EXAMEN ÁLGEBRA

1. Sin desarrollar y aplicando las propiedades de los determinantes, calcula:

$$\begin{vmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 2 & a+3 & b+4 \\ 2 & c+3 & d+4 \end{vmatrix}$$ (1.5 puntos)

2. Siendo: $A=\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ $B=\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ $C=\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$ (2 puntos)

Calcular el valor de X en las siguientes ecuaciones:

1. $AX+B=C$
2. $AX+BX=C$

3. Da respuestas ***razonadas***, claras y concisas a las siguientes preguntas: (1.5p)
a) ¿Todo sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas es compatible?
b) Un sistema de dos ecuaciones con tres incógnitas ¿puede ser compatible determinado?
c) ¿Todo sistema de dos ecuaciones con cuatro incógnitas tiene solución?

4. Sea el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\left.\begin{array}{l} ax+y+z=a+2 \\ 2x-ay+z=2 \\ x-y+az=a \end{array}\right\}$$

a) Discútelo según los valores de a ¿tiene siempre solución? (1.75 puntos)

b) Resuelve el sistema para a = 1 (0.75 puntos)

5. Sabemos que el sistema de ecuaciones $\left.\begin{array}{l} 2x-y+3z=1 \\ x+2y-z=2 \end{array}\right\}$ tiene las mismas soluciones que el que resulta al añadirle la ecuación $ax+y+7z=7$

a) Determina el valor de a. (1.25 puntos)

b) Calcula la solución del sistema inicial de dos ecuaciones, de manera que la suma de los valores de las incógnitas sea la unidad. (1.25 puntos)

SOLUCIONES

1. Sin desarrollar y aplicando las propiedades de los determinantes, calcula:

$$\begin{vmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 2 & a+3 & b+4 \\ 2 & c+3 & d+4 \end{vmatrix} = 2\begin{vmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 1 & a+3 & b+4 \\ 1 & c+3 & d+4 \end{vmatrix} = 2\left[\begin{vmatrix} 1 & 0 & 4 \\ 1 & a & b+4 \\ 1 & c & d+4 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 1 & 3 & b+4 \\ 1 & 3 & d+4 \end{vmatrix}\right] =$$

$$= 2\left[\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & a & b \\ 1 & c & d \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & 0 & 4 \\ 1 & a & 4 \\ 1 & c & 4 \end{vmatrix} + 3\underbrace{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 4 \\ 1 & 1 & b+4 \\ 1 & 1 & d+4 \end{vmatrix}}_{C_1 = C_2}\right] = 2\left[\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & a & b \\ 1 & c & d \end{vmatrix} + 4\underbrace{\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & a & 1 \\ 1 & c & 1 \end{vmatrix}}_{C_1 = C_3}\right] =$$

$$= 2\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & a & b \\ 1 & c & d \end{vmatrix} = \xrightarrow{F_2 - F_1} 2\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & a & b \\ 1 & c & d \end{vmatrix} = \frac{2}{a}\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & a & b \\ 0 & ac & ad \end{vmatrix} =$$

$$== \xrightarrow{F_3 - cF_2} \frac{2}{a}\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & a & b \\ 0 & 0 & ad-bc \end{vmatrix} = \frac{2}{a}\left[a(ad-bc)\right] = 2(ad-bc)$$

2. Siendo: $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$

1. $AX + B = C \to AX = C - B \to X = A^{-1}(C-B)$

$$|A| = 1 \to A^{-1} = \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ -3 & 1 \end{pmatrix} \to X = A^{-1}(C-B) = \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 & 2 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$$

2. $AX + BX = C \to (A+B)X = C \to X = (A+B)^{-1}C$

$$A+B = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 4 & 5 \end{pmatrix} \to |A+B| = 7 \to (A+B)^{-1} = \frac{1}{7}\begin{pmatrix} 5 & -2 \\ -4 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{5}{7} & -\frac{2}{7} \\ -\frac{4}{7} & \frac{3}{7} \end{pmatrix}$$

$$X = (A+B)^{-1}C = \begin{pmatrix} \frac{5}{7} & -\frac{2}{7} \\ -\frac{4}{7} & \frac{3}{7} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} == \begin{pmatrix} \frac{3}{7} & \frac{4}{7} \\ -\frac{1}{7} & \frac{1}{7} \end{pmatrix}$$

3. Da respuestas ***razonadas***, claras y concisas a las siguientes preguntas:

a) ¿Todo sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas es compatible?

No, ya que puede ser rango(A)=1 y rango(A*)=2 , siendo A la matriz de los coeficientes y A* la ampliada con los término independientes y, según el Teorema de Rouché-Fröbenius, en este caso el sistema es incompatible.

b) Un sistema de dos ecuaciones con tres incógnitas ¿puede ser compatible determinado?

Nunca, ya que el rango de la matriz del sistema es como máximo 2 y este número es menor que el número de incógnitas, que son tres.

c) ¿Todo sistema de dos ecuaciones con cuatro incógnitas tiene solución?

No, puede ser incompatible, si el rango de la matriz del sistema es 1 y el de la ampliada 2.

4. a) Discútelo según los valores de a ¿tiene siempre solución?

$$\left.\begin{array}{l} ax+y+z=a+2 \\ 2x-ay+z=2 \\ x-y+az=a \end{array}\right\} \to A=\begin{pmatrix} a & 1 & 1 \\ 2 & -a & 1 \\ 1 & -1 & a \end{pmatrix} \quad A^*=\begin{pmatrix} a & 1 & 1 & a+2 \\ 2 & -a & 1 & 2 \\ 1 & -1 & a & a \end{pmatrix}$$

$$|A|=-a^3+1-2+a+a-2a=-a^3-1=0 \Rightarrow a^3=-1 \Rightarrow a=-1$$

$$\text{Para } a=-1 \ \to A=\begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix} \quad A^*=\begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} \neq 0 \Rightarrow r(A)=2 \text{ y } \begin{vmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & -1 \end{vmatrix}=0 \Rightarrow r(A^*)=2 \text{ Compatible Indeterminado}$$

$$\text{Para } a \neq -1 \ \Rightarrow r(A)=3 \text{ y } r(A^*)=3 \text{ Sistema Compatible Determinado}$$

Luego, SIEMPRE tiene solución, para cualquier a

b) Resuelve el sistema para a = 1

$$\left.\begin{array}{l} x+y+z=3 \\ 2x-y+z=2 \\ x-y+z=1 \end{array}\right\} \to A=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \quad A^*=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 2 & -1 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \text{ Por Cramer:}$$

$$|A|=-1+1-2+1+1-2=-2$$

$$x=\frac{\begin{vmatrix}3&1&1\\2&-1&1\\1&-1&1\end{vmatrix}}{-2}=1;\; y=\frac{\begin{vmatrix}1&3&1\\2&2&1\\1&1&1\end{vmatrix}}{-2}=1;\; z=\frac{\begin{vmatrix}1&1&3\\2&-1&2\\1&-1&1\end{vmatrix}}{-2}=1$$

5. $\left.\begin{array}{l}2x-y+3z=1\\x+2y-z=2\end{array}\right\}$ mismas soluciones al añadirle la ecuación $ax+y+7z=7$

a) Determina el valor de a. El sistema $\left.\begin{array}{l}2x-y+3z=1\\x+2y-z=2\end{array}\right\}$ es compatible indeterminado ya que r(A)=r(A*)=2 $\left(\begin{vmatrix}2&-1\\1&2\end{vmatrix}\neq 0\right)$; luego el sistema nuevo:

$\left.\begin{array}{l}2x-y+3z=1\\x+2y-z=2\\ax+y+7z=7\end{array}\right\}$ también tiene que ser compatible indeterminado (r(A)=r(A*)=2)

$$A=\begin{pmatrix}2&-1&3\\1&2&-1\\a&1&7\end{pmatrix}\quad A^*=\begin{pmatrix}2&-1&3&1\\1&2&-1&2\\a&1&7&7\end{pmatrix}\qquad |A|=\begin{vmatrix}2&-1&3\\1&2&-1\\a&1&7\end{vmatrix}=40-5a$$

$40-5a=0\Rightarrow a=8$ para este valor de a, r(A)=2, veamos el rango de A*:

$\begin{vmatrix}2&-1&1\\1&2&2\\8&1&7\end{vmatrix}=28-16+1-16-4+7=0\rightarrow$ r(A*)=2 Compatible Indeterminado

b) Solución del sistema de manera que la suma de las incógnitas sea la unidad.

$\left.\begin{array}{l}2x-y+3z=1\\x+2y-z=2\end{array}\right\}$ $\quad\begin{vmatrix}2&-1\\1&2\end{vmatrix}=5\neq 0\rightarrow \left.\begin{array}{l}2x-y=1-3\lambda\\x+2y=2+\lambda\end{array}\right\}z=\lambda$, por Cramer:

$$x=\frac{\begin{vmatrix}1-3\lambda&-1\\2+\lambda&2\end{vmatrix}}{5}=\frac{4-5\lambda}{5};\; y=\frac{\begin{vmatrix}2&1-3\lambda\\1&2+\lambda\end{vmatrix}}{5}=\frac{3+5\lambda}{5}\quad \text{pero } x+y+z=1$$

$\frac{4-5\lambda}{5}+\frac{3+5\lambda}{5}+\lambda=1\rightarrow 7+5\lambda=5\rightarrow \lambda=-\frac{2}{5}$ Sol: $\left(\frac{6}{5},\frac{1}{5},-\frac{2}{5}\right)$