

## Ejercicios: Límites y continuidad

1. En los apartados siguientes, usar la gráfica de las funciones para hallar el límite si existe:

(a)  $\lim_{x \rightarrow 3} (4-x)$     (b)  $\lim_{x \rightarrow 1} (x^2+2)$     (c)  $\lim_{x \rightarrow 2} f(x); f(x) = \begin{cases} 4-x, & x \neq 2 \\ 0, & x = 2 \end{cases}$

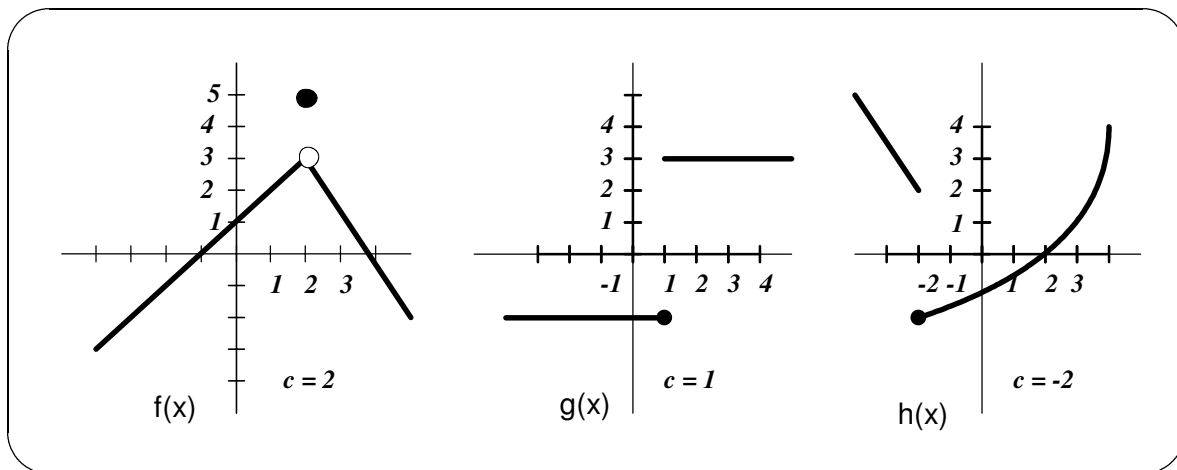
(d)  $\lim_{x \rightarrow 1} f(x); f(x) = \begin{cases} x^2+1, & x \neq 1 \\ 1, & x = 1 \end{cases}$     (e)  $\lim_{x \rightarrow 5} \frac{|x-5|}{x-5}$     (f)  $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{1}{x-3}$

2. Calcula los siguientes límites:

(a)  $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x-2}{x^2-x-2}$     (b)  $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x-2}{x^2-4}$     (c)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x+3}-\sqrt{3}}{x}$     (d)  $\lim_{x \rightarrow -3} \frac{\sqrt{1-x}-2}{x+3}$

(e)  $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{\frac{1}{x+1}-\frac{1}{4}}{x-3}$     (f)  $\lim_{x \rightarrow 4} \frac{\frac{x}{x+1}-\frac{4}{5}}{x-4}$

3. Determina gráficamente los límites  $\lim_{x \rightarrow c^+} f(x)$ ,  $\lim_{x \rightarrow c^-} f(x)$ ,  $\lim_{x \rightarrow c} f(x)$  de las siguientes funciones:



4. Hallar, si existen, los siguientes límites:

(a)  $\lim_{x \rightarrow 5^+} \frac{x-5}{x^2-25}$ ;    (b)  $\lim_{x \rightarrow 4^-} \frac{\sqrt{x}-2}{x-4}$ ;    (c)  $\lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{2-x}{x^2-4}$

(d)  $\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{x^2-2x+1}{x-1}$ ;    (e)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{|x|}{x}$ ;    (f)  $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{|x-2|}{x-2}$

(g)  $\lim_{x \rightarrow 3} f(x)$ , donde  $f(x) = \begin{cases} \frac{x+2}{2}, & x \leq 3 \\ \frac{12-2x}{3}, & x > 3 \end{cases}$

(h)  $\lim_{x \rightarrow 2} f(x)$ , donde  $f(x) = \begin{cases} x^2-4x+6, & x < 2 \\ -x^2+4x-2, & x \geq 2 \end{cases}$

(i)  $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$ , donde  $f(x) = \begin{cases} x^3+1, & x < 1 \\ x+1, & x \geq 1 \end{cases}$

(j)  $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$ , donde  $f(x) = \begin{cases} x, & x \leq 1 \\ 1-x, & x > 1 \end{cases}$

5. Determina los puntos de discontinuidad de las siguientes funciones:

(a)  $f(x) = \frac{-x^3}{2}$ ; (b)  $f(x) = \frac{x^2-1}{x}$ ; (c)  $f(x) = \frac{x^2-1}{x+1}$ ; (d)  $f(x) = \frac{1}{x^2-4}$

(e)  $f(x) = \frac{1}{x-1}$ ; (f)  $f(x) = \frac{x}{x^2+1}$ ; (g)  $f(x) = \frac{x+2}{x^2-3x-10}$

(h)  $f(x) = \begin{cases} -2x+3, & x < 1 \\ x^2, & x \geq 1 \end{cases}$  (i)  $f(x) = \begin{cases} -2x, & x \leq 2 \\ x^2-4x+1, & x > 2 \end{cases}$

6. Hallar  $a$  tal que la función  $f(x) = \begin{cases} x^3, & x \leq 2 \\ ax^2, & x > 2 \end{cases}$  sea continua.

7. Hallar  $a$  y  $b$  de modo que hagan continua la función  $f(x) = \begin{cases} 2, & x \leq -1 \\ ax+b, & -1 < x < 3 \\ -2, & x \geq 3 \end{cases}$

8. Calcular  $\lim_{x \rightarrow -3^+} f(x)$  y  $\lim_{x \rightarrow -3^-} f(x)$  de las siguientes funciones:

(a)  $f(x) = \frac{1}{x^2-9}$  (b)  $f(x) = \frac{x}{x^2-9}$  (c)  $f(x) = \frac{x^2}{x^2-9}$

9. Calcular  $\lim_{x \rightarrow -2^+} f(x)$  y  $\lim_{x \rightarrow -2^-} f(x)$  de las funciones:

(a)  $f(x) = \frac{1}{(x+2)^2}$  (b)  $f(x) = \frac{1}{x+2}$

10. Hallar las asíntotas verticales (si hay) de las funciones:

$f(x) = \frac{1}{x^2}$ ;  $f(x) = \frac{x^2-2}{x^2-x-2}$ ;  $f(x) = \frac{x^3}{x^2-1}$ ;  $f(x) = 1 - \frac{4}{x^2}$

$f(x) = \frac{4}{(x-2)^3}$ ;  $f(x) = \frac{2+x}{x-2}$ ;  $f(x) = \frac{-4x}{x^2+4}$ ;  $f(x) = \frac{-2}{(x-2)^2}$

11. Hallar los siguientes límites:

$\lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{x-3}{x-2}$ ;  $\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{2+x}{1-x}$ ;  $\lim_{x \rightarrow 4^+} \frac{x^2}{x^2-16}$ ;  $\lim_{x \rightarrow 4} \frac{x^2}{x^2+16}$ ;  
 $\lim_{x \rightarrow 0^-} (1 + \frac{1}{x})$ ;  $\lim_{x \rightarrow 0^-} (x^2 - \frac{1}{x})$ ;  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2-x}{(x^2+1)(x-1)}$ ;  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3-1}{x^2+x+1}$

12. Determina las asíntotas horizontales de las siguientes funciones:

(a)  $f(x) = \frac{3x^2}{x^2+2}$ ; (b)  $f(x) = \frac{2x}{\sqrt{x^2+2}}$ ; (c)  $f(x) = \frac{x}{x^2+2}$   
 (d)  $f(x) = 2 + \frac{x^2}{x^4+1}$ ; (e)  $f(x) = \frac{-6x}{\sqrt{4x^2+5}}$ ; (f)  $f(x) = 5 - \frac{1}{x^2+1}$

13. Halla los siguientes límites:

(a)  $\lim_{x \rightarrow \infty} (\frac{3x-2}{3x+4})^{4x-2}$  (b)  $\lim_{x \rightarrow -\infty} (\frac{x^2-2x}{3x^2+5})^{5x}$  (c)  $\lim_{x \rightarrow \infty} (4x - \sqrt{3x^2 + 5x})$   
 (d)  $\lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{4x^2 + 5} + 2x)$  (e)  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{5x-3}{\sqrt{3x^2+2}}$  (f)  $\lim_{x \rightarrow \infty} (\frac{5x^2-2x}{5x^2+2x})^{3x^2}$   
 (g)  $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{2x - \sqrt{5x^2-9}}{x^2-9}$  (h)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{4x+16}-4}{3x^2-2x}$  (i)  $\lim_{x \rightarrow 1} (\frac{3x-2}{4x+2})^{\frac{-5}{(x-1)^2}}$

**14.** Dada la función  $f(x) = \begin{cases} x-3, & x \neq 1 \\ 3, & x = 1 \end{cases}$ . Se pide:

(a) Representala gráficamente. (b) Halla  $f(1)$  y  $f(3)$ . (c) Calcula  $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$  y  $\lim_{x \rightarrow 3} f(x)$ .

**15.** Comprueba que  $\lim_{x \rightarrow 2} (4x - 5) = 3$ .

**16.** Demuestra que  $\lim_{x \rightarrow 6} \frac{x}{x-4} = 3$ . Haz una gráfica de la función para ayudarte.

**17.** Comprueba que  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x+2}{x} = 1$ . Haz una gráfica de la función para ayudarte.

**18.** Dadas las funciones  $f(x) = \frac{x^2-4}{x-2}$  y  $g(x) = x+2$ . ¿Cómo serán sus gráficas? ¿Cuánto valen, en cada uno de los casos, la imagen de 2 y su límite cuando  $x$  tiende a 2?

**19.** Determina el valor de  $k$  para que la función  $f(x) = \begin{cases} 2x-2, & x < 2 \\ x^2+2kx-2k, & x \geq 2 \end{cases}$ , tenga límite cuando  $x$  tienda a 2.

**20.** Calcula el valor de  $\lim_{x \rightarrow 2} f(x)$  cuando  $f(x)$  es: (a)  $f(x) = \frac{x}{x-2}$ , (b)  $f(x) = \frac{-x}{x-2}$ ,

(c)  $f(x) = \frac{1}{(x-2)^2}$ , (d)  $f(x) = \frac{-1}{(x-2)^2}$

Analiza el comportamiento gráfico de  $f(x)$  en  $x = 2$  en cada uno de los casos.

**21.** Calcula los siguientes límites:

(a)  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2+x-3x^2}{x^2-1}$

(b)  $\lim_{x \rightarrow -1} \left[ \frac{-x}{(x+1)^2} \right]^{\frac{2}{x-1}}$

(c)  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^2+1}{x^3+3x-1}$

(d)  $\lim_{x \rightarrow 1} \left[ \frac{x^2-2x+1}{x+2} \right]^{\frac{-1}{(x-1)^2}}$

(e)  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^4-3x+2}{x^2+4x-1}$

(f)  $\lim_{x \rightarrow \infty} (x^2 - 3x)^{1-2x}$

(g)  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^3+3x^2-x+1}{x^2+x+1}$

(h)  $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{3x}{x+1}$

(i)  $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2+x^2-3x^4}{x^2+4x-1}$

(j)  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{x+1}}{3x-4}$

(k)  $\lim_{x \rightarrow \infty} \left[ \frac{1+x}{3+2x} \right]^{\frac{x^2-2x}{x+3}}$

(l)  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{x^2+3x+2x}}{3x-2}$

(m)  $\lim_{x \rightarrow -\infty} \left[ \frac{x-1}{4x-1} \right]^{2x-3}$

(n)  $\lim_{x \rightarrow -3} [x^2 - 1]^{\frac{x-2}{x+3}}$

(ñ)  $\lim_{x \rightarrow 1} [2x + 3]^{\frac{3}{(x-1)^2}}$

(o)  $\lim_{x \rightarrow \infty} \left[ \frac{1}{(x-1)^2} \right]^{\frac{2}{x^2-1}}$

$$(p) \lim_{x \rightarrow 3} \frac{2}{(x-3)^2}$$

$$(r) \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{4x - \sqrt{x^2 + 3x}}{2x - 2}$$

$$(s) \lim_{x \rightarrow 2} \frac{2x^2 + 3x - 14}{x^3 - 8}$$

$$(t) \lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^3 - 3x - 2}{2x^3 + 5x^2 + 4x + 1}$$

$$(u) \lim_{x \rightarrow 4} \frac{x^2 - 16}{\sqrt{x} - 2}$$

$$(v) \lim_{x \rightarrow 3} \frac{\sqrt{3x} - 3}{2 - \sqrt{2x - 2}}$$

$$(w) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x+4} - 2}{x^2 + 3x}$$

$$(x) \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - \sqrt{2x^2 + 4x}}{\sqrt{3x - 2} - 2}$$

$$(y) \lim_{x \rightarrow \infty} \left[ \sqrt{x^2 - 3x} - x \right]$$

$$(z) \lim_{x \rightarrow \infty} \left[ 2x - \sqrt{4x^2 - 2x + 3} \right]$$

**22.** Calcula los siguientes límites:

$$(a) \lim_{x \rightarrow \infty} \left[ \sqrt{2x^2 + 1} - \sqrt{2x^2 + 3x - 2} \right]$$

$$(b) \lim_{x \rightarrow \infty} \left[ \sqrt{4x^2 - 2x} - 2x + 2 \right]$$

$$(c) \lim_{x \rightarrow \infty} \left[ \frac{2x+3}{2x-3} \right]^{3x-1}$$

$$(d) \lim_{x \rightarrow \infty} \left[ 1 - \frac{3}{2x-1} \right]^{4x+5}$$

$$(e) \lim_{x \rightarrow \infty} \left[ \frac{x+3}{2x-3} \right]^{3x-1}$$

$$(f) \lim_{x \rightarrow 3} \left[ \frac{x+3}{2x} \right]^{\frac{1}{x-3}}$$

$$(g) \lim_{x \rightarrow 1} \left[ \frac{2}{x+1} \right]^{\frac{x^2+2x}{x^2+3x-4}}$$

$$(h) \lim_{x \rightarrow \infty} \left[ \frac{2x-1}{2x+1} \right]^{\frac{x^2+4x}{x+2}}$$

$$(i) \lim_{x \rightarrow \infty} \left[ \sqrt{\frac{2x+3}{2x-3}} \right]^{2x+1}$$

$$(j) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2^x}{3^x}$$

$$(k) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2^{x+1}}{2^x - 1}$$

$$(l) \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2^{x+1}}{2^x - 1}$$

**23.** Comprueba si son continuas o no las funciones siguientes en los puntos que se indican:

$$(a) f(x) = x^3 - 3x + 5 \text{ en } x=2.$$

$$(b) f(x) = \frac{2}{x-3} \text{ en } x=3.$$

$$(c) f(x) = \begin{cases} 2x - 5, & x \neq 2 \\ 4, & x = 2 \end{cases} \text{ en } x=2.$$

$$(d) f(x) = \begin{cases} 3x + 5, & x < -1 \\ -2x + 4, & x \geq -1 \end{cases} \quad \text{en } x = -1.$$

$$(e) f(x) = \begin{cases} x^2 + x - 3, & x < 1 \\ 2x - 3, & x > 1 \end{cases} \quad \text{en } x = 1.$$

$$(f) f(x) = \begin{cases} \frac{x^2-1}{x-1}, & x < 1 \\ 3x-2, & 1 < x \leq 2 \\ \frac{x^2-5x+6}{x-2}, & 2 < x \end{cases} \quad \text{en } x=1 \text{ y en } x=2.$$

### Soluciones

1. (a)  $\lim_{x \rightarrow 3} (4-x) = 1$     (b)  $\lim_{x \rightarrow 1} (x^2 + 2) = 3$     (c)  $\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2} (4-x) = 2 \neq f(2) = 0$

(d)  $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1} (x^2 + 1) = 2 \neq f(1) = 1$

(e)  $f(x) = \frac{|x-5|}{x-5} = \begin{cases} 1, & x > 5 \\ -1, & x < 5 \end{cases}$ ,  $\lim_{x \rightarrow 5^+} 1 = 1 \neq -1 = \lim_{x \rightarrow 5^-} (-1)$ , no existe el límite.

(f)  $\lim_{x \rightarrow 3^-} \frac{1}{x-3} = -\infty$ ,  $\lim_{x \rightarrow 3^+} \frac{1}{x-3} = +\infty$

2. (a)  $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x-2}{x^2-x-2} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x-2}{(x-2)(x+1)} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{1}{x+1} = \frac{1}{3}$

(b)  $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x-2}{x^2-4} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{1}{x+2} = \frac{1}{4}$

(c)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x+3} - \sqrt{3}}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{\sqrt{x+3} + \sqrt{3}} = \frac{1}{2\sqrt{3}}$

(d)  $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{\sqrt{|x-2}}{x^6} = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{1}{x^6} = \frac{1}{4}$

(e)  $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{\frac{1}{x+1} - \frac{1}{4}}{x-3} = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{-1}{4(x+1)} = \frac{-1}{16}$

(f)  $\lim_{x \rightarrow 4} \frac{\frac{x}{x+1} - \frac{4}{5}}{x-4} = \lim_{x \rightarrow 4} \frac{1}{5(x+1)} = \frac{1}{25}$

3. (a)  $\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = 3 = \lim_{x \rightarrow 2^+} f(x)$

(b)  $\lim_{x \rightarrow 1^-} g(x) = -2 \neq \lim_{x \rightarrow 1^+} g(x) = 3$

$$(c) \lim_{x \rightarrow -2^-} h(x) = 2 \neq \lim_{x \rightarrow -2^+} h(x) = -2$$

4. (a)  $\lim_{x \rightarrow 5^+} \frac{x-5}{x^2-25} = \lim_{x \rightarrow 5^+} \frac{1}{(x+5)} = \frac{1}{10}$

(b)  $\lim_{x \rightarrow 4^-} \frac{\sqrt{x}-2}{x-4} = \lim_{x \rightarrow 4^-} \frac{1}{\sqrt{x}+2} = \frac{1}{4}$

(c)  $\lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{2-x}{x^2-4} = \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{-1}{x+2} = -\frac{1}{4}$

(d)  $\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{x^2 - 2x + 1}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1^-} (x - 1) = 0$

(e)  $\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{-x}{x} = -1 \neq 1 = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x}{x}$

(f)  $\lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{-x+2}{x-2} = -1 \neq 1 = \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{x-2}{x+2}$

(g)  $\lim_{x \rightarrow 3^-} \frac{x+2}{2} = \frac{5}{2} \neq 2 = \lim_{x \rightarrow 3^+} \frac{12-2x}{3}$

(h)  $\lim_{x \rightarrow 2^-} (x^2 - 4x + 6) = 2 = \lim_{x \rightarrow 2^+} (-x^2 + 4x - 2)$

(i)  $\lim_{x \rightarrow 1^-} (x^3 + 1) = 2 = \lim_{x \rightarrow 1^+} (x + 1)$

(j)  $\lim_{x \rightarrow 1^-} x = 1 \neq 0 = \lim_{x \rightarrow 1^+} (1 - x)$

5. (a)  $f(x)$  es continua en su dominio que es  $\mathbb{R}$ .

(b)  $f(x)$  presenta en  $x = 0$  una discontinuidad inevitable.

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = +\infty \neq -\infty = \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$$

(c)  $f(x)$  presenta en  $x = -1$  una discontinuidad evitable.

$$\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^2-1}{x+1} = \lim_{x \rightarrow -1} (x-1) = -2, f(-1) \text{ no existe.}$$

(d)  $f(x)$  presenta en  $x = 2$  y  $x = -2$  discontinuidades inevitables.

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = -\infty \neq +\infty = \lim_{x \rightarrow 2^+} f(x)$$

$$\lim_{x \rightarrow -2^-} f(x) = +\infty \neq -\infty = \lim_{x \rightarrow -2^+} f(x)$$

**(e)**  $f(x)$  presenta en  $x = 1$  una discontinuidad inevitable.

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = -\infty \neq +\infty = \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x)$$

**(f)**  $f(x)$  es continua en su dominio que es  $\mathbb{R}$ .

**(g)**  $f(x)$  presenta en  $x = 5$  una discontinuidad inevitable y en  $x = -2$  una discontinuidad evitable.

$$\lim_{x \rightarrow 5^-} f(x) = -\infty \neq +\infty = \lim_{x \rightarrow 5^+} f(x)$$

$$\lim_{x \rightarrow -2} \frac{x+2}{(x+2)(x-5)} = -\frac{1}{7} \text{ y } f(-2) \text{ no existe.}$$

**(h)**  $f(x)$  es continua en  $\mathbb{R}$ , ya que es continua también en  $x = 1$ .

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} (-2x + 3) = 1 = \lim_{x \rightarrow 1^+} x^2 = f(1)$$

**(i)**  $f(x)$  presenta una discontinuidad inevitable en  $x = 2$ .

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} (-2x) = -4 = f(2) \neq -3 = \lim_{x \rightarrow 2^+} (x^2 - 4x + 1)$$

**6.** Para que  $f(x)$  sea continua ha de serlo en  $x = 2$ , ya que en el resto de los puntos del dominio por estar definida como una polinómica ya lo es.

$$f \text{ continua en } x = 2 \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} f(2) = 8 \\ \lim_{x \rightarrow 2^-} x^3 = 8 \\ \lim_{x \rightarrow 2^+} ax^2 = 4a \end{array} \right\} \Leftrightarrow \text{(como los tres valores han de ser iguales)}$$

$$8 = 4a \Rightarrow a = 2$$

**7.** Para que  $f(x)$  sea continua ha de serlo en  $x = -1$  y en  $x = 3$ , ya que en el resto de los puntos del dominio por estar definida como una polinómica ya lo es.

$$f \text{ continua en } x = -1 \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} f(-1) = 2 \\ \lim_{x \rightarrow -1^-} 2 = 2 \\ \lim_{x \rightarrow -1^+} ax + b = -a + b \end{array} \right\} \Leftrightarrow -a + b = 2$$

$$f \text{ continua en } x = 3 \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} f(3) = -2 \\ \lim_{x \rightarrow 3^-} ax + b = 3a + b \\ \lim_{x \rightarrow 3^+} -2 = -2 \end{array} \right\} \Leftrightarrow 3a + b = -2$$

$$\text{Resolviendo el sistema } \left\{ \begin{array}{l} -a + b = 2 \\ 3a + b = -2 \end{array} \right\} \Rightarrow a = -1, b = 1$$

8. (a)  $\lim_{x \rightarrow -3^+} \frac{1}{x^2-9} = -\infty$  y  $\lim_{x \rightarrow -3^-} \frac{1}{x^2-9} = +\infty$

(b)  $\lim_{x \rightarrow -3^+} \frac{x}{x^2-9} = +\infty$  y  $\lim_{x \rightarrow -3^-} \frac{1}{x^2-9} = -\infty$

(a)  $\lim_{x \rightarrow -3^+} \frac{x^2}{x^2-9} = -\infty$  y  $\lim_{x \rightarrow -3^-} \frac{x^2}{x^2-9} = +\infty$

9. (a)  $\lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{1}{(x+2)^2} = +\infty$  y  $\lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{1}{(x+2)^2} = +\infty$

(b)  $\lim_{x \rightarrow -2^+} \frac{1}{(x+2)} = +\infty$  y  $\lim_{x \rightarrow -2^-} \frac{1}{(x+2)} = -\infty$

10. (a)  $f(x) = \frac{1}{x^2}$  posee como asíntota vertical la recta  $x = 0$ .

(b)  $f(x) = \frac{x^2-2}{x^2-x-2}$  posee como asíntotas verticales las rectas  $x = 2$  y  $x = -1$ .

(c)  $f(x) = \frac{x^3}{x^2-1}$  posee como asíntotas verticales las rectas  $x = 1$  y  $x = -1$ .

(d)  $f(x) = 1 - \frac{4}{x^2}$  posee como asíntota vertical la recta  $x = 0$ .

(e)  $f(x) = \frac{4}{(x-2)^3}$  posee como asíntota vertical la recta  $x = 2$ .

(f)  $f(x) = \frac{2+x}{x-2}$  posee como asíntota vertical la recta  $x = 2$ .

(g)  $f(x) = \frac{-4x}{x^2+4}$  No tiene asíntotas verticales.

(h)  $f(x) = \frac{-2}{(x-2)^2}$  posee como asíntota vertical la recta  $x = 2$ .

11. (a)  $\lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{1}{x-2} = +\infty$  y  $\lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{x-3}{x-2} = -\infty$  (b)

$\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{2+x}{1-x} = -\infty$

(c)  $\lim_{x \rightarrow 4^+} \frac{x^2}{x^2-16} = +\infty$

(d)  $\lim_{x \rightarrow 4} \frac{x^2}{x^2+16} = \frac{1}{2}$



$$(e) \lim_{x \rightarrow 0^-} \left(1 + \frac{1}{x}\right) = -\infty$$

$$(f) \lim_{x \rightarrow 0^-} \left(x^2 - \frac{1}{x}\right) = +\infty$$

$$(g) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x(x-1)}{(x^2+1)(x-1)} = \frac{1}{2}$$

$$(h) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-1)(x^2+x+1)}{(x^2+x+1)} = 0$$

12. (a) La función  $f(x) = \frac{3x^2}{x^2+2}$  posee como asíntota horizontal la recta  $y = 3$ .

(b) La función  $f(x) = \frac{2x}{\sqrt{x^2+2}}$  posee como asíntotas horizontales las rectas  $y = 2$  e  $y = -2$ .

(c) La función  $f(x) = \frac{x}{x^2+2}$  posee como asíntota horizontal la recta  $y = 0$ .

(d) La función  $f(x) = 2 + \frac{x^2}{x^4+1}$  posee como asíntota horizontal la recta  $y = 2$ .

(e) La función  $f(x) = \frac{-6x}{\sqrt{4x^2+5}}$  posee como asíntotas horizontales las rectas  $y = 3$  e  $y = -3$ .

(f) La función  $f(x) = 5 - \frac{1}{x^2+1}$  posee como asíntota horizontal la recta  $y = 5$ .

13. (a)  $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{3x-2}{3x+4}\right)^{4x^2} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{e^{4x^2 \ln \frac{3x-2}{3x+4}}}{e^{4x^2 \ln \frac{3x+4}{3x-2}}} = e^8$

$$(b) \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{x^2 - 2x}{3x^2 + 5}\right)^{5x} = \left(\frac{1}{3}\right)^{-\infty} = +\infty$$

$$(c) \lim_{x \rightarrow \infty} \left(4x - \sqrt{3x^2 + 5x}\right) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{13x^2 - 5x}{4x + \sqrt{3x^2 + 5x}} = +\infty$$

$$(d) \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\sqrt{4x^2 + 5} + 2x\right) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{5}{\sqrt{4x^2 + 5} - 2x} = 0$$

$$(e) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{5x-3}{\sqrt{3x^2-2}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{5x-3}{\sqrt{3x^2-2}} = \frac{5}{\sqrt{3}}$$

$$(f) \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{5x-2}{5x+2}\right)^{3x^2} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{e^{3x^2 \ln \frac{5x-2}{5x+2}}}{e^{3x^2 \ln \frac{5x+2}{5x-2}}} = e^0 = 1$$

$$(g) \lim_{x \rightarrow 3} \frac{2\sqrt{x^2-9}}{x^3-27} = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{4(x-3)}{x^3-27} = \frac{4}{6^2} = \frac{1}{9}$$

$$(h) \lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt{4x^2-4}}{x^2-4} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{2(x-1)}{x^2-4} = \frac{2}{2^2-4} = \frac{1}{2}$$

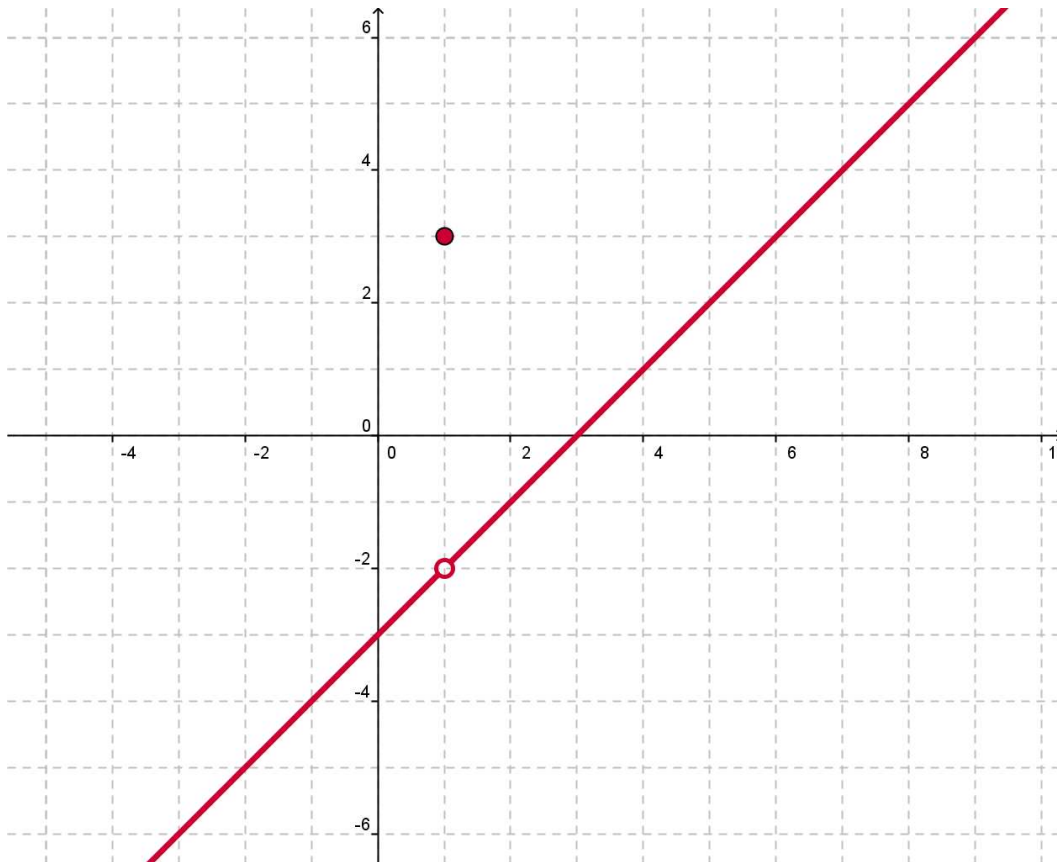
$$(i) \lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{3x-2}{4x+2}\right)^{\frac{5}{(x-1)^2}} = \left(\frac{1}{6}\right)^{-\infty} = +\infty$$

**14.**

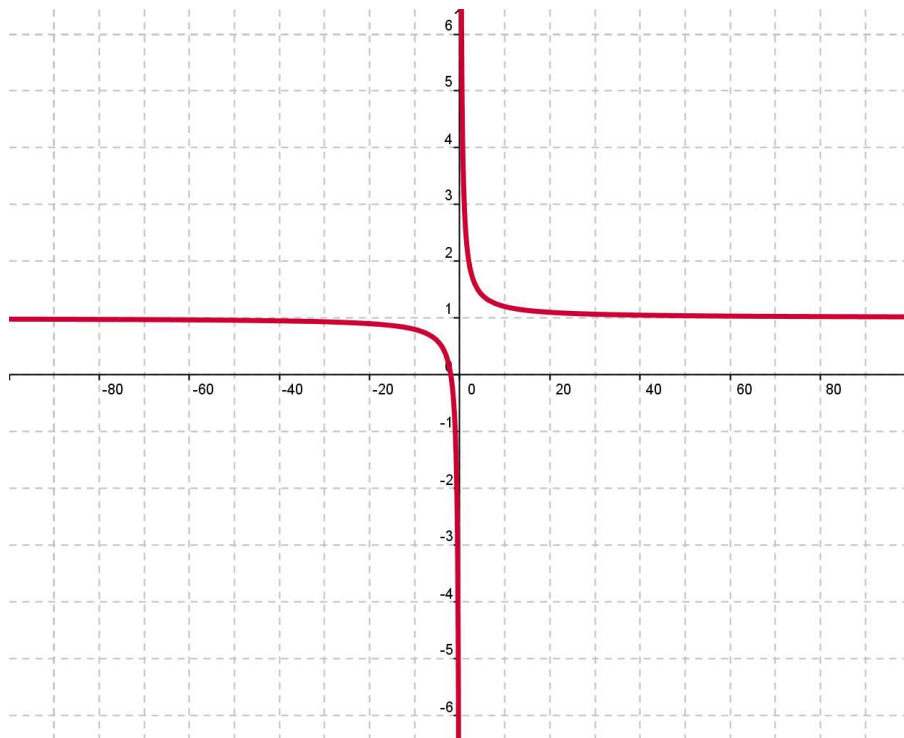
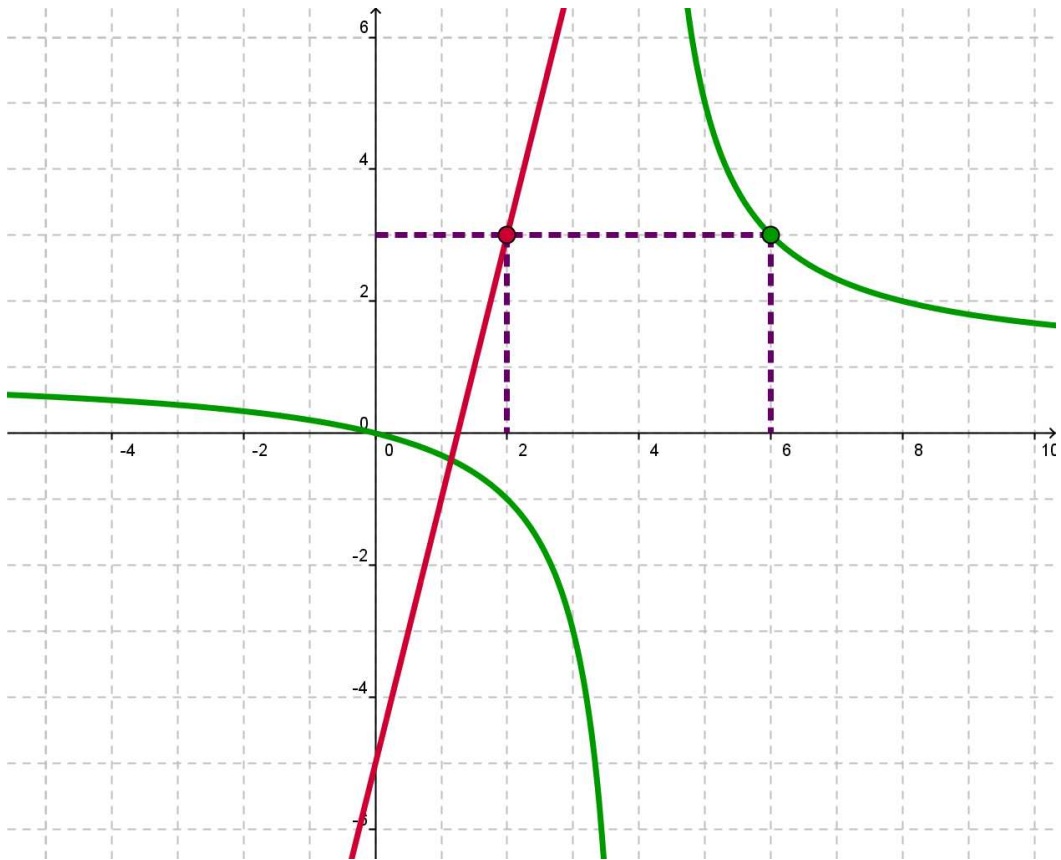
(b)  $f(1) = 3, f(3) = 0$

(c)  $\lim_{x \rightarrow 1} (x - 3) = -2 \neq f(1).$        $\lim_{x \rightarrow 3} (x - 3) = 0 = f(3).$

**15. y 16.**



17.



18.  $f(x) = \begin{cases} \frac{x+4}{x-2} & x \neq 2 \\ \sin(\pi/x) & x=2 \end{cases}$  y  $g(x) = x + 2$ . Sus gráficas únicamente difieren en el punto de abscisa  $x = 2$ . La recta

$g(x)$  pasa por el punto  $(2,4)$  y a la recta  $f(x)$  le falta el punto con abscisa  $x = 2$ .

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^-} g(x) = 4$$

19.  $\lim_{x \rightarrow 2^-} (2x - 2) = 2 = 4 + 4k - 2k = \lim_{x \rightarrow 2^+} (x^2 + 2kx - 2k) \Rightarrow k = -1$

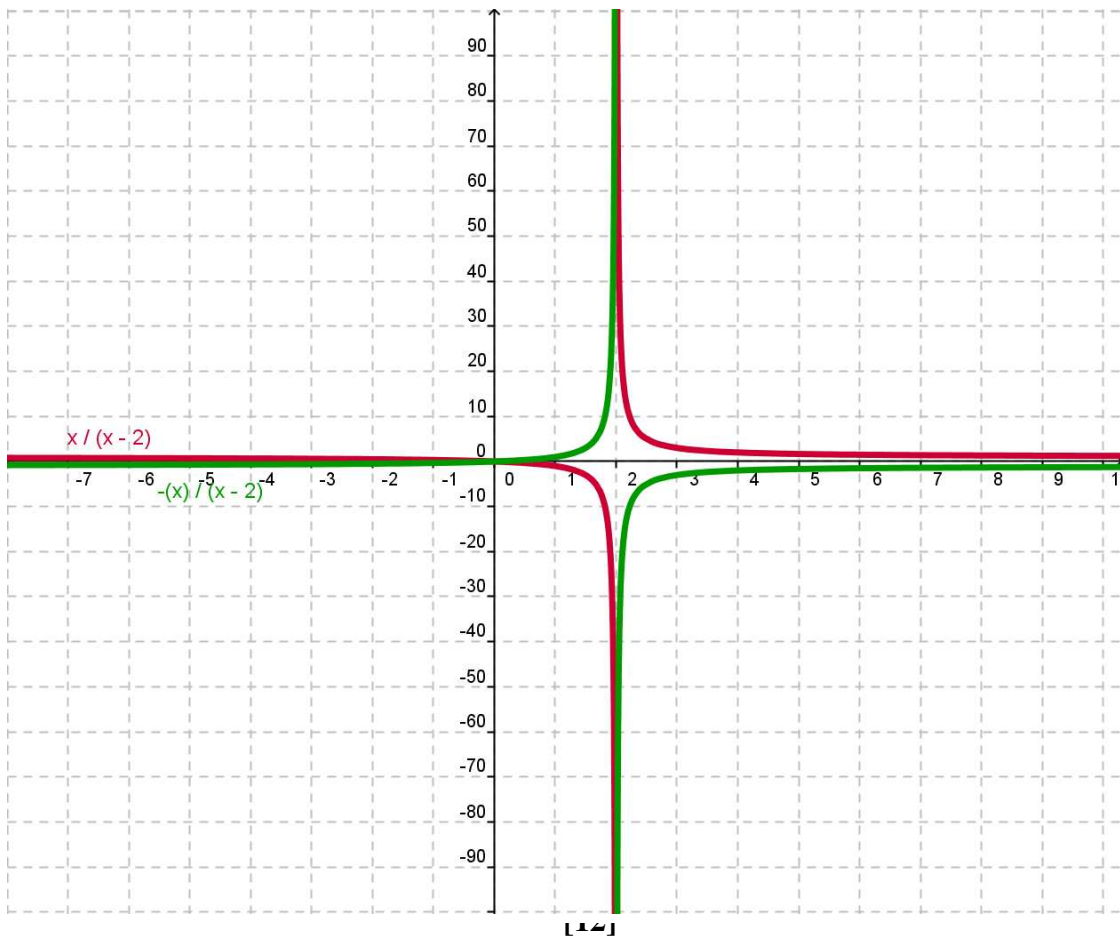
20. (a)  $\lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{x}{x-2} = -\infty \neq +\infty = \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{x}{x-2}$ ,  $f(2)$  no existe.

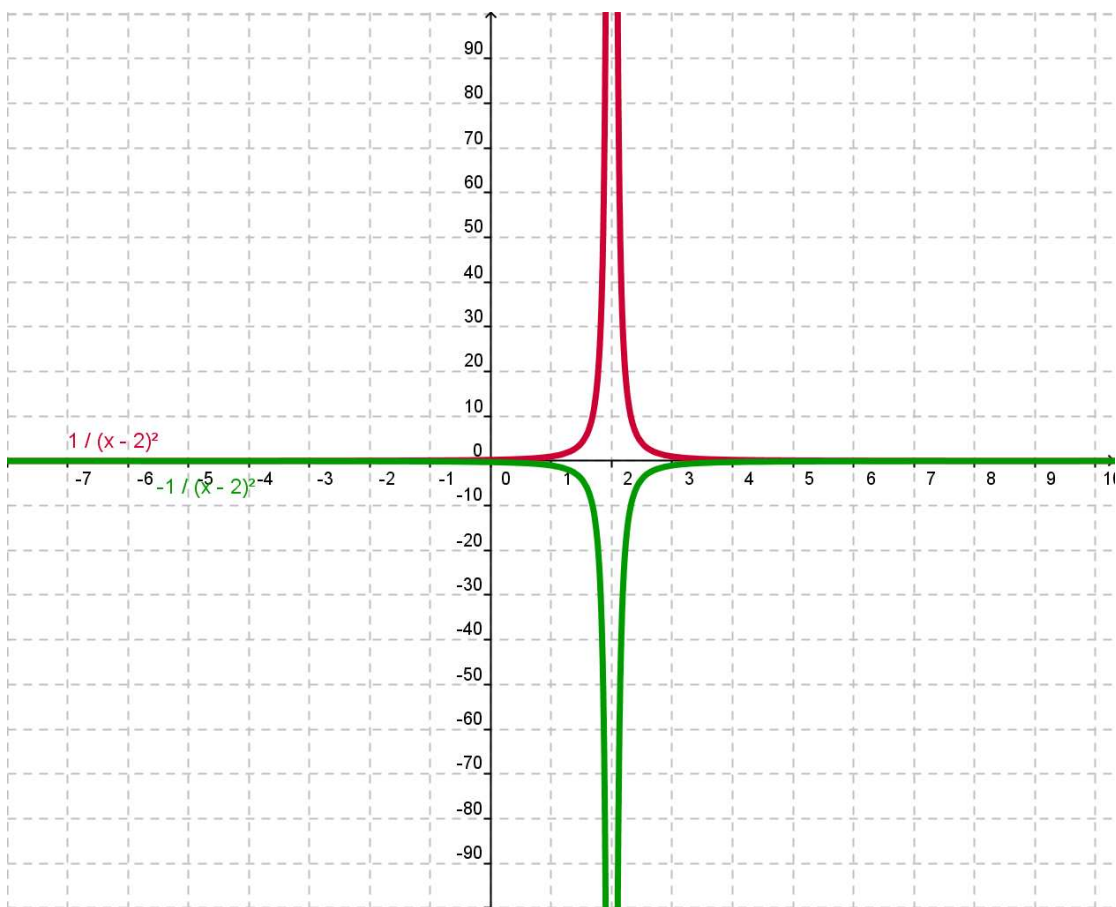
(b)  $\lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{-x}{x-2} = +\infty \neq -\infty = \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{-x}{x-2}$ ,  $f(2)$  no existe.

(c)  $\lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{1}{(x-2)^2} = +\infty = +\infty = \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{1}{(x-2)^2}$ ,  $f(2)$  no existe.

(d)  $\lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{-1}{(x-2)^2} = -\infty = -\infty = \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{-1}{(x-2)^2}$ ,  $f(2)$  no existe.

En todos los casos la recta  $x = 2$  es una asíntota vertical.





21. Calcula los siguientes límites:

$$(a) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2+x-3x^2}{x^2-1} = -3$$

$$(b) \lim_{x \rightarrow -1} \left[ \frac{-x}{(x+1)^2} \right]^{\frac{2}{x-1}} = \infty^{-1} = 0$$

$$(c) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^2+1}{x^3+3x-1} = 0$$

$$(d) \lim_{x \rightarrow 1} \left[ \frac{x^2-2x+1}{x+2} \right]^{\frac{-1}{(x-1)^2}} = 0^{-\infty} = \infty$$

$$(e) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^4-3x+2}{x^2+4x-1} = +\infty$$

$$(f) \lim_{x \rightarrow \infty} (x^2 - 3x)^{1-2x} = \infty^{-\infty} = 0$$

$$(g) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^3+3x^2-x+1}{x^2+x+1} = +\infty$$

$$(h) \lim_{x \rightarrow -1^-} \frac{3x}{x+1} = +\infty \neq -\infty = \lim_{x \rightarrow -1^+} \frac{3x}{x+1}$$

$$(i) \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2+x^2-3x^4}{x^2+4x-1} = -\infty$$

$$(j) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{x+1}}{3x-4} = 0$$

$$(k) \lim_{x \rightarrow \infty} \left[ \frac{1+x}{3+2x} \right]^{\frac{x^2-2x}{x+3}} \quad (\#) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{x^2+3x+2x}}{3x-2} = \frac{3}{3} = 1$$

$$(m) \lim_{x \rightarrow -\infty} \left[ \frac{x-1}{4x-1} \right]^{2x-3} = \left( \frac{1}{4} \right)^{-\infty} = \infty$$

$$(n) \lim_{x \rightarrow -3^-} [x^2 - 1]^{\frac{x-2}{x+3}} = 8^\infty \quad \lim_{x \rightarrow -3^+} [x^2 - 1]^{\frac{x-2}{x+3}} = 8^{-\infty} = 0$$

$$(\tilde{n}) \lim_{x \rightarrow 1} [2x + 3]^{\frac{3}{(x-1)^2}} = 5^\infty \quad (\circ) \lim_{x \rightarrow \infty} \left[ \frac{1}{(x-1)^2} \right]^{\frac{2}{x^2-1}} = 1$$

$$(p) \lim_{x \rightarrow 3} \frac{2}{(x-3)^2} = \infty$$

$$(r) \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{4x - \sqrt{x^2+3x}}{2x-2} = \frac{5}{2}$$

$$(s) \lim_{x \rightarrow 2} \frac{2x^2+3x-14}{x^3-8} = \frac{11}{12}$$

$$(t) \lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^3-3x-2}{2x^3+5x^2+4x+1} = \frac{-3}{-1} = 3$$

$$(u) \lim_{x \rightarrow 4} \frac{x^2-16}{\sqrt{x}-2} = 32$$

$$(v) \lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt{3x}-3}{2-\sqrt{2x}} = \frac{12}{-2} = -6$$

$$(w) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x+4}-2}{x^2+3x} = \frac{1}{12}$$

$$(x) \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - \sqrt{2x^2+4x}}{\sqrt{3x-2}-2} = \frac{10}{3}$$

$$(y) \lim_{x \rightarrow \infty} \left[ \sqrt{x^2 - 3x} - x \right] = \frac{-3}{2} \quad (z) \lim_{x \rightarrow \infty} \left[ 2x - \sqrt{4x^2 - 2x + 3} \right] = \frac{1}{2}$$

**22.** Calcula los siguientes límites:

$$(a) \lim_{x \rightarrow \infty} \left[ \sqrt{2x^2 + 1} - \sqrt{2x^2 + 3x - 2} \right] = \frac{-3}{2\sqrt{2}}$$

$$(b) \lim_{x \rightarrow \infty} \left[ \sqrt{4x^2 - 2x} - 2x + 2 \right] = \frac{3}{2}$$

$$(c) \lim_{x \rightarrow \infty} \left[ \frac{2x+3}{2x-3} \right]^{3x-1} = e^9 \quad (d) \lim_{x \rightarrow \infty} \left[ 1 - \frac{3}{2x-1} \right]^{4x+5} = e^{-6}$$

$$(e) \lim_{x \rightarrow \infty} \left[ \frac{x+3}{2x-3} \right]^{3x-1} = \left( \frac{1}{2} \right)^\infty \quad (f) \lim_{x \rightarrow 3} \left[ \frac{x+3}{2x} \right]^{\frac{1}{x-3}} = e^{-\frac{1}{6}}$$

$$(g) \lim_{x \rightarrow 1} \left[ \frac{2}{x+1} \right]^{\frac{x^2+2x}{x^2+3x-4}} = e^{\frac{-3}{10}}$$

$$(h) \lim_{x \rightarrow \infty} \left[ \frac{2x-1}{2x+1} \right]^{\frac{x^2+4x}{x+2}} = e^{-1}$$

$$(i) \lim_{x \rightarrow \infty} \left[ \sqrt{\frac{2x+3}{2x-3}} \right]^{2x+1} = e^3$$

$$(j) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2^x}{3^x} = 0$$

$$(k) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2^{x+1}}{2^x - 1} = 1$$

$$(l) \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2^{x+1}}{2^x - 1} = -1$$

**23.** Comprueba si son continuas o no las funciones siguientes en los puntos que se indican:

(a)  $f(x) = x^3 - 3x + 5$  en  $x=2$ . Es continua por ser polinómica.

(b)  $f(x) = \frac{2}{x-3}$  en  $x=3$ . No es continua ya que:  $\left\{ \begin{array}{l} f(3) \text{ no existe} \\ \lim_{x \rightarrow 3^-} f(x) = -\infty \\ \lim_{x \rightarrow 3^+} f(x) = +\infty \end{array} \right\}$

(c)  $f(x) = \begin{cases} 2x-5, & x \neq 2 \\ 4, & x = 2 \end{cases}$  en  $x=2$ . No es continua ya que:  $\left\{ \begin{array}{l} f(2) = 4 \\ \lim_{x \rightarrow 2} (2x-5) = -1 \end{array} \right\}$

(d)  $f(x) = \begin{cases} 3x+5, & x < -1 \\ -2x+4, & x \geq -1 \end{cases}$  en  $x=-1$ . No es continua ya que:  $\left\{ \begin{array}{l} f(-1) = 6 \\ \lim_{x \rightarrow -1^-} (3x+5) = 2 \\ \lim_{x \rightarrow -1^+} (-2x+4) = 6 \end{array} \right\}$

(e)  $f(x) = \begin{cases} x^2+x-3, & x < 1 \\ 2x-3, & x > 1 \end{cases}$  en  $x=1$ . No es continua ya que:  $\left\{ \begin{array}{l} f(1) \text{ no existe} \\ \lim_{x \rightarrow 1^-} (x^2+x-3) = -1 \\ \lim_{x \rightarrow 1^+} (2x-3) = -1 \end{array} \right\}$

(f)  $f(x) = \begin{cases} \frac{x^2-1}{x-1}, & x < 1 \\ 3x-2, & 1 < x \leq 2 \\ \frac{x^2-5x+6}{x-2}, & 2 < x \end{cases}$  en  $x=1$  y en  $x=2$ .

No es continua en  $x=1$  ya que:  $\left\{ \begin{array}{l} f(1) \text{ no existe} \\ \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{x^2-1}{x-1} = 2 \\ \lim_{x \rightarrow 1^+} (3x-2) = 1 \end{array} \right\}$

No es continua en  $x = 2$  ya que:  $\left\{ \begin{array}{l} f(2) = 4 \\ \lim_{x \rightarrow 2^-} (3x - 2) = 4 \\ \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{(x-2)(x-3)}{x-2} = -1 \end{array} \right\}$