MATRICES

1.

b) **(1.5 puntos)** Dada la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

determine, si existe, la matriz X que verifique $A \cdot X = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$

Solución: $X = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$

2.

EJERCICIO 1

(3 puntos) Sean las matrices

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 3 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},\quad B = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix},\quad C = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix},\quad D = \begin{pmatrix} z \\ z \\ z \end{pmatrix}.$$

Calcule x, y, z, sabiendo que $A \cdot B = 2C - D$.

www.yoquieroaprobar.es

Solución: $x = 2/3 \quad y = 2/3 \quad z = -2/3$

3.

Sean las matrices :

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & -2 \end{pmatrix},\quad B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ -1 & 1 & -1 \end{pmatrix},\quad C = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 5 \\ 3 & 4 & -1 \end{pmatrix}.$$

a) **(1 punto)** Realice, cuando sea posible, los siguientes productos de matrices:

$$A \cdot B,\quad B \cdot C,\quad C \cdot A.$$

b) **(2 puntos)** Resuelva la ecuación matricial: $A \cdot X + B = C$.

4. Sea la siguiente matriz:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Hallar A^n

Solución: $A^n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2n & 0 & 1 \end{pmatrix}$

5. Se ha realizado una comparación del precio de tres productos (verdura, carne y fruta) en tres supermercados distintos. En las dos tablas siguientes se muestran, respectivamente, los precios por kilogramo de los productos en los supermercados y el número de kilogramos que tres personas compran de cada producto:

	S1	S2	S3
Verdura	0.80	0.90	1.00
Carne	4.00	5.00	4.00
Fruta	1.50	1.40	1.35

	Verdura	Carne	Fruta
P1	2	3	1
P2	1	5	4
P3	0	1	3

a) Exprese, mediante la operación matricial apropiada, el coste que cada persona debe pagar según el supermercado donde adquiera los productos.
b) Una persona ha comprado la misma cantidad de los tres productos en los tres supermercados. En el segundo ha pagado 36.50 €. ¿Qué cantidad de cada producto ha adquirido?

6. Sea la siguiente matriz:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & x \\ 0 & x+2 \end{pmatrix}$$

a) (1.5 puntos) Halle los valores de x tales que $A^2 = 2A$
b) (1.5 puntos) Para x = -1 halle A^{-1}. Compruebe el resultado calculando $A \cdot A^{-1}$.

Solución: a) x= 0 x= 2; b) $A^{-1} = \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

7. (2 puntos) Sea la siguiente matriz:

$A = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$. Resuelva la ecuación matricial $AXA = I_2$, siendo X una matriz $2x2$.

Solución: $X = \begin{pmatrix} 1/9 & 0 \\ -4/9 & 1 \end{pmatrix}$

7. Resuelve la siguiente ecuación matricial

$$\begin{pmatrix} -1 & -2 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix} X + \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Solución: No tiene

8.

Sean las matrices $A=\begin{pmatrix}2 & 1\\ 3 & 1\end{pmatrix}$ y $B=\begin{pmatrix}1 & 2\\ -1 & 0\end{pmatrix}$.

a) **(1 punto)** Calcule $A^t \cdot B - A \cdot B^t$.

b) **(1.5 puntos)** Resuelva la ecuación matricial $AX + BA = B$.

9.

Sean las matrices:

$$P=\begin{pmatrix}1 & 2\\ a & 0\end{pmatrix}, \quad Q=\begin{pmatrix}1 & 1 & 5\\ 8 & 4 & b\end{pmatrix} \text{ y } R=\begin{pmatrix}c & d & 6\\ 10 & 10 & 50\end{pmatrix}.$$

a) **(1 punto)** Calcule, si es posible, $P \cdot Q$ y $Q \cdot P$, razonando la respuesta.

b) **(1.5 puntos)** ¿Cuánto deben valer las constantes a, b, c y d para que $P \cdot 2Q = R$?

10.

a) **(1 punto)** Sean A, B y C matrices con 2, 3 y 2 filas respectivamente. Sabiendo que el producto de matrices $A \cdot B \cdot C$ es posible y que el resultado es una matriz con 4 columnas, halle las dimensiones de dichas matrices.

b) **(1.5 puntos)** Halle la matriz X que verifica $I_2 - 2X = A \cdot (A - B^t)$, siendo $A=\begin{pmatrix}1 & -1\\ 2 & -1\end{pmatrix}$ y $B=\begin{pmatrix}0 & 2\\ -1 & 2\end{pmatrix}$.

11.

Sean las matrices $A=\begin{pmatrix}a & 1\\ 0 & 2\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}1 & b\\ 0 & 3\end{pmatrix}$ y $C=\begin{pmatrix}1 & 3\\ 2 & 5\end{pmatrix}$.

a) **(1 punto)** Halle los valores de a y b para que se verifique $A - B + A \cdot B^t = C$.

b) **(0.75 puntos)** ¿Existe algún valor de b para el que el producto $B \cdot B^t$ sea igual a la matriz nula?

c) **(0.75 puntos)** Para $a = 0.5$ y $b = 1$, halle la matriz X que verifica la igualdad $A \cdot X + B = O$, (O representa la matriz nula).

12.

Sean las matrices $A=\begin{pmatrix}1 & -1\\ 0 & 2\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}3 & 1\\ -1 & 1\end{pmatrix}$.

a) **(1 punto)** Calcule A^2 y $2B + I_2$.

b) **(2 puntos)** Resuelva la ecuación matricial $A \cdot X - I_2 = 2B^2$.

13.

Sea la igualdad $A \cdot X + B = A$, donde A, X y B son matrices cuadradas de la misma dimensión.

a) **(1 punto)** Despeje la matriz X en la igualdad anterior, sabiendo que A tiene inversa.

b) **(2 puntos)** Obtenga la matriz X en la igualdad anterior, siendo $A=\begin{pmatrix}2 & 5\\ 1 & 3\end{pmatrix}$ y $B=\begin{pmatrix}0 & -3\\ -1 & 2\end{pmatrix}$.

14.

(3 puntos) Sean las matrices:

$$A=\begin{pmatrix}-1 & 4 & -1\\ 0 & -1 & 0\\ 3 & 1 & 2\end{pmatrix}, \quad B=\begin{pmatrix}-2 & 1 & 3\\ 0 & 2 & -1\\ 1 & 0 & 1\end{pmatrix} \text{ y } C=\begin{pmatrix}5 & -2 & -6\\ 0 & -3 & 2\\ -2 & 0 & -1\end{pmatrix}.$$

SISTEMAS DE ECUACIONES.

1. (3 puntos). Criterio de calificación: Hasta 1 punto por el planteamiento. Hasta 2 puntos por la resolución.

Un cliente de un supermercado ha pagado un total de 156 euros por 24 litros de leche, 6 kg de jamón serrano y 12 litros de aceite de oliva. Plantee y resuelva un sistema de ecuaciones para calcular el precio unitario de cada artículo, sabiendo que 1 litro de aceite cuesta el triple que un litro de leche y que 1 kg de jamón cuesta igual que 4 litros de aceite más 4 litros de leche.

2. a) **(1.5 puntos)** Un autobús transporta 90 viajeros con 3 tarifas diferentes:
1ª: Viajeros que pagan el billete entero, que vale 0.70 euros.
2ª: Estudiantes, con descuento del 50 %.
3ª: Jubilados, con descuento del 80 %.
Se sabe que el número de estudiantes es 10 veces el de jubilados y que la recaudación total ha sido de 46.76 euros. Plantee, sin resolver, el sistema de ecuaciones necesario para determinar el número de viajeros, de cada tarifa, que va en el autobús.

3. (Modelo 2003).

a) **(1.5 puntos)** Plantee, sin resolver, un sistema de ecuaciones que dé solución al siguiente problema:
Un inversor compró acciones de las empresas A, B y C por un valor total de 20000 euros, invirtiendo en C el doble que en A. Al cabo de un año la empresa A le pagó el 6 % de beneficio, la B el 8 % y la C el 10 %. Si el beneficio total fue de 1720 euros, ¿qué dinero invirtió en cada empresa ?

www.yoquieroaprobar.es

4.

(3 puntos) El cajero de un banco sólo dispone de billetes de 10, 20 y 50 euros. Hemos sacado 290 euros del banco y el cajero nos ha entregado exactamente 8 billetes. El número de billetes de 10 euros que nos ha dado es el doble del de 20 euros.
Plantee y resuelva el sistema de ecuaciones lineales asociado a este problema para obtener el número de billetes de cada tipo que nos ha entregado el cajero.

5. (Modelo 2003). Criterio de calificación: a) 0.5 por clasificar. Hasta 1 por resolver.
b) 0.75 por obtener 2 *At* × *B* - 2*I* ; 0.75 por el cálculo de la inversa.

a) **(1.5 puntos)** Clasifique y resuelva el sistema $\begin{cases} 2x+3y-z=4 \\ x+2y+z=5 \end{cases}$.

b) **(1.5 puntos)** Sean las matrices $A=\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$.

Calcule $\left(A^t \cdot B - 2I_2\right)^{-1}$; ($I_2$ es la matriz unidad de orden 2 y A^t la traspuesta de A).

6. (Modelo 2003). Criterio de calificación:
a) Hasta 0.5 por la clasificación. Hasta 1 por la resolución.
b) Hasta 1.5 puntos.

a) **(1.5 puntos)** Clasifique y resuelva el sistema formado por las ecuaciones siguientes:

$$x - 2y + z = 0, \quad 2x + y - z = 5, \quad 4x + 7y - 5z = 15.$$

b) **(1.5 puntos)** Determine la matriz X, de orden 2, que verifica la igualdad

$$X \cdot \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} - 2\begin{pmatrix} 1 & 5 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 7 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

7. (Modelo 2005) Criterio de calificación: a) 1.75 por la resolución; 0.5 por clasificarlo. b) Hasta 0.75 puntos.

a) **(2.25 puntos)** Resuelva el siguiente sistema y clasifíquelo atendiendo al número de soluciones:

$$\begin{array}{rcrcrcr} x & + & y & + & z & = & 0 \\ 2x & + & 3y & - & z & = & 17 \\ 4x & + & 5y & + & z & = & 17 \end{array}$$

b) **(0.75 puntos)** A la vista del resultado anterior, ¿podemos afirmar que hay una ecuación que es combinación lineal de las otras dos?

8.

Sea el sistema de ecuaciones:

$$\begin{array}{rcrcrcr} x & + & y & - & z & = & -2 \\ 2x & & & - & z & = & 0 \\ & - & 2y & + & z & = & 4 \end{array}$$

a) **(2 puntos)** Resuélvalo y clasifíquelo en cuanto a sus soluciones.
b) **(0.5 puntos)** ¿Tiene inversa la matriz de coeficientes del sistema? Justifíquelo.
c) **(0.5 puntos)** Obtenga, si existe, una solución del sistema que verifique $x = 2y$.

9. (2006) 3 puntos

a) **(2 puntos)** Sean las matrices $A = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ -5 & -4 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 1 & -1 \end{pmatrix}$.

Explique qué dimensión debe tener la matriz X para que tenga sentido la ecuación matricial $X \cdot A + 2B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix}$. Resuelva dicha ecuación.

b) **(1 punto)** Plantee, sin resolver, el sistema de ecuaciones que permita encontrar la solución del siguiente problema:

> "En un examen de Matemáticas que constaba de tres problemas, un alumno obtuvo una calificación total de 7.2. La puntuación del primer problema fue un 40 % más que la del segundo, y la del tercero fue el doble de la suma de las puntuaciones del primero y el segundo. ¿Cuál fue la puntuación de cada problema?"

10. (2004)

Sea el sistema de ecuaciones lineales $\begin{cases} x - y - z = -2 \\ 2x + 3y - z = 2 \\ 4x + y - 3z = -2 \end{cases}$.

a) **(2 puntos)** Clasifique y resuelva el sistema.
b) **(1 punto)** Escriba la matriz de coeficientes de este sistema y, si es posible, calcule su matriz inversa.