

**EJERCICIOS: TEMA 1: MATRICES.**

1º Dadas las matrices:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 2 & 0 \\ 3 & -1 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad C = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

determinar la matriz  $X$  que verifica la ecuación matricial  $A \cdot B \cdot X = C \cdot X + I$ , siendo  $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ .

2º Determinar la matriz  $X$  solución de la ecuación matricial  $A \cdot X \cdot B = I$ , donde:

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}, \quad I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

3º Determinar la matriz  $X$  que verifica la ecuación matricial  $A \cdot X + B = C$ , donde:

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}.$$

4º Determinar la matriz  $X$  que verifica la ecuación  $A^2 \cdot X - B = A \cdot X$ , donde:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad B = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 1 & 3 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

5º Dadas las matrices  $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 3 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix}$ ,  $B = \begin{pmatrix} x & 0 & 1 \\ y & 1 & 0 \\ 3 & -2 & z \end{pmatrix}$  y  $C = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 2 \\ 11 & -6 & -1 \\ -6 & 4 & 1 \end{pmatrix}$ ,

determinar los valores  $x, y, z$  que hacen posible la igualdad  $A \cdot B = A + C$ .

6º Determinar las matrices  $A$  y  $B$  que verifican:

$$2A - B = \begin{pmatrix} -4 & 1 & 7 \\ 6 & 0 & -3 \end{pmatrix} \quad A + 2B = \begin{pmatrix} 3 & -2 & -4 \\ 3 & 5 & 1 \end{pmatrix}$$

7º Dada la matriz  $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ , hallar las matrices  $X$  que verifique:  $A \cdot X = X \cdot A$ .

8º/ Sean las matrices

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & -1 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 2 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}$$

a) Determine la dimensión de la matriz  $M$  para que pueda efectuarse el producto  $A \cdot M \cdot C$ .

b) Determine la dimensión de la matriz  $N$  para que  $C^t \cdot N$  sea una matriz cuadrada.

c) Calcula  $A^t \cdot B \cdot C^t$ .

9º/ Dada la matriz  $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ , halla  $A^3$ ,  $A^5$  y  $A^n$ .

10º/ Calcula  $A^{2000}$ , siendo  $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ .

11º/ Dada la matriz  $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ , halla  $A^{2004}$ .

12º/ Determine los valores  $x$  e  $y$  que hacen cierta la siguiente igualdad:

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & x \\ y & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

13º/ Calcula el rango de la matriz  $A = \begin{pmatrix} -1 & -1 & -1 \\ 3 & 6 & 9 \\ -5 & -10 & m \end{pmatrix}$  según los valores del parámetro real  $m$ .

14º/ Determina dos matrices  $X$  e  $Y$  tales que:

$$3X - 2Y = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 8 & -1 \end{pmatrix} \quad 4X - 3Y = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}.$$

**SOLUCIONES:**

1º Dadas las matrices:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 2 & 0 \\ 3 & -1 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad C = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

determinar la matriz  $X$  que verifica la ecuación matricial  $A \cdot B \cdot X = C \cdot X + I$ , siendo  $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ .

Despejamos la matriz  $X$  de la ecuación:

$$A \cdot B \cdot X = C \cdot X + I$$

$$A \cdot B \cdot X - C \cdot X = I$$

$$(A \cdot B - C) \cdot X = I$$

Multiplicamos  $(A \cdot B - C)^{-1}$  por la izquierda:

$$(A \cdot B - C)^{-1} \cdot (A \cdot B - C) \cdot X = (A \cdot B - C)^{-1} \cdot I$$

$$I \cdot X = (A \cdot B - C)^{-1}$$

$$\boxed{X = (A \cdot B - C)^{-1}}$$

Calculamos previamente la matriz  $A \cdot B - C$ :

$$A \cdot B - C = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 2 & 0 \\ 3 & -1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$$

Calculamos ahora su matriz inversa:

$$\left( \begin{array}{cc|cc} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 0 & 1 \end{array} \right) \rightarrow \left( \begin{array}{cc|cc} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & -4 & -1 & 1 \end{array} \right) \rightarrow \left( \begin{array}{cc|cc} 2 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & -4 & -1 & 1 \end{array} \right) \rightarrow \left( \begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 1/2 & 1/2 \\ 0 & 1 & 1/4 & -1/4 \end{array} \right)$$

$$F_1 \rightarrow \frac{1}{2} F_1$$

$$F_2 \rightarrow F_2 - F_1 \quad F_1 \rightarrow 2F_1 + F_2$$

$$F_2 \rightarrow \frac{-1}{4} F_2$$

Por tanto la solución:

$$\boxed{X = (A \cdot B - C)^{-1} = \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 \\ 1/4 & -1/4 \end{pmatrix}}$$

2º/ Determinar la matriz  $X$  solución de la ecuación matricial  $A \cdot X \cdot B = I$ , donde:

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}, \quad I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Despejamos la matriz  $X$  de la ecuación:

$$A \cdot X \cdot B = I$$

Multiplicamos  $A^{-1}$  por la izquierda y  $B^{-1}$  por la derecha:

$$A^{-1} A \cdot X \cdot B \cdot B^{-1} = A^{-1} \cdot I \cdot B^{-1}$$

$$I \cdot X \cdot I = A^{-1} \cdot I \cdot B^{-1}$$

$$\boxed{X = A^{-1} \cdot B^{-1}}$$

Calculamos  $A^{-1}$ :

$$\begin{pmatrix} -1 & 2 & | & 1 & 0 \\ 1 & 1 & | & 0 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} -1 & 2 & | & 1 & 0 \\ 0 & 3 & | & 1 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} -3 & 0 & | & 1 & -2 \\ 0 & 3 & | & 1 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & | & -1/3 & 2/3 \\ 0 & 1 & | & 1/3 & 1/3 \end{pmatrix}$$

$$F_1 \rightarrow \frac{-1}{3} F_1$$

$$F_2 \rightarrow F_2 + F_1 \quad F_1 \rightarrow 3F_1 - 2F_2$$

$$F_2 \rightarrow \frac{1}{3} F_2$$

Calculamos  $B^{-1}$ :

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & | & 1 & 0 \\ -1 & 2 & | & 0 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} -1 & 3 & | & 1 & 1 \\ -1 & 2 & | & 0 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} -1 & 3 & | & 1 & 1 \\ 0 & -1 & | & -1 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} -1 & 0 & | & -2 & 1 \\ 0 & -1 & | & -1 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & | & 2 & -1 \\ 0 & 1 & | & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$F_1 \rightarrow F_1 + F_2 \quad F_2 \rightarrow F_2 - F_1 \quad F_1 \rightarrow F_1 + 3F_2$$

$$F_1 \rightarrow -F_1$$

$$F_2 \rightarrow -F_2$$

Por tanto, la solución es:

$$X = A^{-1} \cdot B^{-1} = \begin{pmatrix} -1/3 & 2/3 \\ 1/3 & 1/3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1/3 \\ 1 & -1/3 \end{pmatrix}$$

$$\boxed{X = \begin{pmatrix} 0 & 1/3 \\ 1 & -1/3 \end{pmatrix}}$$

3º/ Determinar la matriz  $X$  que verifica la ecuación matricial  $A \cdot X + B = C$ , donde:

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}.$$

Despejamos la matriz  $X$  de la ecuación:

$$A \cdot X + B = C$$

$$A \cdot X = C - B$$

Multiplicamos  $A^{-1}$  por la izquierda:

$$A^{-1} \cdot A \cdot X = A^{-1} \cdot (C - B)$$

$$I \cdot X = A^{-1} \cdot (C - B)$$

$$\boxed{X = A^{-1} \cdot (C - B)}$$

Calculamos  $A^{-1}$ :

$$\left( \begin{array}{cc|cc} 3 & 5 & 1 & 0 \\ -1 & -2 & 0 & 1 \end{array} \right) \rightarrow \left( \begin{array}{cc|cc} 3 & 5 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 3 \end{array} \right) \rightarrow \left( \begin{array}{cc|cc} 3 & 0 & 6 & 15 \\ 0 & -1 & 1 & 3 \end{array} \right) \rightarrow \left( \begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 2 & 5 \\ 0 & 1 & -1 & -3 \end{array} \right)$$

$$F_2 \rightarrow 3F_2 + F_1 \quad F_1 \rightarrow F_1 + 5F_2 \quad F_1 \rightarrow \frac{1}{3}F_1 \\ F_2 \rightarrow -F_2$$

Y finalmente calculamos la solución:

$$X = A^{-1} \cdot (C - B) = \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ -1 & -3 \end{pmatrix} \cdot \left[ \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix} \right] = \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ -1 & -3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -2 & 1 & -1 \\ 2 & 0 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & 2 & -17 \\ -4 & -1 & 10 \end{pmatrix}$$

$$\boxed{X = \begin{pmatrix} 6 & 2 & -17 \\ -4 & -1 & 10 \end{pmatrix}}$$

4º/ Determinar la matriz  $X$  que verifica la ecuación  $A^2 \cdot X - B = A \cdot X$ , donde:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad B = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 1 & 3 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

Despejamos la matriz  $X$  de la ecuación:

$$A^2 \cdot X - B = A \cdot X$$

$$A^2 \cdot X - A \cdot X = B$$

$$(A^2 - A) \cdot X = B$$

Multiplicamos  $(A^2 - A)^{-1}$  por la izquierda:

$$(A^2 - A)^{-1} \cdot (A^2 - A) \cdot X = (A^2 - A)^{-1} \cdot B$$

$$I \cdot X = (A^2 - A)^{-1} \cdot B$$

$$\boxed{X = (A^2 - A)^{-1} \cdot B}$$

Calculamos  $A^2 - A$  previamente, resultando:

$$A^2 - A = A \cdot A - A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 2 & 0 & -2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Y posteriormente hallamos  $(A^2 - A)^{-1}$ , obteniendo:

$$(A^2 - A)^{-1} = \begin{pmatrix} 1/2 & 0 & 1/2 \\ -1 & 1/2 & 0 \\ 1/2 & -1/2 & 1/2 \end{pmatrix}$$

Finalmente, hallamos la solución:

$$X = (A^2 - A)^{-1} \cdot B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1/2 \\ -3/2 & 5/2 & -1/2 \\ 1/2 & -3/2 & 0 \end{pmatrix}$$

5º/ Dadas las matrices  $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 3 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix}$ ,  $B = \begin{pmatrix} x & 0 & 1 \\ y & 1 & 0 \\ 3 & -2 & z \end{pmatrix}$  y  $C = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 2 \\ 11 & -6 & -1 \\ -6 & 4 & 1 \end{pmatrix}$ ,  
determinar los valores  $x, y, z$  que hacen posible la igualdad  $A \cdot B = A + C$ .

$$A \cdot B = A + C$$

Desarrollamos esta igualdad:

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 3 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x & 0 & 1 \\ y & 1 & 0 \\ 3 & -2 & z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 3 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -2 & 0 & 2 \\ 11 & -6 & -1 \\ -6 & 4 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 2x+y & 1 & 2 \\ -x+9 & -6 & -1+3z \\ x+y-6 & 5 & 1-2z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 10 & -6 & 2 \\ -5 & 5 & -1 \end{pmatrix}$$

Igualando los coeficientes de ambas matrices, obtenemos las ecuaciones:

$$(1) \quad 2x + y = 0$$

$$(2) \quad 1 = 1$$

$$(3) \quad 2 = 2$$

$$(4) \quad -x + 9 = 10$$

$$(5) \quad -6 = -6$$

$$(6) \quad -1 + 3z = 2$$

$$(7) \quad x + y - 6 = -5$$

$$(8) \quad 5 = 5$$

$$(9) \quad 1 - 2z = -1$$

Las ecuaciones (2), (3), (5) y (8), evidentemente se cumplen cualesquiera que sean los valores de las incógnitas.

De la ecuación (4):  $-x + 9 = 10 \Rightarrow -x = 10 - 9 \Rightarrow -x = 1 \Rightarrow x = -1$

De la ecuación (6):  $-1 + 3z = 2 \Rightarrow 3z = 2 + 1 \Rightarrow z = \frac{3}{3} \Rightarrow z = 1$

De la ecuación (1):  $2x + y = 0 \Rightarrow 2 \cdot (-1) + y = 0 \Rightarrow -2 + y = 0 \Rightarrow y = 2$

Luego la solución es  $x = -1, y = 2, z = 1$ , y las ecuaciones (7) y (9) se cumplen para estos valores.

6º/ Determinar las matrices  $A$  y  $B$  que verifican:

$$2A - B = \begin{pmatrix} -4 & 1 & 7 \\ 6 & 0 & -3 \end{pmatrix} \quad A + 2B = \begin{pmatrix} 3 & -2 & -4 \\ 3 & 5 & 1 \end{pmatrix}$$

$$2A - B = \begin{pmatrix} -4 & 1 & 7 \\ 6 & 0 & -3 \end{pmatrix} = C$$

$$A + 2B = \begin{pmatrix} 3 & -2 & -4 \\ 3 & 5 & 1 \end{pmatrix} = D$$

Eliminamos  $A$ :

$$\left. \begin{array}{l} 2A - B = C \\ A + 2B = D \end{array} \right\} \quad \left. \begin{array}{l} 2A - B = C \\ -2 \cdot (A + 2B = D) \end{array} \right\} \quad \left. \begin{array}{l} 2A - B = C \\ -2A - 4B = -2D \end{array} \right\}$$

$$\underline{\hspace{10em}}$$

$$-5B = C - 2D \Rightarrow B = \frac{-1}{5}(C - 2D)$$

$$B = \frac{-1}{5}(C - 2D) = \frac{-1}{5} \cdot \left[ \begin{pmatrix} -4 & 1 & 7 \\ 6 & 0 & -3 \end{pmatrix} - 2 \begin{pmatrix} 3 & -2 & -4 \\ 3 & 5 & 1 \end{pmatrix} \right] = \frac{-1}{5} \cdot \begin{pmatrix} -10 & 5 & 15 \\ 0 & -10 & -5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -3 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

Eliminamos  $B$ :

$$\left. \begin{array}{l} 2A - B = C \\ A + 2B = D \end{array} \right\} \quad \left. \begin{array}{l} 2 \cdot (2A - B = C) \\ A + 2B = D \end{array} \right\} \quad \left. \begin{array}{l} 4A - 2B = 2C \\ A + 2B = D \end{array} \right\}$$

$$\underline{\hspace{10em}}$$

$$5A = 2C + D \Rightarrow A = \frac{1}{5}(2C + D)$$

$$A = \frac{1}{5}(2C + D) = \frac{1}{5} \cdot \left[ 2 \cdot \begin{pmatrix} -4 & 1 & 7 \\ 6 & 0 & -3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 & -2 & -4 \\ 3 & 5 & 1 \end{pmatrix} \right] = \frac{1}{5} \cdot \begin{pmatrix} -5 & 0 & 10 \\ 15 & 5 & -5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 3 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$



7º/ Dada la matriz  $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ , hallar las matrices  $X$  que verifique:  $A \cdot X = X \cdot A$ .

Llamamos  $X = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix}$ .

Desarrollamos la igualdad  $A \cdot X = X \cdot A$ :

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} a & b & c \\ -d & -e & -f \\ d & e & f \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & -b+c & 0 \\ d & -e+f & 0 \\ g & -h+i & 0 \end{pmatrix}$$

Igualando coeficientes tenemos:

$$\begin{array}{lll} (1) & a=a & (4) & -d=d & (7) & d=g \\ (2) & b=-b+c & (5) & -e=-e+f & (8) & e=-h+i \\ (3) & c=0 & (6) & -f=0 & (9) & f=0 \end{array}$$

De estas ecuaciones deducimos:  $b=0$ ,  $c=0$ ,  $d=0$ ,  $f=0$ ,  $g=0$ ,  $i=e+h$ .

Por lo tanto, las soluciones son de la forma:

$$X = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & e & 0 \\ 0 & h & e+h \end{pmatrix}, \text{ donde } a, e, h \in \mathbb{R}.$$

8º/ Sean las matrices

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & -1 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 2 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}$$

a) Determine la dimensión de la matriz  $M$  para que pueda efectuarse el producto  $A \cdot M \cdot C$ .

b) Determine la dimensión de la matriz  $N$  para que  $C^t \cdot N$  sea una matriz cuadrada.

c) Calcula  $A^t \cdot B \cdot C^t$ .

a) Dado que  $A$  es de dimensión  $2 \times 3$  y  $C$  es de dimensión  $3 \times 2$  para que pueda efectuarse  $A \cdot M \cdot C$  tendríamos que:

Número de filas de  $M =$  Número de columnas de  $A = 3$ .

Número de columnas de  $M =$  Número de filas de  $C = 3$ .

Por tanto,  $M$  ha de ser una matriz cuadrada de orden 3.

b)  $C^t$  es una matriz de dimensión  $2 \times 3$ , luego para que pueda efectuarse el producto  $C^t \cdot N$ :

Número de filas de  $N =$  Número de columnas de  $C^t = 3$ .

El producto  $C^t \cdot N$  tendrá 2 filas y sus columnas será el número de columnas de  $N$ , por lo que para que el resultado sea una matriz cuadrada, el número de columnas de  $N$  ha de ser 2.

En conclusión,  $N$  será de dimensión  $3 \times 2$ .

$$c) A^t \cdot B \cdot C^t = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -1 & 2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ -2 & 2 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 3 \\ -2 & -2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ -2 & 2 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 4 & -8 \\ -4 & 6 & -4 \\ 2 & -4 & 4 \end{pmatrix}$$

9º/ Dada la matriz  $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ , halla  $A^3$ ,  $A^5$  y  $A^n$ .

$$A^2 = A \cdot A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A^3 = A^2 \cdot A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A^4 = A^3 \cdot A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A^5 = A^4 \cdot A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 5 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

.....

$$A^n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & n \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

10º/Calcula  $A^{2000}$ , siendo  $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ .

$$A^2 = A \cdot A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

$$A^3 = A^2 \cdot A = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 8 \\ 0 & 8 & 0 \\ 8 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$A^4 = A^3 \cdot A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 8 \\ 0 & 8 & 0 \\ 8 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 16 & 0 & 0 \\ 0 & 16 & 0 \\ 0 & 0 & 16 \end{pmatrix} \dots$$

$$A^n = \begin{cases} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2^n \\ 0 & 2^n & 0 \\ 2^n & 0 & 0 \end{pmatrix} & \text{si } n \text{ es par} \\ \begin{pmatrix} 2^n & 0 & 0 \\ 0 & 2^n & 0 \\ 0 & 0 & 2^n \end{pmatrix} & \text{si } n \text{ es impar} \end{cases}, \text{ por lo tanto: } A^{2000} = \begin{pmatrix} 2^{2000} & 0 & 0 \\ 0 & 2^{2000} & 0 \\ 0 & 0 & 2^{2000} \end{pmatrix}.$$

11º/ Dada la matriz  $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ , halla  $A^{2004}$ .

$$A^2 = A \cdot A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = I$$

$$A^3 = A^2 \cdot A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = A$$

$$A^4 = A^3 \cdot A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = I \dots$$

$A^n = I$  si  $n$  es par, y  $A^n = A$  si  $n$  es impar, por lo que  $A^{2004} = I$ .

12º/ Determine los valores  $x$  e  $y$  que hacen cierta la siguiente igualdad:

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & x \\ y & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Operando:  $\begin{pmatrix} x-y \\ 3x+2y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3+2x \\ 3y-2 \end{pmatrix}$  .

Igualando y resolviendo el sistema:

$$\left. \begin{array}{l} x-y=3+2x \\ 3x+2y=3y-2 \end{array} \right\} \text{ Solución: } x = \frac{-5}{4}, \quad y = \frac{-7}{4} .$$

13º/ Calcula el rango de la matriz  $A = \begin{pmatrix} -1 & -1 & -1 \\ 3 & 6 & 9 \\ -5 & -10 & m \end{pmatrix}$  según los valores del parámetro real  $m$ .

Aplicamos el método de Gauss, para hacer ceros por debajo de la diagonal:

$$\begin{pmatrix} -1 & -1 & -1 \\ 3 & 6 & 9 \\ -5 & -10 & m \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} -1 & -1 & -1 \\ 0 & 3 & 6 \\ 0 & -5 & m+5 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} -1 & -1 & -1 \\ 0 & 3 & 6 \\ 0 & 0 & 3m+45 \end{pmatrix}$$

$$\begin{array}{l} F_2 \rightarrow F_2 + 3F_1 \\ F_3 \rightarrow F_3 - 5F_1 \end{array} \quad \begin{array}{l} F_3 \rightarrow 3F_3 + 5F_2 \end{array}$$

Si  $3m+45=0 \Rightarrow m = \frac{-45}{3} = -15$  .

Por tanto:

Si  $m = -15 \Rightarrow r(A) = 2$  (hay 2 filas no nulas).

Si  $m \neq -15 \Rightarrow r(A) = 3$  (las 3 filas son no nulas).

14º/ Determina dos matrices  $X$  e  $Y$  tales que:

$$3X - 2Y = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 8 & -1 \end{pmatrix} \quad 4X - 3Y = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 0 \end{pmatrix} .$$

$$\left. \begin{array}{l} 3X - 2Y = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 8 & -1 \end{pmatrix} = A \\ 4X - 3Y = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 0 \end{pmatrix} = B \end{array} \right\} \Rightarrow \begin{cases} 3X - 2Y = A \\ 4X - 3Y = B \end{cases}$$

Eliminamos  $Y$ :

$$\left. \begin{array}{l} 3 \cdot (3X - 2Y = A) \\ -2 \cdot (4X - 3Y = B) \end{array} \right\} \begin{array}{l} 9X - 6Y = 3A \\ -8X + 6Y = -2B \end{array}$$


---


$$X = 3A - 2B$$

$$Y = 3A - 2B = 3 \cdot \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 8 & -1 \end{pmatrix} - 2 \cdot \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & -14 \\ 18 & -3 \end{pmatrix}$$

Eliminamos  $X$ :

$$\left. \begin{array}{l} 4 \cdot (3X - 2Y = A) \\ -3 \cdot (4X - 3Y = B) \end{array} \right\} \begin{array}{l} 12X - 8Y = 4A \\ -12X + 9Y = -3B \end{array}$$


---


$$Y = 4A - 3B$$

$$Y = 4A - 3B = 4 \cdot \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 8 & -1 \end{pmatrix} - 3 \cdot \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & -20 \\ 23 & -4 \end{pmatrix}$$