EXAMEN DE MATEMÁTICAS – 1ª EVALUACIÓN – 2º BACH. – 28-X-2011

1) Sabiendo que $|A| = \begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} = 2$, calcula, haciendo uso de las propiedades de los determinantes:

(a) $|-3A|$ y $|A^{-1}|$ *(1 punto)* (b) $\begin{vmatrix} c & b & a \\ f & e & d \\ 2i & 2h & 2g \end{vmatrix}$ *(0,75 puntos)*

(c) $\begin{vmatrix} a & b & a-c \\ d & e & d-f \\ g & h & g-i \end{vmatrix}$ *(0,75 puntos)*

2) Resuelve la ecuación matricial $A \cdot X = B \cdot X + C$, donde:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \quad , B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad C = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

(2,5 puntos)

3) Dada la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & k \\ k & 1 & 3 \\ 1 & 7 & k \end{pmatrix}$

(a) Estudia el rango de A en función de los valores del parámetro k . *(1,25 puntos)*
(b) Para $k = 0$. Halla la matriz inversa de A . *(1,25 puntos)*

4) Dadas las matrices $A = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$,$B = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ y $C = \begin{pmatrix} 4 & -4 \\ 10 & -4 \end{pmatrix}$, se pide:

(a) Resuelve la ecuación matricial: $A \cdot X \cdot B = C$, donde X es una matriz de orden 2×2. *(1,25 puntos)*

(b) Resuelve el sistema $\left.\begin{matrix} 2X + 2Y = A \\ 4X + 3Y = B \end{matrix}\right\}$, siendo X e Y dos matrices de orden 2×2. *(1,25 puntos)*

SOLUCIONES

1) Sabiendo que $|A| = \begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} = 2$, calcula, haciendo uso de las propiedades de los determinantes:

(a) $|-3A| = \begin{vmatrix} -3a & -3b & -3c \\ -3d & -3e & -3f \\ -3g & -3h & -3i \end{vmatrix} = (-3)^3 \begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} = -27 \cdot 2 = -54$

$|A^{-1}| = \frac{1}{|A|} = \frac{1}{2}$

(b) $\begin{vmatrix} c & b & a \\ f & e & d \\ 2i & 2h & 2g \end{vmatrix} = 2\begin{vmatrix} c & b & a \\ f & e & d \\ i & h & g \end{vmatrix} = (C_1 \leftrightarrow C_3) - 2 \quad \cdot \begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} = -2 \cdot 2 = -4$

(c) $\begin{vmatrix} a & b & a-c \\ d & e & d-f \\ g & h & g-i \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & b & a \\ d & e & d \\ g & h & g \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a & b & -c \\ d & e & -f \\ g & h & -i \end{vmatrix} = 0(C_1 = C_3) - \begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} = -2$

2) $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ y $C = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

$$A \cdot X = B \cdot X + C \rightarrow A \cdot X - B \cdot X = C \rightarrow (A-B) \cdot X = C \rightarrow X = (A-B)^{-1} C$$

$$M = A - B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow |M| = 2 \rightarrow M^{-1} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -2 & 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ -1 & \frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix}$$

$$X = (A-B)^{-1} C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ -1 & \frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} = = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ \frac{1}{2} & 0 & 1 \\ -\frac{1}{2} & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

3) Dada la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & k \\ k & 1 & 3 \\ 1 & 7 & k \end{pmatrix}$

(a) Estudia el rango de A en función de los valores del parámetro k.

$$|A|=\begin{vmatrix}1&3&k\\k&1&3\\1&7&k\end{vmatrix}=k+9+7k^2-k-3k^2-21=4k^2-12=0\rightarrow 4k^2=12\rightarrow k=\pm\sqrt{3}$$

Para $k=\sqrt{3}\rightarrow A=\begin{pmatrix}1&3&\sqrt{3}\\\sqrt{3}&1&3\\1&7&\sqrt{3}\end{pmatrix}\rightarrow\begin{vmatrix}1&3\\\sqrt{3}&1\end{vmatrix}\neq 0\rightarrow r(A)=2$

Para $k=-\sqrt{3}\rightarrow A=\begin{pmatrix}1&3&-\sqrt{3}\\-\sqrt{3}&1&3\\1&7&-\sqrt{3}\end{pmatrix}\rightarrow\begin{vmatrix}1&3\\-\sqrt{3}&1\end{vmatrix}\neq 0\rightarrow r(A)=2$

Para $k\neq\pm\sqrt{3}\rightarrow|A|\neq 0\rightarrow r(A)=3$

(b) Para $k=0$. Halla la matriz inversa de A.

$$\begin{vmatrix}1&3&0\\0&1&3\\1&7&0\end{vmatrix}=9-21=-12\rightarrow A^{-1}=-\frac{1}{12}\begin{pmatrix}-21&0&9\\3&0&-3\\-1&-4&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{7}{4}&0&-\frac{3}{4}\\-\frac{1}{4}&0&\frac{1}{4}\\\frac{1}{12}&\frac{1}{3}&-\frac{1}{12}\end{pmatrix}$$

4) Dadas las matrices $A=\begin{pmatrix}0&2\\2&4\end{pmatrix}$ $B=\begin{pmatrix}1&-1\\2&1\end{pmatrix}$ y $C=\begin{pmatrix}4&-4\\10&4\end{pmatrix}$, se pide:

(a) Resuelve la ecuación matricial: $A\cdot X\cdot B=C$, donde X es una matriz de orden 2×2. $A\cdot X\cdot B=C\rightarrow A^{-1}A\cdot X\cdot B\cdot B^{-1}=A^{-1}\cdot C\cdot B^{-1}$

$$|A|=-4; A^{-1}=-\frac{1}{4}\begin{pmatrix}4&-2\\-2&0\end{pmatrix}\rightarrow A^{-1}=\begin{pmatrix}-1&\frac{1}{2}\\\frac{1}{2}&0\end{pmatrix}$$

$$|B|=3; B^{-1}=\frac{1}{3}\begin{pmatrix}1&1\\-2&1\end{pmatrix}\rightarrow B^{-1}=\begin{pmatrix}\frac{1}{3}&\frac{1}{3}\\-\frac{2}{3}&\frac{1}{3}\end{pmatrix}$$

$$X=\begin{pmatrix}-1&\frac{1}{2}\\\frac{1}{2}&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}4&-4\\10&-4\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}\frac{1}{3}&\frac{1}{3}\\-\frac{2}{3}&\frac{1}{3}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1&1\\2&0\end{pmatrix}$$

$$\text{(b)}\quad \left.\begin{matrix} 2X+2Y=A \\ 4X+3Y=B \end{matrix}\right\} \to \left.\begin{matrix} -4X-4Y=-2A \\ 4X+3Y=B \end{matrix}\right\} -Y=-2A+B \to Y=2A-B$$

$$Y=2\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}-\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 & 4 \\ 4 & 8 \end{pmatrix}-\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -1 & 5 \\ 2 & 7 \end{pmatrix}$$

$$\left.\begin{matrix} 2X+2Y=A \\ 4X+3Y=B \end{matrix}\right\} \to 2X=A-2Y=A-2(2A-B)=-3A+2B \to X=\frac{1}{2}(2B-3A)$$

$$X=\frac{1}{2}\left[2\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}-3\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}\right]=\frac{1}{2}\left[\begin{pmatrix} 2 & -2 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}-\begin{pmatrix} 0 & 6 \\ 6 & 12 \end{pmatrix}\right]=\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 2 & -8 \\ -2 & -10 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & -4 \\ -1 & -5 \end{pmatrix}$$