

1. Derivar las siguientes funciones:

$$\begin{array}{ll}
 \frac{2x}{1-x^2} & \frac{x^p(1-x)^q}{1+x} \\
 \sqrt{x} \operatorname{sen} \sqrt{x+\sqrt{x}} & \frac{\sec x}{1+\tan x} \\
 \operatorname{sen}(\cos^2 x) & \operatorname{tg}(\sqrt{x}+x) \\
 \frac{e^x}{\operatorname{sen} x} & e^{\sqrt{x}} \\
 xe^x \operatorname{sen} x & (1+\tan x)^{\operatorname{arc} \operatorname{tg} x} \operatorname{arc} \operatorname{sen}(1-\cos x)
 \end{array}
 \quad
 \begin{array}{ll}
 x+\sqrt{x}+\sqrt{x+\sqrt{x}} & \left(\frac{x+x^2}{1+x^2}\right)^{1/3} \\
 \frac{\operatorname{sen} x}{x^2} & \operatorname{sen}(1+\sqrt{\operatorname{sen} x}) \\
 x^2 \cos(1/x) & \operatorname{sen}^2 \sqrt{x} \\
 \operatorname{log}(1+\operatorname{sen} x) & xe^{\sqrt{x}} \\
 \operatorname{arc} \operatorname{tg}(x+\sqrt{1+x^2}) & (\operatorname{arc} \operatorname{tg} x)^{\operatorname{log} x \operatorname{sen} x}
 \end{array}$$

2. Estudiar la continuidad y derivabilidad de las siguientes funciones, calculando las derivadas cuando existan ($a \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{Z}$):

$$\text{a) } f(x) = \begin{cases} x^n \operatorname{arc} \operatorname{tg}(\frac{1}{x}), & \text{si } x \neq 0; \\ a, & \text{si } x = 0. \end{cases} \quad \text{b) } f(x) = x^x \quad \text{c) } f(x) = \begin{cases} \frac{x}{1+e^{1/x}}, & \text{si } x < 0; \\ \sqrt{x^2+x^3}, & \text{si } x \geq 0. \end{cases}$$

$$\text{d) } f(x) = \begin{cases} \frac{\operatorname{arc} \operatorname{tg} x}{x}, & \text{si } x > 0 \\ 1, & \text{si } x = 0 \\ 1 - e^{1/x}, & \text{si } x < 0. \end{cases} \quad \text{e) } f(x) = \operatorname{log}|x| \quad \text{f) } f(x) = \begin{cases} e^{1/x}, & \text{si } x < 0 \\ 0, & \text{si } x = 0 \\ x \operatorname{arc} \operatorname{tg}(1/x), & \text{si } x > 0. \end{cases}$$

3. Sea $f(x) = x^n \operatorname{sen}(\frac{1}{x})$, si $x \neq 0$, $f(0) = 0$. Determinar los $n \in \mathbb{Z}$, que hacen que:

- a) f sea continua en el cero.
- b) f sea derivable en el cero.
- c) f sea derivable y f' sea continua en el cero.

4. Sea $f : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ derivable. Demuestra que si f' está acotada; entonces f es uniformemente continua.

5. Demostrar las siguientes desigualdades:

- a) Si $x \neq 1$, $x > 0$: $\operatorname{log} x < x - 1$.
- b) Si $x \in (0, 1)$: $x < \operatorname{log}(1 + (e - 1)x) < 1$.
- c) Si $x \neq 0$: $e^x > 1 + x$.
- d) Si $x \in (0, 1)$: $\operatorname{log}(1 + x^2) < 2 \operatorname{arc} \operatorname{tg} x < 2 \operatorname{arc} \operatorname{sen} x$.
- e) Si $x \in (0, \pi)$: $\operatorname{log}(1 + \cos x) < \operatorname{log}(2) - \frac{x^2}{4}$.

6. Demostrar que la ecuación $\operatorname{arc} \operatorname{tg} x = \operatorname{log}(\sqrt{x})$ tiene una única raíz real.

7. Determinar los extremos absolutos de las siguientes funciones:

$$\begin{array}{ll}
 \text{a) } f(x) = \operatorname{sen}|x|, & x \in [-\pi, \pi]. \\
 \text{b) } f(x) = \frac{x}{1+x^2}, & x \in [-1, 3]. \\
 \text{c) } f(x) = \begin{cases} x^2 + 2x, & \text{si } -2 \leq x \leq 0; \\ \operatorname{sen} x, & \text{si } 0 < x \leq \pi. \end{cases}
 \end{array}$$

8. Estudiando los extremos absolutos de la función $f(x) = \frac{\operatorname{log} x}{x}$,

- (a) demostrar que $x^e \leq e^x$ para todo $x > 0$,
- (b) determinar el menor b para el que se tenga $x \leq e^{bx}$ para todo $x \geq 1$.

9. Calcular, si existen, los siguientes límites ($\alpha \in \mathbb{R}$):

$$\begin{array}{lll}
 \text{a) } \lim_{x \rightarrow 0^+} x^\alpha \operatorname{log} x & \text{b) } \lim_{x \rightarrow 0^+} x^x & \text{c) } \lim_{x \rightarrow +\infty} x^\alpha \operatorname{log} x \\
 \text{d) } \lim_{x \rightarrow \infty} x^\alpha e^{-x} & \text{e) } \lim_{x \rightarrow \infty} e^x - \operatorname{log} x & \text{f) } \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\operatorname{log}(\operatorname{sen} x)}{\operatorname{log}(1 - \cos x)}
 \end{array}$$

10. Calcular, si existen, los siguientes límites ($a, b > 0$):

$$(a) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{a^x - b^x}{x}$$

$$\rightarrow (b) \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\sin 2x}{x} \right)^{\frac{1}{x}}$$

$$\rightarrow (c) \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\sin x}{x} \right)^{\frac{1}{x}}$$

$$(d) \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\sin x}{x} \right)^{\frac{1}{x^2}}$$

$$(e) \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\operatorname{arc tg} x}{x} \right)^{\frac{1}{x^2}}$$

$$\rightarrow (f) \lim_{x \rightarrow +\infty} (\log x)^{\frac{1}{1-\log x}}$$

11. Sea $f(x) = (x^2 - 3)e^{-x}$.

(a) Estudiar los intervalos de crecimiento de f , así como los extremos relativos y absolutos.

(b) Estudiar los intervalos de convexidad de f .

(c) Determinar los valores de a para los que la ecuación $f(x) = a$ tiene exactamente dos soluciones.

12. Calcula las derivadas n -ésimas de las siguientes funciones ($a \in \mathbb{R}$):

$$(a) e^{ax}$$

$$(b) (x+a)^{-1}$$

$$(c) \log(1+x)$$

$$(d) (1+x)^a$$

$$(e) \cos ax$$

$$(f) \sin ax$$

$$(g) \log(x^2 - 3x + 2)$$

$$(h) \sin^2 ax$$

13. Obtener la fórmula de Taylor hasta el orden k de las siguientes funciones, en los puntos x_0 indicados, con el término complementario de Langrange ($a \in \mathbb{R}$).

$$(a) f(x) = e^x$$

$$k = n, x_0 = 0$$

$$(b) f(x) = a^x$$

$$k = n, x_0 = 0$$

$$(c) f(x) = \log(1+x)$$

$$k = n, x_0 = 0$$

$$(d) f(x) = \sin x$$

$$k = 2n+1, x_0 = 0, \frac{\pi}{2}$$

$$(e) f(x) = \cos x$$

$$k = 2n, x_0 = 0, \frac{\pi}{2}$$

$$(f) f(x) = (1+x)^a$$

$$k = n, x_0 = 0$$

$$(g) f(x) = \operatorname{tg} x$$

$$k = 3, x_0 = 0$$

$$(h) f(x) = \log(\cos x)$$

$$k = 4, x_0 = 0$$

$$(i) f(x) = x^5 + x^4$$

$$k = 8, x_0 = 0$$

14. Representa gráficamente las siguientes funciones estudiando su dominio de definición, crecimiento, máximos y mínimos relativos, límites, asíntotas,... ($\alpha \in \mathbb{R}$):

$$e^x$$

$$\cos x$$

$$\operatorname{tg} x$$

$$x^\alpha$$

$$\log x$$

$$\frac{\sin x}{x}$$

$$\operatorname{arc sen} x$$

$$\operatorname{arc tg} x$$

$$\operatorname{sh} x$$

$$\operatorname{ch} x$$

$$\operatorname{th} x$$

$$\frac{x}{x \operatorname{arc tg} x}$$

$$x + \log(x^2 - 1)$$

$$\frac{x}{1+x^2}$$

$$\frac{x^3}{(1+x)^2}$$

$$x^2 e^{-x}$$

$$\frac{e^{-x}}{1+x^2}$$

$$\frac{e^{-x}}{1-x^2}$$

$$\log(1+x^2) - 2x$$

$$\frac{\log|x|}{x}$$

$$x^x$$

$$(1 + \frac{1}{x})^x$$

$$x \operatorname{arc tg}(1/x)$$

$$x^{1/x}$$

15. El valor de un diamante es proporcional al cuadrado de su peso. Demuestra que si un diamante se rompe en dos trozos, se produce una depreciación, y determina en qué caso es máxima.

16. Determinar la longitud ℓ de la varilla más larga que puede pasar horizontalmente una esquina de un pasillo de 2 metros de ancho, hacia otro de 4 metros de ancho.

1

$$\bullet) f(x) = \left(\frac{x+x^2}{1+x^2} \right)^{\frac{1}{3}}$$

$$\begin{aligned}f'(x) &= \frac{1}{3} \left(\frac{x+x^2}{1+x^2} \right)^{\frac{1}{3}-1} \cdot \frac{(1+2x)(1+x^2) - (x+x^2) \cdot 2x}{(1+x^2)^2} \\&= \frac{1}{3} \left(\frac{x+x^2}{1+x^2} \right)^{\frac{2}{3}} \cdot \frac{1+x^2 + 2x + 2x^3 - 2x^2 - 2x^3}{(1+x^2)^2} \\&= \frac{1}{3} \left(\frac{x+x^2}{1+x^2} \right)^{\frac{2}{3}} \cdot \frac{1+2x-x^2}{(1+x^2)^2} = \frac{1}{3} \left(\frac{1+x^2}{x+x^2} \right)^{\frac{2}{3}} \cdot \frac{1+2x-x^2}{(1+x^2)^2} \\&= \frac{1}{3} \frac{1+2x-x^2}{(x+x^2)^{\frac{2}{3}}} \cdot (1+x^2)^{\frac{2}{3}-2} = \frac{1}{3} \cdot \frac{1+2x-x^2}{(x+x^2)^{\frac{2}{3}} \cdot (1+x^2)^{\frac{4}{3}}}\end{aligned}$$

$$\bullet) f(x) = \operatorname{sen}(1 + \sqrt{\operatorname{sen} x})$$

$$f'(x) = \cos(1 + \sqrt{\operatorname{sen} x}) \cdot \frac{1}{2\sqrt{\operatorname{sen} x}} \cdot \cos x$$

$$\bullet) f(x) = \arctg(x + \sqrt{1+x^2})$$

$$f'(x) = \frac{1}{1+(x+\sqrt{1+x^2})^2} \cdot \left(1 + \frac{1}{2\sqrt{1+x^2}} \cdot 2x \right) =$$

$$= \frac{1}{1+(x+\sqrt{1+x^2})^2} \cdot \left(1 + \frac{x}{\sqrt{1+x^2}} \right).$$

[2] (d) $f(x) = \begin{cases} \frac{\arctg x}{x} & \text{si } x > 0 \\ 1 & \text{si } x = 0 \\ 1 - e^{\frac{1}{x}} & \text{si } x < 0 \end{cases}$

Continuidad: Observamos que f es continua en $\mathbb{R} \setminus \{0\}$. Estudiamos la continuidad en $x=0$.

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\arctg x}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\frac{1}{1+x^2}}{1} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{1+x^2} = 1$$

$\boxed{\left(\frac{0}{0}\right) \text{ L'Hôpital}}$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} 1 - e^{\frac{1}{x}} = 1, \text{ ya que } \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{1}{x} = -\infty \text{ y}$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0.$$

Como $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = 1 = \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x)$, existe $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$ y vale $1 = f(0)$.

Luego, f es continua en $x=0$.

Por tanto, f es continua en \mathbb{R} .

Derivabilidad: Como para $x > 0$ $f(x) = \frac{\arctg x}{x}$ la cual es derivable en $(0, \infty)$, y como para $x < 0$ $f(x) = 1 - e^{\frac{1}{x}}$ la cual es derivable en $(-\infty, 0)$; deducimos que f es derivable (al menos) en $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ siendo

$$f'(x) = \begin{cases} \frac{1}{(1+x^2)x} - \frac{\arctg x}{x^2} & \text{si } x > 0 \\ \frac{e^{\frac{1}{x}}}{x^2} & \text{si } x < 0. \end{cases}$$

ya que $\frac{d}{dx} \left(\frac{\arctg x}{x} \right) = \frac{\frac{1}{1+x^2} \cdot x - \arctg x}{x^2} = \frac{1}{(1+x^2)x} - \frac{\arctg x}{x^2}$

y $\frac{d}{dx} (1 - e^{\frac{1}{x}}) = 0 - e^{\frac{1}{x}} \cdot \left(-\frac{1}{x^2}\right) = \frac{e^{\frac{1}{x}}}{x^2}.$

Estudiamos la derivabilidad de f en $x=0$.

$$\begin{aligned}
 f'_+(0) &= \lim_{x \rightarrow 0^+} f'(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \left[\frac{1}{(1+x^2)x} - \frac{\operatorname{arctg} x}{x^2} \right] = \\
 &= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x - \operatorname{arctg} x \cdot (1+x^2)}{(1+x^2)x^2} = \boxed{\left(\frac{0}{0} \right) \text{ L'Hôpital}} \\
 &= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1 - \frac{1}{1+x^2} \cdot (1+x^2) - \operatorname{arctg} x \cdot 2x}{2x \cdot x^2 + (1+x^2) \cdot 2x} \\
 &= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{-\operatorname{arctg} x}{2x^2 + 1} = \boxed{\left(\frac{0}{0} \right) \text{ L'Hôpital}} \\
 &= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{-1}{4x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{-1}{4x(1+x^2)} = -\infty
 \end{aligned}$$

Luego f no es derivable en $x=0$. Veamos si es derivable en dicho punto por la izquierda.

$$\begin{aligned}
 f'_-(0) &= \lim_{x \rightarrow 0^-} f'(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{e^{1/x}}{x^2} = \boxed{\text{Cambio de variable: } t = \frac{1}{x}} \\
 &= \lim_{t \rightarrow -\infty} t^2 \cdot e^t = \lim_{t \rightarrow -\infty} \frac{t^2}{e^{-t}} = \boxed{\left(\frac{\infty}{\infty} \right) \text{ L'Hôpital}} \\
 &= \lim_{t \rightarrow -\infty} \frac{2t}{-e^{-t}} = \boxed{\left(\frac{\infty}{\infty} \right) \text{ L'Hôpital}} \\
 &= \lim_{t \rightarrow -\infty} \frac{2}{e^{-t}} = 0.
 \end{aligned}$$

Luego, f es derivable por la izquierda en $x=0$.

5) Tenemos que demostrar $x < \log(1 + (e-1)x) < 1 \quad \forall x \in [0,1]$.

①

$$\text{Observamos que } x < \log(1 + (e-1)x) \Leftrightarrow e^x < 1 + (e-1)x \\ \Leftrightarrow 0 < 1 + (e-1) - e^x$$

Definimos la función $f: [0,1] \rightarrow \mathbb{R}$ como

$$f(x) = 1 + (e-1)x - e^x.$$

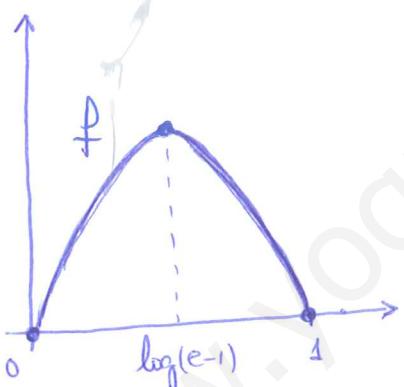
f es derivable en $[0,1]$ y

$$f'(x) = e-1 - e^x = 0 \Leftrightarrow x = \log(e-1) \in (0,1)$$

Como $f''(\log(e-1)) = -e+1 < 0$ (ya que $f''(x) = -e^x$)

deducimos que $\log(e-1)$ es un máximo absoluto de f ,

debido a que $f(0) = 0$ y $f(1) = 0$.



Luego, f es estrictamente creciente en $[0, \log(e-1)]$

y f es estrictamente decreciente en $[\log(e-1), 1]$

Por tanto, $f(x) > 0$ para todo $x \in (0,1)$.

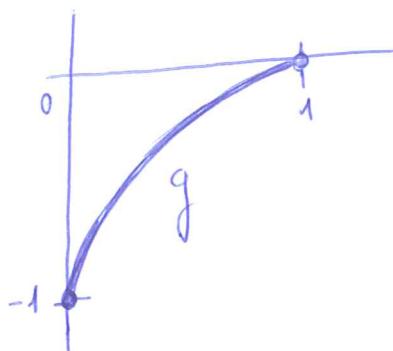
② Definimos la función $g: [0,1] \rightarrow \mathbb{R}$ como $g(x) = \log(1 + (e-1)x) - 1$.

Observamos que g es derivable en $[0,1]$ y que

$$g'(x) = \frac{e-1}{1 + (e-1)x} > 0 \quad \forall x \in [0,1]. \text{ Luego, } g \text{ es estrictamente}$$

creciente en $[0,1]$. Como $g(1) = 0$ deducimos que

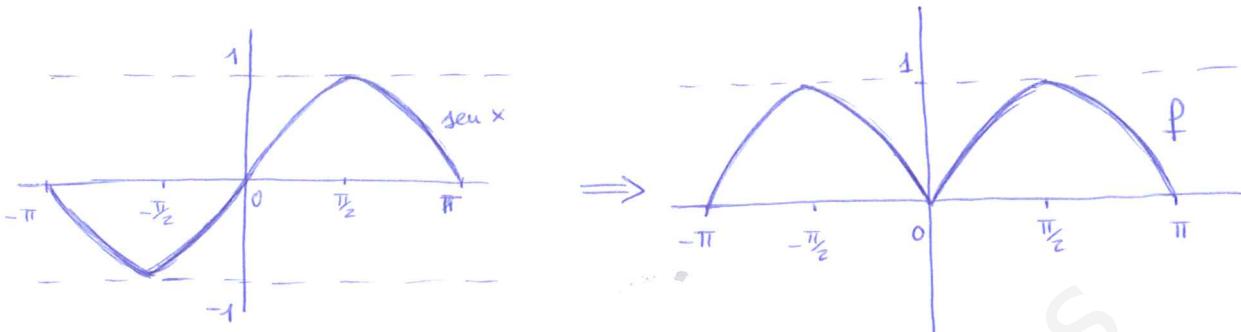
$g(x) < 0$ para todo $x \in (0,1)$.



[4]

a) $f(x) = \operatorname{sen}|x|, x \in [-\pi, \pi]$

Dibujemos f para hacernos una idea:



Observemos que f es continua en $[-\pi, \pi]$
y derivable (al menos) en $[-\pi, \pi] \setminus \{0\}$, ya que

$$f(x) = \begin{cases} \operatorname{sen} x & \text{si } x \geq 0 \\ \operatorname{sen}(-x) & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow f'(x) = \begin{cases} \cos x & \text{si } x > 0 \\ -\cos(-x) & \text{si } x < 0 \\ \text{--} \cos(x) & \text{en } x = 0 \end{cases}$$

Estudiemos si es derivable en $x=0$.

$$f'_+(0) = \lim_{x \rightarrow 0^+} f'(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \cos x = \cos 0 = 1$$

$$f'_-(0) = \lim_{x \rightarrow 0^-} f'(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} -\cos x = -\cos 0 = -1$$

Como $f'_+(0) = 1 \neq -1 = f'_-(0)$, entonces f no es derivable en $x=0$.

Por tanto, f es continua en $[-\pi, \pi]$ y derivable en $[-\pi, \pi] \setminus \{0\}$.

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow \cos x = 0 \Leftrightarrow x \in \left\{-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right\}.$$

Comenzamos

	$-\pi$	$-\frac{\pi}{2}$	0	$\frac{\pi}{2}$	π
f'	+	-	+	-	
f	↗	↘	↗	↘	

$$\begin{aligned} f(-\pi) &= 0 \\ f(-\frac{\pi}{2}) &= 1 \\ f(0) &= 0 \\ f(\frac{\pi}{2}) &= 1 \\ f(\pi) &= 0 \end{aligned}$$

entonces f tiene un máximo absoluto en $x = -\frac{\pi}{2}$ y en $x = \frac{\pi}{2}$

y f tiene un mínimo absoluto en $x = -\pi, x = 0$ y $x = \pi$.

□

$$c) f(x) = \begin{cases} x^2 + 2x & \text{si } -2 \leq x \leq 0, \\ \operatorname{sen} x & \text{si } 0 < x \leq \pi \end{cases}$$

Observamos que f es continua en $[-2, \pi]$, ya que

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \operatorname{sen} x = \operatorname{sen} 0 = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} x^2 + 2x = 0^2 + 2 \cdot 0 = 0 = f(0)$$

Además, f es derivable (al menos) en $[-2, 0) \cup (0, \pi]$, con

$$f'(x) = \begin{cases} 2x + 2 & \text{si } -2 \leq x < 0 \\ \cos x & \text{si } 0 < x \leq \pi \end{cases}$$

Estudiemos si f es derivable en $x=0$.

$$\left. \begin{array}{l} f'_+(0) = \lim_{x \rightarrow 0^+} f'(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \cos x = \cos 0 = 1 \\ f'_-(0) = \lim_{x \rightarrow 0^-} f'(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} 2x + 2 = 2 \cdot 0 + 2 = 2 \end{array} \right\} \Rightarrow f \text{ no es derivable en } x=0$$

Veamos cuándo $f'(x)=0$:

a) Si $x \in [-2, 0)$

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow 2x + 2 = 0 \Leftrightarrow x = -1.$$

b) Si $x \in (0, \pi]$

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow \cos x = 0 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2}.$$

Luego, $f'(x)=0$ si, y sólo si $x = -\frac{1}{2}$ ó $x = \frac{\pi}{2}$.

Como

	-2	-1	0	$\frac{\pi}{2}$	π
f'	-	+	+	-	
f	↓	↗	↗	↘	

$$\begin{aligned} f(-2) &= 0 \\ f(-1) &= -1 \\ f(0) &= 0 \\ f\left(\frac{\pi}{2}\right) &= 1 \\ f(\pi) &= 0 \end{aligned}$$

entonces f tiene un máximo absoluto en $x = \frac{\pi}{2}$

y f tiene un mínimo absoluto en $x = -1$.

[9]

$$(a) \lim_{x \rightarrow 0^+} x^\alpha \cdot \log x \quad \text{con } \alpha \in \mathbb{R}$$

Caseo 1. Si $\alpha = 0$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} x^\alpha \log x = \lim_{x \rightarrow 0^+} \log x = -\infty$$

Caseo 2. Sup. que $\alpha \neq 0$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0^+} x^\alpha \cdot \log x &= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\log x}{x^{-\alpha}} = \boxed{\left(\frac{-\infty}{\infty} \right) \text{ L'Hôpital}} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\frac{1}{x}}{-\alpha x^{-\alpha-1}} = \\ &= -\frac{1}{\alpha} \lim_{x \rightarrow 0^+} x^{\alpha+1} \cdot \frac{1}{x} = \\ &= -\frac{1}{\alpha} \lim_{x \rightarrow 0^+} x^\alpha = \begin{cases} 0 & \text{si } \alpha > 0, \\ +\infty & \text{si } \alpha < 0. \end{cases} \end{aligned}$$

Por tanto,

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} x^\alpha \cdot \log x = \begin{cases} 0 & \text{si } \alpha > 0, \\ -\infty & \text{si } \alpha = 0, \\ +\infty & \text{si } \alpha < 0. \end{cases}$$

$$(f) \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\log(\operatorname{sen} x)}{\log(1-\cos x)} = \boxed{\left(\frac{-\infty}{-\infty} \right) \text{ L'Hôpital}}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\frac{\cos x}{\operatorname{sen} x}}{\frac{\operatorname{sen} x}{1-\cos x}} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{(1-\cos x) \cos x}{\operatorname{sen}^2 x} =$$

Identidad Fundamental
de la Trigonometría Plana
 $\operatorname{sen}^2 x + \cos^2 x = 1$

$$= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{(1-\cos x) \cdot \cos x}{1-\cos^2 x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{(1-\cos x) \cdot \cos x}{(1-\cos x)(1+\cos x)} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\cos x}{1+\cos x} = \frac{\cos 0}{1+\cos 0} = \boxed{\frac{1}{2}}.$$

10

(b) $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\sin 2x}{x} \right)^{\frac{1}{x}}$ no existe, ya que

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \left(\frac{\sin 2x}{x} \right)^{\frac{1}{x}} = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \left(\frac{\sin 2x}{x} \right)^{\frac{1}{x}} = 0$$

debido a que

$$\lim_{x \rightarrow 0^\pm} \frac{\sin 2x}{x} = 2, \quad \lim_{x \rightarrow 0^\pm} \frac{\sin 2x}{2x} = 2 \cdot 1 = 2$$

y $\lim_{x \rightarrow 0^\pm} \frac{1}{x} = \pm\infty$.

(c) $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\sin x}{x} \right)^{\frac{1}{x}}$. Tomanos límite llegaremos a la indeterminación 1^∞ .

$$\begin{aligned} \left(\frac{\sin x}{x} \right)^{\frac{1}{x}} &= \left(1 + \left(\frac{\sin x}{x} - 1 \right) \right)^{\frac{1}{x}} = \left[1 + \left(\frac{\sin x}{x} - 1 \right) \right]^{\frac{1}{x} \cdot \frac{\frac{\sin x}{x} - 1}{\frac{\sin x}{x} - 1}} = \\ &= \left[\left[1 + \left(\frac{\sin x}{x} - 1 \right) \right]^{\frac{1}{\frac{\sin x}{x} - 1}} \right]^{\frac{\sin x}{x} - 1} \xrightarrow[x \rightarrow 0]{} e^0 = 1. \end{aligned}$$

ya que

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1 \Rightarrow \boxed{\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} - 1 = 0} \Rightarrow \boxed{\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{\frac{\sin x}{x} - 1} = \infty}$$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{t} \right)^t = e.$$

y

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{\sin x}{x} - 1}{x} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x - x}{x^2} = \boxed{\left(\frac{0}{0} \right) L'Hôpital} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x - 1}{2x} = \boxed{\left(\frac{0}{0} \right) L'Hôpital} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-\sin x}{2} = 0 \end{aligned}$$

[10]

$$(f) \lim_{x \rightarrow +\infty} (\log x)^{\frac{1}{1-\log x}} = \lim_{z \rightarrow +\infty} z^{\frac{1}{1-z}} =$$
$$= e^{\lim_{z \rightarrow +\infty} \frac{1}{1-z} \cdot \log z} = e^0 = 1, \text{ ya que}$$

$$\lim_{z \rightarrow +\infty} \frac{1}{1-z} \cdot \log z \leftarrow \boxed{(\frac{\infty}{\infty}) \text{ L'Hôpital}}$$

$$= \lim_{z \rightarrow +\infty} \frac{\frac{1}{z}}{-1} = 0.$$