EXAMEN DE MATEMÁTICAS – 1ª EVALUACIÓN – 2º BACH. – 25-XI-2011

Nombre:____ Grupo:

1) Sean A y B dos matrices cuadradas de orden 3 cuyos determinantes son $|A| = \frac{1}{2}$ y $|B| = -2$. Halla, razonadamente:

a) [0,5 p] $|A^3|$

b) [0,5 p] $|A^{-1}|$

c) [0,5 p] $|-2A|$

d) [0,5 p] $|A \cdot B^t|$ siendo B^t la matriz traspuesta de B.

e) [0,5 p] El rango de B

2) Sean A y B dos matrices que verifican:

$$A + B = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad A - B = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$$

a) [1 p] Halla las matrices $(A+B)(A-B)$ y $A^2 - B^2$

b) [1,5 p] Resuelve la ecuación matricial $XA - XB - (A+B)^t = 2I$, siendo I la matriz identidad de orden 2 y $(A+B)^t$ la matriz traspuesta de $A+B$.

3) Dadas las matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & t+1 & t-1 \\ -2t-1 & 0 & t+3 \end{pmatrix}$ y $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$

a) [1,75 p] Calcula el rango de A según los diferentes valores de t.

b) [0,75 p] Razona para qué valores de t el sistema $A \cdot X = O$ tiene más de una solución.

4) Dado el sistema de ecuaciones lineales $\left.\begin{array}{r} -\lambda x + y + z = 1 \\ x + \lambda y + z = 2 \\ \lambda x + y + z = 1 \end{array}\right\}$

a) [1,75 p] Clasifica el sistema según los valores del parámetro λ.

b) [0,75 p] Resuelve el sistema para $\lambda = 0$.

SOLUCIÓN

1) Sean A y B dos matrices cuadradas de orden 3 cuyos determinantes son $|A| = \frac{1}{2}$ y $|B| = -2$. Halla, razonadamente:

a) $|A^3| = |A|\cdot|A|\cdot|A| = \left(\frac{1}{2}\right)^3 = \frac{1}{8}$

b) $|A^{-1}| = \frac{1}{|A|} = 2$

c) $|-2A| = (-2)^3|A| = -4$ (un -2 por cada fila, es de orden 3)

d) $|A\cdot B^t| = |A|\cdot|B^t| = |A|\cdot|B| = \frac{1}{2}\cdot(-2) = -1$

e) El rango de B es 3, ya que $|B| = -2 \neq 0$

2) Sean A y B dos matrices que verifican:

$$A+B = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} \quad y \quad A-B = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$$

a) Halla las matrices $(A+B)(A-B)$ y $A^2 - B^2$

$$(A+B)(A-B) = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 4 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & 20 \\ 4 & 16 \end{pmatrix}$$

Para hallar $A^2 - B^2$, hallamos primero A y B, resolviendo el sistema:

$$\left.\begin{matrix} A+B = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} \\ A-B = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \end{matrix}\right\} 2A = \begin{pmatrix} 6 & 6 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \to A = \begin{pmatrix} 3 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \to B = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$$

$$A^2 - B^2 = \begin{pmatrix} 3 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 12 & 15 \\ 5 & 7 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 2 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 13 & 16 \\ 3 & 9 \end{pmatrix}$$

b) Resuelve la ecuación matricial $XA - XB - (A+B)^t = 2I$, siendo I la matriz identidad de orden 2 y $(A+B)^t$ la matriz traspuesta de $A+B$.

$XA - XB - (A+B)^t = 2I \to XA - XB = 2I + (A+B)^t \to X(A-B) = 2I + (A+B)^t$

$X = [2I + (A+B)^t](A-B)^{-1}$, Llamamos $C = 2I + (A+B)^t$ y la calculamos:

$$C = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}^t = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & 3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$$

Hallemos ahora $(A-B)^{-1}$: $A-B = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \to |A-B| = 8 \begin{cases} A_{11} = 2 & A_{12} = 1 \\ A_{21} = -4 & A_{22} = 2 \end{cases}$

$$(A-B)^{-1}=\frac{1}{8}\begin{pmatrix}2 & -4\\ 1 & 2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{1}{4} & -\frac{1}{2}\\ \frac{1}{8} & \frac{1}{4}\end{pmatrix}$$ y por último, calculamos X

$$X=\left[2I+(A+B)^t\right](A-B)^{-1}=\begin{pmatrix}6 & 3\\ 2 & 4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\frac{1}{4} & -\frac{1}{2}\\ \frac{1}{8} & \frac{1}{4}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{15}{8} & -\frac{9}{4}\\ 1 & 0\end{pmatrix}$$

3) Dadas las matrices $A=\begin{pmatrix}1 & 1 & 0\\ 2 & t+1 & t-1\\ -2t-1 & 0 & t+3\end{pmatrix}$ y $X=\begin{pmatrix}x\\ y\\ z\end{pmatrix}$

a) Calcula el rango de A según los diferentes valores de t.

$$\begin{vmatrix}1 & 1 & 0\\ 2 & t+1 & t-1\\ -2t-1 & 0 & t+3\end{vmatrix}=(t+1)(t+3)+(t-1)(-2t-1)-2(t+3)=-t^2+3t-2=0\rightarrow t=\left\langle\begin{matrix}1\\ 2\end{matrix}\right.$$

Para t=1 $\rightarrow A=\begin{pmatrix}1 & 1 & 0\\ 2 & 2 & 0\\ -3 & 0 & 4\end{pmatrix}$ dos filas proporcionales y $\begin{vmatrix}2 & 2\\ -3 & 0\end{vmatrix}\neq 0\rightarrow r(A)=2$

Para t=2 $\rightarrow A=\begin{pmatrix}1 & 1 & 0\\ 2 & 3 & 1\\ -5 & 0 & 5\end{pmatrix}$ con $\begin{vmatrix}1 & 1\\ 1 & 3\end{vmatrix}\neq 0\rightarrow r(A)=2$

Para $t\neq 1$ y $t\neq 2\rightarrow |A|\neq 0\Rightarrow r(A)=3$

b) Razona para qué valores de t el sistema $A\cdot X=O$ tiene más de una solución.

Hemos visto que para $t\neq 1$ y $t\neq 2\rightarrow |A|\neq 0\Rightarrow r(A)=3$, y la matriz ampliada tiene el mismo rango (sólo se añade una columna de ceros), sistema compatible determinado, sólo tiene la solución trivial.

Para t = 1 ó t = 2, tenemos que el rango de A es 2, menor que el número de incógnitas, luego (por Rouché-Fröbenius) el sistema es compatible indeterminado, es decir tiene más de una solución.

4) Dado el sistema de ecuaciones lineales $\left.\begin{array}{l} -\lambda x+y+z=1 \\ x+\lambda y+z=2 \\ \lambda x+y+z=1 \end{array}\right\}$

a) Clasifica el sistema según los valores del parámetro λ.

$A=\begin{pmatrix} -\lambda & 1 & 1 \\ 1 & \lambda & 1 \\ \lambda & 1 & 1 \end{pmatrix}$ $A^*=\begin{pmatrix} -\lambda & 1 & 1 & 1 \\ 1 & \lambda & 1 & 2 \\ \lambda & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ estudiamos los rangos de ambas matrices

$$\begin{vmatrix} -\lambda & 1 & 1 \\ 1 & \lambda & 1 \\ \lambda & 1 & 1 \end{vmatrix} = -\lambda^2+\lambda+1-\lambda^2-1+\lambda=-2\lambda^2+2\lambda=0 \to \lambda(-2\lambda+2)=0 \Rightarrow \left\langle \begin{array}{l} \lambda=0 \\ \lambda=1 \end{array} \right.$$

Para $\lambda=0$ $A=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ $A^*=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, $\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} \neq 0 \to r(A)=2$

$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix}=0$ (dos filas iguales) $\to r(A^*)=2$ Sistema Compatible Indeterminado

Para $\lambda=1$ $A=\begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ $A^*=\begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, $\begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} \neq 0 \to r(A)=2$

$\begin{vmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}=-1+2+1-1+2-1=2\neq 0 \to r(A^*)=3$ Sistema incompatible

Para $\lambda \neq 0$ y $\lambda \neq 1 \to r(A)=3=r(A^*)$ Sistema compatible determinado

b) Resuelve el sistema para $\lambda=0$.

Para $\lambda=0$, $\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} \neq 0 \to r(A)=2$, nos quedamos con las dos primeras ecuaciones:

$\left.\begin{array}{l} y+z=1 \\ x+z=2 \end{array}\right\}$ hacemos $z=\mu \Rightarrow \begin{cases} y=1-\mu \\ x=2-\mu \end{cases}$ Solución: $\begin{cases} x=2-\mu \\ y=1-\mu \\ z=\mu \end{cases}$