemos los datos en una tabla y definimos las restricciones del problema:

	MESA CLÁSICA	MESA MODERNA	DISPONIBLE
LIJADO (h)	$4x$	$3y$	48
BARNIZADO (h)	$3x$	$4y$	60
BENEFICIO (€)	$200x$	$100y$	

$$\begin{cases} 0 \le x \le 9 \\ y \ge 0 \\ 4x + 3y \le 48 \\ 3x + 4y \le 60 \\ x + y \le 17 \end{cases}$$

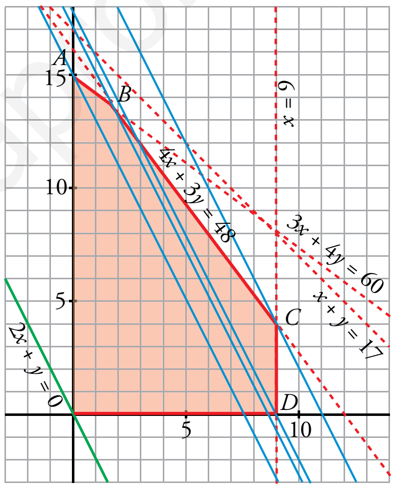
La función objetivo que hay que maximizar, sujeta a las restricciones anteriores, es $F(x, y) = 200x + 100y$.

Representamos el recinto y la recta de ecuación $2x + y = 0$, que nos da la dirección de las rectas $200x + 100y = K$.

El máximo se alcanza en un punto de coordenadas enteras de la región factible.

Trazamos paralelas a la recta $2x + y = 0$ por cada vértice de esta región: $A(0, 15)$, $B(12/7, 96/7)$, $C(9, 4)$, $D(9, 0)$. De estas rectas, la que pasa por $C(9, 4)$ es la de mayor ordenada en el origen. En ese punto se alcanza el máximo de la función objetivo.

Por tanto, hay que fabricar 9 mesas clásicas y 4 mesas modernas.



b) Es superfluo el dato que nos indica que no pueden fabricarse más de 17 mesas entre clásicas y modernas.

29 **Un agricultor estima que el cuidado de cada metro cuadrado de plantado de lechugas requiere semanalmente 45 minutos, mientras que el de col exige 50 minutos. Dispone de un terreno de 40 m² de extensión que puede dedicar total o parcialmente al cultivo de las dos verduras, pero quiere plantar al menos 3 m² más de col que de lechugas. El metro cuadrado de lechugas le reporta un beneficio de 3 €, mientras que el de col le proporciona 4 €. Ha planificado obtener al menos un beneficio de 60 €.**

¿Qué extensión de cada verdura le interesa plantar si su objetivo es dedicar el mínimo tiempo al cuidado del cultivo?

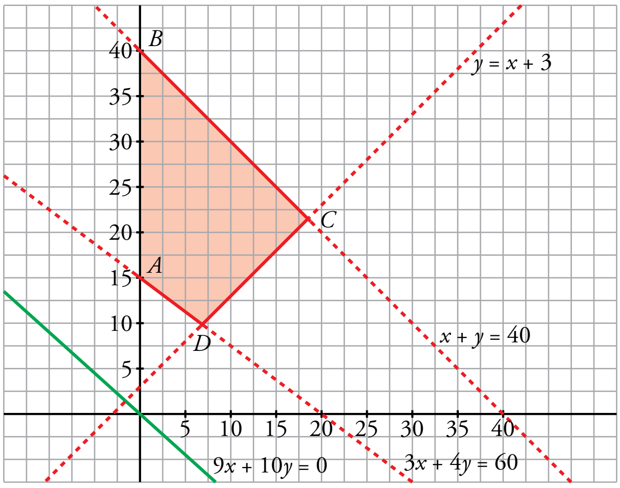
Llamamos x a los metros cuadrados de lechugas que debe plantar e y a los matros cuadrados de coles.

Restricciones:

$$\begin{cases} y \ge x + 3 \\ x + y \le 40 \\ 3x + 4y \ge 60 \\ x \ge 0 \\ y \ge 0 \end{cases}$$

La función que nos da el tiempo en minutos es: $F(x, y) = 45x + 50y$

La representación de la región de validez y la función de tiempo es:



La recta variable $45x + 50y = K$ toma su valor mínimo (dentro de los válidos) en el vértice $A(0, 15)$.

Se deben destinar, para minimizar el tiempo dedicado al cuidado del cultivo, 15 m^2 a coles y nada a lechugas.

30 **En una bodega se producen vinos de crianza y de reserva. Por problemas de diseño, la producción de ambos tipos de vino no debe superar los 60 millones de litros y la producción de vino de reserva no debe superar el doble de la de vino de crianza ni ser inferior a su mitad.**

Si la bodega comercializa el litro de vino de crianza a 4 € y el de reserva a 9 €, ¿cuál es el diseño de producción que maximiza los ingresos?

Llamamos x a los millones de litros de crianza e y a los millones de litros de reserva.

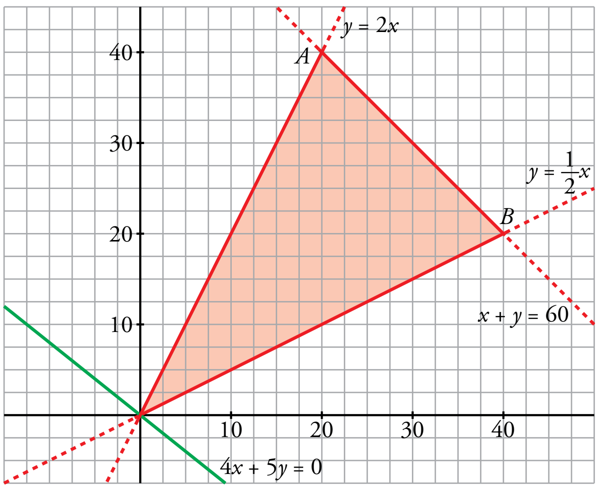
Restricciones:

$$\begin{cases} x + y \le 60 \\ y \le 2x \\ y \ge \dfrac{1}{2}x \\ x \ge 0 \\ y \ge 0 \end{cases}$$

La función que nos da los ingresos en millones de euros es:

$$F(x, y) = 4x + 5y$$

La representación de la región de validez y la función de ingresos es:



La recta variable $4x + 5y = K$ toma su valor máximo (dentro de los válidos) en el vértice $A(20, 40)$. El diseño de producción que maximiza los ingresos es en el que se producen 20 millones de litros de crianza y 40 millones de litros de reserva.

Página 125

Para profundizar

31 **Un pastelero fabrica dos tipos de tartas, T_1 y T_2, para lo que usa tres ingredientes, A, B y C. Dispone de 150 kg de A, 90 kg de B y 150 kg de C. Para fabricar una tarta T_1 debe mezclar 1 kg de A, 1 kg de B y 2 kg de C, mientras que para hacer una tarta T_2, necesita 5 kg de A, 2 kg de B y 1 kg de C.**

a) Si se venden las tartas T_1 a 10 € y las tartas T_2 a 23 €, ¿qué cantidad debe fabricar de cada clase para maximizar sus ingresos?

b) Si se fija el precio de una tarta del tipo T_1 en 15 €, ¿cuál será el precio de una tarta del tipo T_2 si una solución óptima es fabricar 60 tartas del tipo T_1 y 15 del tipo T_2?

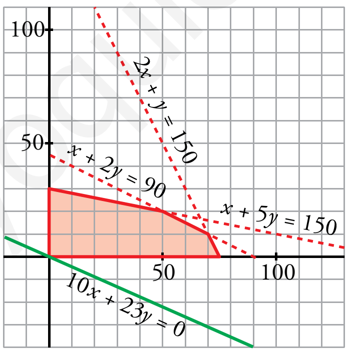
Llamamos x al número de tartas de tipo T_1 e y al número de tartas de tipo T_2.

Las restricciones del problema son:

$$\begin{cases} x \ge 0, \quad y \ge 0 \\ x + 5y \le 150 \\ x + 2y \le 90 \\ 2x + y \le 150 \end{cases}$$

a) La función que nos da los ingresos es $F(x, y) = 10x + 23y$. Tenemos que maximizar esta función, sujeta a las restricciones anteriores.

Representamos el recinto de restricciones, así como la recta $10x + 23y = 0$, que nos da la dirección de las rectas $10x + 23y = K$:



El máximo se alcanza en el punto de intersección de las rectas:

$$\left.\begin{array}{l} x + 5y = 150 \\ x + 2y = 90 \end{array}\right\} \text{ Punto } (50, 20)$$

Por tanto, deben fabricarse 50 tartas de tipo T_1 y 20 tartas de tipo T_2.

b) Si llamamos p al precio de la tarta de tipo T_2, los ingresos vendrían dados por la siguiente función: $G(x, y) = 15x + py$.

Si la función $G(x, y)$ alcanza el máximo en el punto (60, 15), que no es un vértice, será porque hay infinitas soluciones y la recta $15x + py = 0$ será paralela a $x + 2y = 90$. Por tanto:

$$\left.\begin{array}{l} 15x + py = 0 \;\to\; \text{pendiente} = -\dfrac{15}{p} \\ x + 2y = 90 \;\to\; \text{pendiente} = -\dfrac{1}{2} \end{array}\right\} \; -\frac{15}{p} = -\frac{1}{2} \;\to\; p = 30$$

Así, el precio de una tarta del tipo T_2 será de 30 €.

32 **Una empresa de automóviles tiene dos plantas P_1 y P_2 de montaje de vehículos en las que producen tres modelos: M_1, M_2 y M_3. De la planta P_1 salen semanalmente 10 unidades del modelo M_1, 30 del M_2 y 15 del M_3. De la planta P_2 salen 20 unidades del M_1, 20 del M_2 y 70 del M_3 cada semana. La empresa necesita al menos 800 unidades de M_1, al menos 1 600 de M_2 y al menos 1 800 de M_3. Si el gasto de mantenimiento de cada planta es de 36 000 € semanales, ¿cuántas semanas ha de funcionar cada planta para que el coste de producción sea mínimo? ¿Cuál es el coste mínimo?**

Llamamos x a las semanas que debe funcionar la planta P_1 e y a las semanas que debe funcionar la planta P_2.

	M_1	M_2	M_3	GASTO (€/SEMANA)
PLANTA P_1	10	30	15	36 000
PLANTA P_2	20	20	70	36 000
NECESIDADES	800	1 600	1 800	

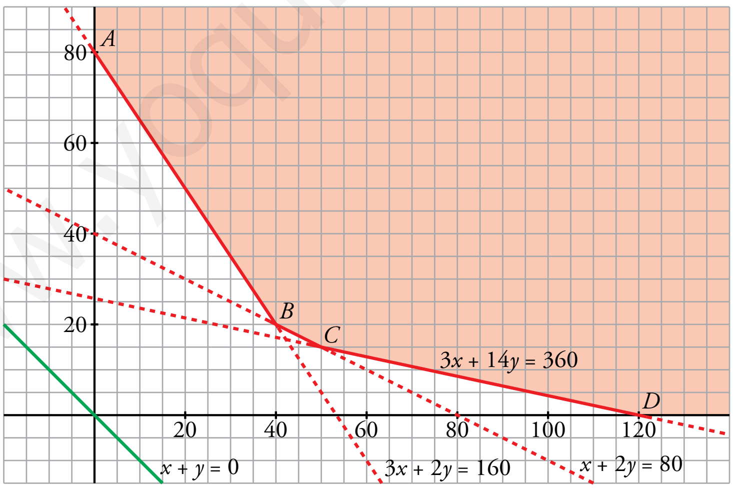
Restricciones:

$$\begin{cases} 10x + 20y \ge 800 \ \rightarrow \ x + 2y \ge 80 \\ 30x + 20y \ge 1\,600 \ \rightarrow \ 3x + 2y \ge 160 \\ 15x + 70y \ge 1\,800 \ \rightarrow \ 3x + 14y \ge 360 \\ x \ge 0 \\ y \ge 0 \end{cases}$$

La función que nos da el coste es:

$$F(x, y) = 36\,000x + 36\,000y$$

La representación de la región de validez y la función de coste es:



La recta variable $36\,000x + 36\,000y = K$ toma su valor mínimo (dentro de los válidos) en el vértice $B(40, 20)$.

Para minimizar los gastos debe funcionar 40 semanas la planta P_1 y 20 semanas la planta P_2.

El coste es:

$$F(40, 20) = 36\,000 \cdot 40 + 36\,000 \cdot 20 = 2\,160\,000 \text{ €}.$$

33 **Don Elpidio decide emplear hasta 30 000 € de su patrimonio en la adquisición de acciones de dos sociedades de inversión: BLL e ISSA. El precio de cada acción es de 10 € en ambos casos.**

- **BLL dedica el 35 % de su actividad al sector seguros, el 45 % al sector inmobiliario y el 20 % al industrial.**
- **ISSA dedica el 30 % de sus recursos al sector seguros, el 25 % al inmobiliario y el 45 % al industrial.**

Don Elpidio no quiere invertir más del 40 % de su capital en el sector industrial ni más del 35 % en el inmobiliario.

¿Cuántas acciones debe adquirir de cada sociedad si BLL prevé entregar un dividendo de 1,20 €/acción e ISSA de 1 €/acción?

Llamamos x al número de acciones que adquiere de BLL e y al número de acciones que adquiere de ISSA.

Hagamos una tabla que resuma la información que nos dan:

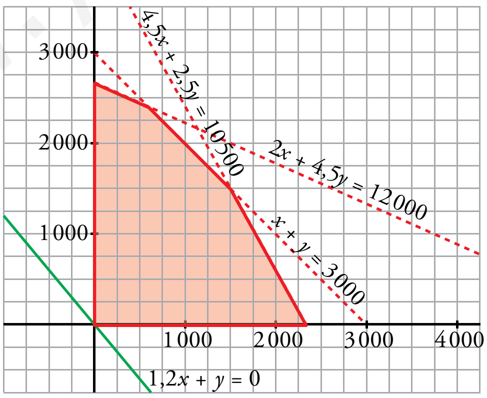
	PRECIO	SEGUROS	INMOBILIARIA	INDUSTRIAL
ACCIONES BBL	$10x$	$3{,}5x$	$4{,}5x$	$2x$
ACCIONES ISSA	$10y$	$3y$	$2{,}5y$	$4{,}5y$
TOTAL	$10x + 10y$	$3{,}5x + 3y$	$4{,}5x + 2{,}5y$	$2x + 4{,}5y$

Las restricciones del problema son:

$$\begin{cases} x \geq 0, \quad y \geq 0 \\ 10x + 10y \leq 30\,000 \;\rightarrow\; x + y \leq 3\,000 \\ 2x + 4{,}5y \leq 12\,000 \\ 4{,}5x + 2{,}5y \leq 10\,500 \end{cases}$$

La función que nos da los beneficios es $F(x, y) = 1{,}2x + y$. Tenemos que maximizarla, sujeta a las restricciones anteriores.

Representamos el conjunto de restricciones y la recta $1{,}2x + y = 0$, que nos da la dirección de las rectas $1{,}2x + y = K$.



El máximo se alcanza en el punto de corte de las rectas:

$$\left.\begin{array}{l} x + y = 3\,000 \\ 4{,}5x + 2{,}5y = 10\,500 \end{array}\right\} \text{Punto } (1\,500,\ 1\,500)$$

Debe adquirir 1 500 acciones de cada una de las dos sociedades.

34 **Una empresa compra 26 locomotoras a tres fábricas: 9 a A, 10 a B y 7 a C. Las locomotoras deben prestar servicio en dos estaciones distintas: 11 de ellas en la estación N y 15 en la S. Los costes de traslado son, por cada una, los que se indican en la tabla (en miles de euros):**

	A	B	C
N	6	15	3
S	4	20	5

Averigua cómo conviene hacer el reparto para que el coste sea mínimo.

Resumimos los datos en una tabla y escribimos las restricciones del problema (tendremos en cuenta que todos los datos de la tabla deben ser positivos o cero y que x e y deben ser enteros):

	A	B	C	TOTAL
N	x	y	$11-x-y$	11
S	$9-x$	$10-y$	$x+y-4$	15
TOTAL	9	10	7	26

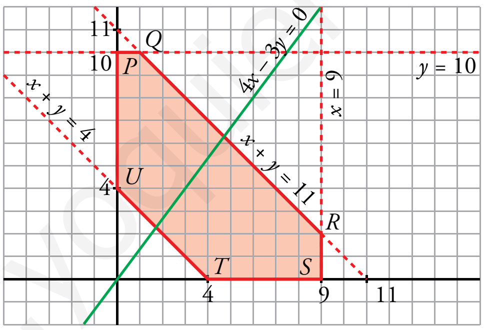
$$\begin{cases} x \ge 0, \quad y \ge 0 \\ x+y \ge 4 \\ x+y \le 11 \\ x \le 9 \\ y \le 10 \end{cases}$$

La función que nos da el coste (en miles de euros) es:

$$F(x, y) = 6x + 15y + 3(11 - x - y) + 4(9 - x) + 20(10 - y) + 5(x + y - 4) = 4x - 3y + 249$$

Tenemos que minimizar esta función, sujeta a las restricciones anteriores.

Representamos el recinto de restricciones:



Los vértices del recinto son:

$P(0, 10)$ $\quad Q(1, 10)$ $\quad R(9, 2)$ $\quad S(9, 0)$ $\quad T(4, 0)$ $\quad U(0, 4)$

Hallamos $F(x, y)$ en cada uno de los vértices:

$F(P) = F(0, 10) = 219$ $\quad F(Q) = F(1, 10) = 223$

$F(R) = F(9, 2) = 279$ $\quad F(S) = F(9, 0) = 285$

$F(T) = F(4, 0) = 265$ $\quad F(U) = F(0, 4) = 237$

El coste mínimo, 219 miles de euros, se alcanza en el punto $P(0, 10)$.

Por tanto, el reparto de locomotoras debe efectuarse como se indica en la tabla:

	A	B	C	TOTAL
N	0	10	1	11
S	9	0	6	15
TOTAL	9	10	7	26

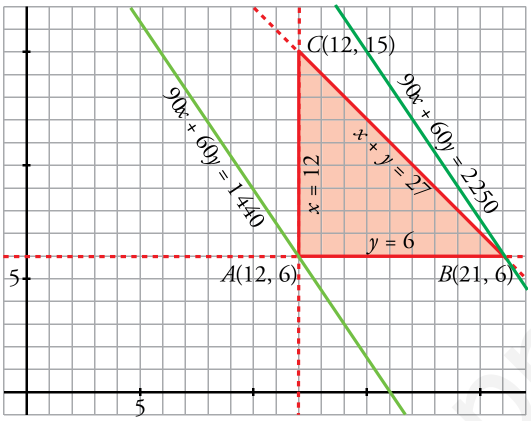
Autoevaluación

Página 125

1 **Representa el recinto limitado por estas inecuaciones:**

$$\begin{cases} x + y \le 27 \\ x \ge 12 \\ y \ge 6 \end{cases}$$

Halla los valores máximo y mínimo de la siguiente función en ese recinto: $F(x, y) = 90x + 60y$.



$F(x, y)$ toma el valor máximo en $B(21, 6)$:

$$F(21, 6) = 90 \cdot 21 + 60 \cdot 6 = 2250$$

$F(x, y)$ toma el valor mínimo en $A(12, 6)$:

$$F(12, 6) = 90 \cdot 12 + 60 \cdot 6 = 1440$$

2 **Representa el recinto descrito por las inecuaciones:**

$$\begin{cases} x \ge 0, \ \ y \ge 0 \\ 10 - x \ge 0 \\ 10 - y \ge 0 \\ x + y \le 13 \\ x + 2y \ge 12 \end{cases}$$

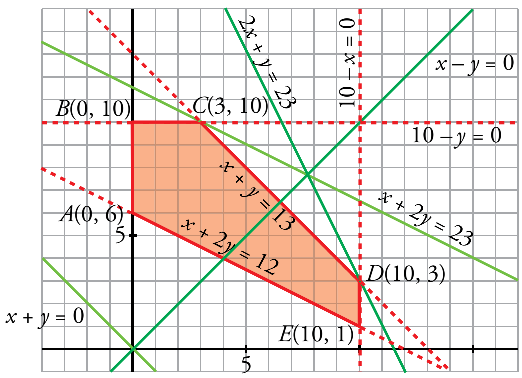
Halla el máximo y el mínimo de las siguientes funciones:

a) $F(x, y) = 2x + y$ **b)** $G(x, y) = x + 2y$

c) $H(x, y) = x - y - 5$ **d)** $I(x, y) = x + y + 2$

La región factible es la zona sombreada de la siguiente figura:

$$\begin{cases} x \ge 0 \\ y \ge 0 \\ 10 - x \ge 0 \ \to \ x \le 10 \\ 10 - y \ge 0 \ \to \ y \le 10 \\ x + y \le 13 \ \to \ y \le 13 - x \\ x + 2y \ge 12 \ \to \ y \ge \dfrac{12 - x}{2} \end{cases}$$



a) $F(x, y) = 2x + y$ toma el valor máximo en el vértice $D(10, 3)$:

$F(10, 3) = 2 \cdot 10 + 3 = 23$ es máximo de F.

$F(x, y) = 2x + y$ toma el valor mínimo en el vértice $A(0, 6)$:

$F(0, 6) = 6$ es el valor mínimo de F en el recinto.

b) $G(x, y) = x + 2y$ toma el valor máximo en $C(3, 10)$:

$G(3, 10) = 3 + 2 \cdot 10 = 23$ es máximo de G.

$G(x, y)$ toma el valor mínimo en cualquier punto del segmento AE. Por ejemplo:

En el vértice A su valor es $G(0, 6) = 0 + 2 \cdot 6 = 12$

En el vértice E su valor es $G(10, 1) = 10 + 2 \cdot 1 = 12$

c) $H(x, y) = x - y - 5$ toma el valor máximo en el vértice $E(10, 1)$:

$H(10, 1) = 10 - 1 - 5 = 4$ es máximo de H.

$H(x, y) = x - y - 5$ toma el valor mínimo en el vértice $B(0, 10)$:

$H(0, 10) = 0 - 10 - 5 = -15$ es el valor mínimo de H en el recinto.

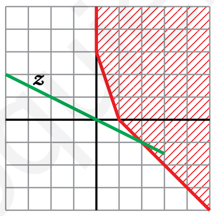
d) $I(x, y) = x + y + 2$ toma el valor máximo en el vértice $C(3, 10)$:

$I(3, 10) = 10 + 3 + 2 = 15$ es máximo de I.

$I(x, y) = x + y + 2$ toma el valor mínimo en el vértice $A(0, 6)$:

$I(0, 6) = 0 + 6 + 2 = 8$ es mínimo de I.

3 ¿Tiene máximo la función z en el recinto señalado? ¿Y mínimo?



No tiene ni máximo ni mínimo.

4 Una empresa de instalaciones dispone de 195 kg de cobre, 20 kg de titanio y 14 kg de aluminio.

Para fabricar 100 m de cable de tipo A, se necesitan 10 kg de cobre, 2 kg de titanio y 1 kg de aluminio, y se obtiene de él un beneficio de 1 500 €. Para fabricar 100 m de cable de tipo B, se necesitan 15 kg de cobre, 1 kg de titanio y 1 kg de aluminio, y se obtiene un beneficio de 1 000 €.

Calcula cuántos metros de cable hay que fabricar de cada tipo para que el beneficio sea máximo. ¿Cuál es ese beneficio?

Llamamos:

x = metros de cable de tipo A

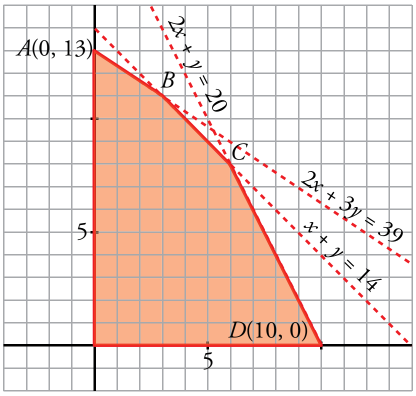
y = metros de cable de tipo B

	CABLE TIPO A	CABLE TIPO B	DISPONIBLE
COBRE (kg)	$10x$	$15y$	195
TITANIO (kg)	$2x$	$1y$	20
ALUMINIO (kg)	$1x$	$1y$	14
BENEFICIO (€)	1 500	1 000	

Las restricciones del problema son:

$$\begin{cases} x \geq 0 \\ y \geq 0 \\ 10x + 15y \leq 195 \;\rightarrow\; 2x + 3y \leq 39 \\ 2x + y \leq 20 \\ x + y \leq 14 \end{cases}$$

La región factible es la zona sombreada:



Calculamos las coordenadas de los vértices B y C:

$$\left.\begin{aligned} 2x + 3y &= 39 \\ x + y &= 14 \end{aligned}\right\} \; 39 - 2x = 42 - 3x \;\rightarrow\; x = 3 \;\rightarrow\; B(3, 11)$$

$$\left.\begin{aligned} 2x + y &= 20 \\ x + y &= 14 \end{aligned}\right\} \; 20 - 2x = 14 - x \;\rightarrow\; x = 6 \;\rightarrow\; C(6, 8)$$

La función objetivo que hay que maximizar es: $F(x, y) = 1\,500x + 1\,000y$

$F(A) = F(0, 13) = 13\,000$

$F(B) = F(3, 11) = 15\,500$

$F(C) = F(6, 8) = 17\,000$

$F(D) = F(10, 0) = 15\,000$

El beneficio máximo, que es de 17 000 euros, se obtiene en el punto $C(6, 8)$.

Es decir, para obtener el beneficio máximo será necesario fabricar 600 metros de cable del tipo A y 800 metros de cable del tipo B

5 **Un deportista solamente puede tomar para desayunar barritas de chocolate y barritas de cereales. Cada barrita de chocolate proporciona 40 g de hidratos de carbono, 30 g de proteínas y 200 kcal, mientras que cada barrita de cereales proporciona 80 g de hidrados de carbono, 10 g de proteínas y 100 kcal. El deportista quiere tomar al menos 320 g de hidratos de carbono y 90 g de proteínas, pero no más de 1 000 kcal. El coste de cada barrita de chocolate es de 2 € mientras que el de cada barrita de cereales es de 1 €.**

¿Cuántas barritas de cada tipo tiene que tomar el deportista para gastar la menor cantidad de dinero?

Llamamos x al número de barritas de chocolate e y al número de barritas de cereales.

	HIDRATOS DE CARBONO	PROTEÍNAS	KCAL
BARRITAS DE CHOCOLATE	40	30	200
BARRITAS DE CEREALES	80	10	100
NECESIDADES	320	90	1 000

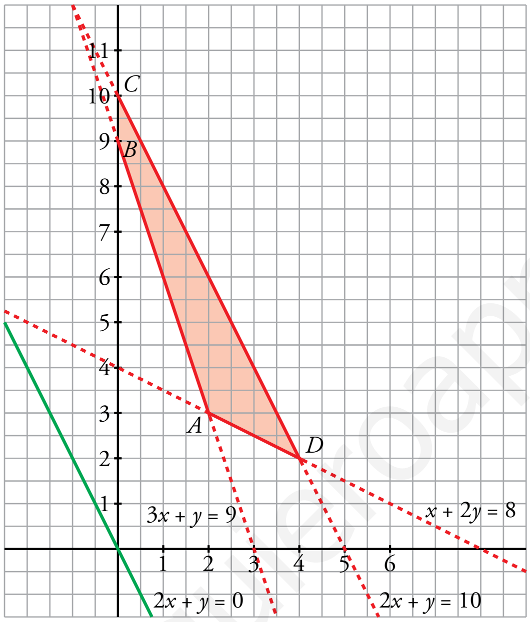
Restricciones:

$$\begin{cases} 40x + 80y \ge 320 \;\to\; x + 2y \ge 8 \\ 30x + 10y \ge 90 \;\to\; 3x + y \ge 9 \\ 200x + 100y \le 1\,000 \;\to\; 2x + y \le 10 \\ x \ge 0 \\ y \ge 0 \end{cases}$$

La función que nos da el gasto es:

$F(x, y) = 2x + y$

La representación de la región de validez y la función de gasto es:



La recta variable $2x + y = K$ toma su valor mínimo (dentro de los válidos) en el vértice $A(2, 3)$.

Para minimizar los gastos, debe tomar 2 barritas de chocolate y 3 de cereales.