PRINCIPIOS DE PROGRAMACIÓN LINEAL

1. Introducción

La programación lineal es una herramienta matemática que permite encontrar la solución óptima –minimizar costes o maximizar beneficios– en problemas de planificación social, económica, logística,... dependientes de recursos limitados, esto es, con restricciones. Tanto la función objetivo, lo que se desea optimizar, como las restricciones deben ser de lineales.

- En general, la formulación estándar del problema sería la siguiente:

Maximizar (minimizar) $f(x_1, x_2, ..., x_n) = a_0 + a_1 x + a_2 x_2 + ... + a_n x_n$

Restringida por:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1n}x_n \le b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + ... + a_{2n}x_n \le b_2 \\ \quad ... \qquad\qquad\qquad\qquad ... \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + ... + a_{mn}x_n \le b_m \end{cases}$$

Las letras x_i representan las variables consideradas; a_{ij} y b_i son números.

Aquí nos limitaremos a considerar sólo dos variables, x e y. Por tanto, se tratará de:

Maximizar (minimizar): $f(x, y) = ax + by + c$

Restringida por: $a_1 x + b_1 y \le c_1$.

$a_2 x + b_2 y \le c_2$

:

- La función $f(x, y) = ax + by + c$ recibe el nombre de **función objetivo**.
- Las desigualdades $a_i x + b_i y \le c_i$ se llaman **restricciones**.

Ejemplos:

Enunciados de estos problemas pueden ser los siguientes:

1. Maximizar $f(x, y) = 2x + y$

   Restringida por: $3x + y \le 24$

   $3x + 4y \le 48$

   $3x + 2y \le 30$

   $x \ge 0$; $y \ge 0$

2. Minimizar $f(x, y) = x + 3y$

   Restringida por: $x + y \ge 6$

   $2x - 3y \le 6$

   $x + 2y \ge 10$

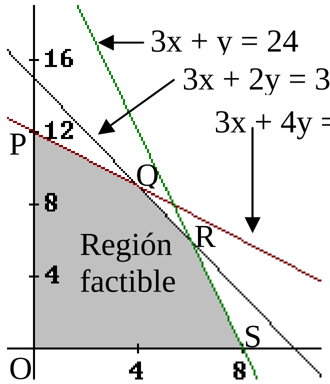
   $x \ge 0$

- **Región factible (conjunto de soluciones)**

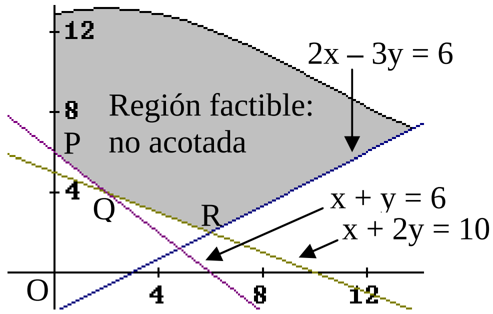
El conjunto de soluciones de un problema de programación lineal es el formado por todas las posibles soluciones del problema.
En el caso de problemas de dos variables, las restricciones determinan una porción del plano que se denomina región factible.
– Cualquier punto de esa región cumple todas las condiciones del problema; por tanto puede ser la solución buscada.
– Los puntos que no pertenecen a la región factible no pueden ser solución del problema.
– La región factible puede ser cerrada (acotada) o abierta (no acotada). En cualquier caso, es la región limitada por las rectas asociadas a las restricciones.

Ejemplo:
Las regiones factibles asociadas a los ejemplos anteriores son las sombreadas en las siguientes figuras:

a)



b)



<u>Observación</u>: El conjunto de soluciones de una inecuación lineal con dos variables es un semiplano. La intersección de los semiplanos asociados a las soluciones de cada una de las restricciones son las regiones factible. (Ver “sistemas de inecuaciones”).

<u>2. La solución óptima</u>

La solución óptima, si existe, se encuentra en la frontera (lados y vértices) de la región factible. En particular, en algunos de los vértices de esa región.
– Los lados de la frontera vienen determinados por las rectas asociadas a las restricciones.
– Los vértices son los puntos de corte de esas rectas.

- **Para regiones cerradas** (acotadas) siempre existe solución óptima: siempre hay un punto, un vértice, que maximiza la función objetivo; y otro punto que la minimiza. Para determinar qué punto cumple el objetivo deseado basta con calcular el valor de $f(x, y)$ en cada uno de los vértices. En el caso de que haya dos vértices con el mismo valor máximo (o mínimo, la solución óptima se da en cualquiera de esos vértices o en cualquier punto del segmento que determinan.

Ejemplo:
Para el ejemplo 1, los vértices son:

$$O = (0, 0);\ \ P = (0, 12);\ \ Q \to \begin{cases} 3x + 4y = 48 \\ 3x + 2y = 30 \end{cases} \Rightarrow Q = (4, 9);$$

$$R \to \begin{cases} 3x + y = 24 \\ 3x + 2y = 30 \end{cases} \Rightarrow R = (6, 6);\ \ S = (8, 0)$$

El valor de $f(x, y) = 2x + y$ en esos puntos es:

$f(0, 0) = 0$; $f(0, 12) = 12$; $f(4, 9) = 17$; $f(6, 6) = 18$; $f(8, 0) = 16$

Por tanto, el punto que maximiza a $f(x, y) = 2x + y$ es R = (6, 6); el valor máximo es $f(6, 6) = 18$.
(El punto que minimiza a $f(x, y) = 2x + y$ es O = (0, 0); el valor mínimo es $f(0, 0) = 0$.)

<u>Observación</u>: Si la función objetivo varía, también puede hacerlo la solución. Así, si con las mismas restricciones se tratase de maximizar $g(x, y) = x - 2y$, se tendría:

$g(0, 0) = 0$; $g(0, 12) = -24$; $g(4, 9) = -14$; $g(6, 6) = -6$; $g(8, 0) = 8$

En este caso, el máximo se obtiene en S = (8, 0); el mínimo, en P = (0, 12).

<u>Otro más</u>. Si se tratase de maximizar $h(x, y) = 3x + y$, entonces:

$h(0, 0) = 0$; $h(0, 12) = 12$; $h(4, 9) = 21$; $h(6, 6) = 24$; $h(8, 0) = 24$

Como hay dos vértices con el mismo valor máximo, la solución es cualquier punto del segmento RS.

- **Para regiones abiertas** (no acotadas) es posible que $f(x, y)$ no tenga máximo ni mínimo, sólo tenga máximo o sólo tenga mínimo. Para determinarlo no es suficiente con evaluar la función en los vértices de la región factible. Es preciso recurrir a las rectas de nivel.

– Las **rectas de nivel** asociadas a $f(x, y) = ax + by + c$ son las de ecuación $ax + by = k$, donde k es una constante que indica el nivel de f en todos los puntos que perteneciendo a la región factible pertenecen también a la recta.
– Todas las rectas de nivel asociadas a una función son paralelas. Cuando los coeficientes a y b tienen el mismo signo, su nivel, k, aumenta al trasladarlas hacia la derecha; y su nivel disminuye si se trasladan hacia la izquierda. (Cuando los coeficientes a y b tienen distinto signo, sucede al revés).
– En consecuencia, el valor de $f(x, y) = ax + by + c$ aumenta o disminuye al mover las rectas de nivel $ax + by = k$; y puede asegurarse, cuando a y b tengan el mismo signo, que:
– El mínimo de $f(x, y)$ será el punto de la región factible situado más a la izquierda y en contacto con una recta de nivel.
– El máximo de $f(x, y)$ será el punto de la región factible situado más a la derecha y en contacto con una recta de nivel.
– El mínimo o el máximo será siempre un vértice (o cualquier punto de un lado, en el caso de que la recta de nivel óptimo coincida con una de las rectas asociadas a las restricciones).

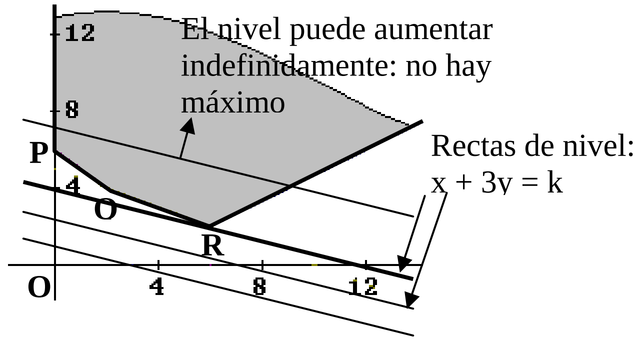
Ejemplo:
Para el ejemplo 2, los vértices son:

$$P = (0, 6);\ \ Q \to \begin{cases} x + y = 6 \\ x + 2y = 10 \end{cases} \Rightarrow Q = (2, 4);\ \ R \to \begin{cases} x + 2y = 10 \\ 2x - 3y = 6 \end{cases} \Rightarrow R = (6, 2)$$

El valor de f(x, y) = x + 3y en esos puntos es:

$f(0, 6) = 18$; $f(2, 4) = 14$; $f(6, 2) = 12$

A la vista de esos valores, el mínimo de $f(x, y)$ se alcanza en R = (6, 2), pero para confirmarlo hay que recurrir a las rectas de nivel, que son x + 3y = k. (trazamos una de ellas, por ejemplo x + 3y = 3 y la trasladamos, como se indica en la figura siguiente).



Efectivamente, el mínimo se da en el punto R = (6, 2): la recta de menor nivel en contacto con la región factible es x + 3y = 12.
Como puede verse también en la figura, las rectas de nivel pueden desplazarse indefinidamente hacia la derecha, estando en contacto con la región factible; por eso la función de $f(x, y) = x + 3y$ no tiene máximo en este caso.

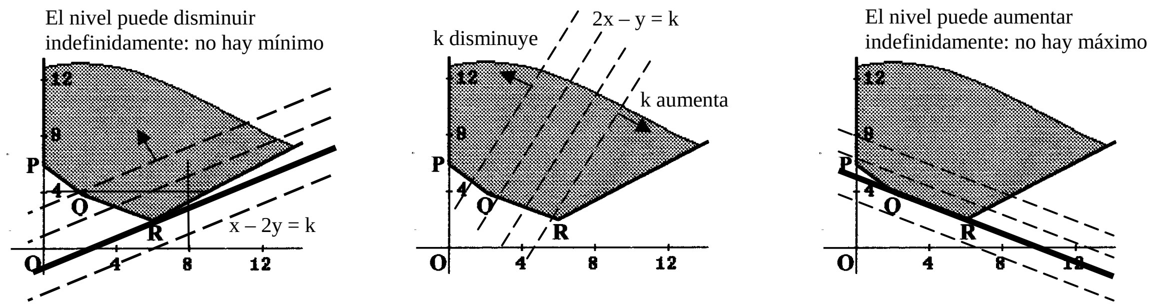
<u>Nota</u>: Si la función objetivo varía, también puede hacerlo la solución. Así, si con las mismas restricciones se tratase de optimizar las funciones:

$$g(x, y) = x - 2y, \qquad h(x, y) = 2x - y, \qquad q(x, y) = x + 2y$$

se tendría:

$g(0, 6) = 0$; $g(2, 4) = -6$; $g(6, 2) = 2$
$h(0, 6) = -6$; $h(2, 4) = 0$; $h(6, 2) = 10$
$q(0, 6) = 12$; $q(2, 4) = 10$; $q(6, 2) = 10$

En ninguno de los tres casos puede decidirse el valor máximo o mínimo, pero trazando las rectas de nivel, como en las figuras siguientes, se observa:



- Las rectas de nivel asociadas a $g(x, y) = x - 2y$ son $x - 2y = k$. Toman su valor máximo en R = (6, 2), que es 2; no existe mínimo.
- Las rectas de nivel asociadas a $h(x, y) = 2x - y$ son $2x - y = k$. Pueden desplazarse a izquierda y derecha permanentemente en contacto con la región factible: no hay ni mínimo ni máximo.
- Las rectas de nivel asociadas a $q(x, y) = x + 2y$ son $x + 2y = k$. Pueden desplazarse hacia la derecha indefinidamente: no hay máximo. Hacia la izquierda "salen" de la región factible por el lado QR: todos los puntos de ese lado minimizan a la función; ese valor mínimo es 10.