

Derivadas - PAU

1. Sea la función:

$$f(x) = \begin{cases} -4x - 3 & \text{si } x \leq -1, \\ 2x - 1 & \text{si } -1 < x < 1, \\ \frac{k+2}{x} & \text{si } x \geq 1. \end{cases}$$

Calcule el valor que debe tomar el parámetro k para que la función sea continua en $\mathbb{R}$ y estudie su derivabilidad para el valor de k obtenido.

2. Se considera la función:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{2x-3}{x+1} & \text{si } x \leq 0, \\ x^2 + 2x - 3 & \text{si } x > 0. \end{cases}$$

Estudie su derivabilidad en $x = 0$.

3. Sea la función definida mediante:

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - x + 1 & \text{si } x < 1, \\ \ln(x) & \text{si } x \geq 1. \end{cases}$$

Estudie la derivabilidad de f en $x = -1$ y en $x = 1$.

4. Sea f la función definida por:

$$f(x) = \begin{cases} ax^2 + 1 & \text{si } x < 1, \\ x^2 + bx + 3 & \text{si } x \geq 1. \end{cases}$$

Determine los valores que deben tener a y b para que f sea derivable.

5. Halle la función derivada de la función $f(x) = \ln\left(\frac{x}{x+1}\right)$ y simplifique el resultado.

6. Derive las funciones:

a) $f(x) = \frac{2x-2}{x+1}$

b) $g(x) = (2x-1)^2 \cdot \ln(x)$

7. Calcula la derivada de la función:

$$f(x) = \left(\frac{x+2}{x}\right)^2$$

8. Calcula la derivada de la función $f(x) = \ln(x^2 + 1)$.

9. Calcule la derivada de las siguientes funciones.

$$a) g(x) = \frac{3}{(2x-5)^2} + \ln(1-x)$$

$$b) h(x) = \frac{e^x}{x^3+1}$$

10. Para $g(x) = e^{1-x} + \ln(x+2)$, calcule $g'(1)$.

No 11. Calcule las derivadas de las siguientes funciones:

$$a) f(x) = \sqrt{4+2^x} + \ln\left(\frac{1}{1+x}\right)$$

$$b) g(x) = \sin^2(2x+1)^3$$

No 12. Calcule $g''(2)$ siendo $g(x) = \frac{1}{x} - x$.

13. Sea la función:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x-k}{x+1} & \text{si } x > 0, \\ x^2 + 2x + 1 & \text{si } x \leq 0. \end{cases}$$

Calcule el valor de k para que la función f sea continua en $x = 0$. Para ese valor de k , ¿es derivable en $x = 0$?

14. Derive las funciones:

$$a) f(x) = \frac{x^3}{3} - 8$$

$$b) g(x) = \sqrt{x^3}$$

$$c) h(x) = x^2 - e^x$$

No 15. Calcule las siguientes derivadas y simplifica en lo posible los resultados.

$$a) f(x) = \frac{3}{2} \ln \sqrt[3]{\frac{x-1}{x+1}}$$

$$b) g(x) = (5x-1)e^{3x} + \sin^2(5x)$$

$$c) h(x) = \sqrt{(1-x^2)^3}$$

16. Calcule y simplifique la derivada de $f(x) = \frac{x+1}{x^2+1}$.

17. Encuentra $f'(2)$ donde f' es la derivada de la función f dada por $f(x) = 4x - x^2 + \frac{2}{x^3}$ ($x \neq 0$).

18. Si f' es la derivada de la función dada por:

$$f(x) = x^2 + \frac{1}{x^2} - 53x + 150 \quad (x \neq 0),$$

calcule $f'(-0,5)$.

No 19. Encuentra $f'(2)$ donde f' es la derivada de la función f dada por $f(x) = \frac{4}{x^2} + 8x - x^2 - 12$ ($x \neq 0$).

20. Halle la ecuación de la recta tangente a la gráfica de $f(x) = e^{2-x}$ en el punto donde esta corta al eje de ordenadas.

21. Halle los valores de a, b, c y d en la función $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$ sabiendo que su tangente en el punto $(1, 1)$ es la recta $y = -x + 2$ y que tiene un extremo en el punto $(0, 2)$.

22. Dada la función $f(x) = x^3 + 3x^2 - 4$, calcule la pendiente de la tangente a la gráfica de la función f en el punto de abscisa $x = -1$.

23. Dada la función:

$$f(x) = \begin{cases} 16 - x^2 & \text{si } -2 \leq x < 2, \\ x^2 & \text{si } 2 \leq x \leq 3, \end{cases}$$

calcular la pendiente de la recta tangente a la gráfica de la función en $x = 1$.

24. Dada la función $f(x) = \frac{x}{x-2}$, ¿existe algún punto de la gráfica en el que la recta tangente tenga pendiente positiva? Justifica la respuesta.
25. Se considera la función $f(x) = \frac{x}{x-2}$. Obtén la expresión de la recta tangente a dicha función en $x = 3$.
26. Dada la función $f(x) = \frac{x}{1-x^2}$, hallar la ecuación de la recta tangente a la gráfica de $f(x)$ en $x = 0$.
27. Sea la función $f(x) = \frac{(x-1)(x-2)}{x^2}$. Calcula la ecuación de la recta tangente a la curva en $x = -3$.
28. Se considera la función $f(x) = \frac{2x}{x+5}$. Determinar los valores de a y b para que la ecuación de la recta tangente a la gráfica de $f(x)$ en el punto $x = -3$ sea $y = ax + b$.
29. Halle los valores de a y b para que la recta tangente a la gráfica de $f(x) = ax^2 - b$ en el punto $(1, 5)$ sea la recta $y = 3x + 2$.
30. Dada la función $f(x) = -x^2 + bx + c$, calcula los valores b y c si esa función pasa por el punto $(1, 4)$ y en ese punto la ecuación de la recta tangente es $y = 4$.
31. Halle los valores de a , b y c para que la curva $f(x) = ax^2 + bx + c$ pase por el punto $(1, 3)$ y sea la tangente en el origen de coordenadas a la bisectriz del primer cuadrante.
32. Considere la función $f(x) = \frac{3-2x}{x}$.
- a) Halle los puntos de la gráfica en los que la recta tangente es paralela a la recta $3x+4y+5=0$.
- b) Calcule las ecuaciones de dichas rectas tangentes.
33. Dibujar la parábola $f(x) = x^2 - 5x + 8$.
- a) ¿En qué punto de la gráfica la tangente es paralela al eje de abscisa?
- b) Hallar la ecuación de la recta tangente a $f(x)$ en el punto $(2, 0)$.
34. Considere la función $f(x) = \frac{x^2}{2x-1}$.
- a) Halle la ecuación de la recta tangente a la curva $y = f(x)$ en el punto de abscisa $x = 2$.
- Hecho b) Determine los intervalos de crecimiento y decrecimiento, así como los extremos, si existen.
35. Calcula los máximos y los mínimos absolutos de la función $f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x + 1$ en el intervalo $[1, 4]$. Justifica que los puntos encontrados son máximos o mínimos absolutos.
36. Dada la función $f(x) = \frac{x}{1-x^2}$, determinar los intervalos de crecimiento y decrecimiento.
- Hecho

37. Considere la función de variable real $f(x) = \frac{x^2 + 5x}{x - 4}$.

- a) Determinar los intervalos de crecimiento y decrecimiento.
- b) Halle los extremos relativos.

38. Dada la función real de variable real definida por $f(x) = \frac{(x - 3)^2}{x + 3}$, calcular sus máximos y mínimos y determinar los intervalos de crecimiento y decrecimiento.

39. Sea la función:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{3}{x} + \frac{x}{3} & \text{si } -6 < x < -1, \\ x - 1 & \text{si } -1 \leq x \leq 4. \end{cases}$$

Calcule los intervalos de crecimiento y decrecimiento de $f(x)$ para los valores $x \in (-6, -1)$.

40. Para cada valor de a se considera la función:

$$f(x) = \frac{3x^2 - ax}{x + 2}.$$

Calcular el valor de a para que $f(x)$ tenga un mínimo relativo en $x = 2$.

41. Hallar los valores de a y b para que la función $f(x) = ax^3 + bx^2 + x + 1$ tenga un máximo en el punto $x = 1$ y un mínimo en el punto $x = 2$.

42. Sea la función $f(x) = x - \frac{k}{x}$. Determine el valor de k de modo que la función tenga un máximo en $x = -1$. En la función así determinada, hallar:

- a) El dominio de definición.
- b) Los intervalos de crecimiento y de decrecimiento de la función, así como los máximos y los mínimos.

43. Dada la función $f(x) = x^2 + 3x^2 - 4$, calcula:

- a) La pendiente de la recta tangente a la gráfica de f , en el punto de abscisa $x = -1$.
- b) Los intervalos de crecimiento y los de decrecimiento.
- c) Los máximos y los mínimos relativos. ¿Cuánto vale la función f en esos puntos?

44. Se considera la función $f(x) = \frac{x^2}{a - bx}$, siendo a y b parámetros reales:

- a) Determine los valores de los parámetros a y b para los que $f(2) = -4$ y la recta tangente a la gráfica de $f(x)$ en $x = 6$ es horizontal.
- b) Para $a = 1$ y $b = -1$, razone cual es el dominio de $f(x)$ y determine los intervalos de concavidad y de convexidad y puntos de inflexión de $f(x)$.

45. Determinar a y b para que la función:

$$f(x) = x^2 + 2ax + b,$$

tenga un mínimo en el punto $(-1, 2)$.

46. Se considera la función real de variable real definida por $f(x) = x^3 - 9x$. Se pide calcular sus máximos y mínimos relativos, si existen.