IES Rey Pastor

Departamento de Matemáticas

Examen Bloque Cáculo 2º Bachillerato CC SS

OPCIÓN A

EJERCICIO 1 (Calificación máxima 2 puntos)

Se considera la función de variable real: f(x) = $\begin{cases} e^x & si\ x < 0 \\ \frac{a+3x}{x^2-4x+3} & si\ x \geq 0 \end{cases}$

a) **Estúdiese la continuidad de f(x) en x = 0 según los distintos valores de a .**
b) **Determínense las asíntotas de la función para a = 0**

EJERCICIO 2 (Calificación máxima 2 puntos)

Se considera la función real de variable real definida por f(x) = $x(5-x)^2$ **.**

a) **Determínense los intervalos de crecimiento y decrecimiento de f(x) así como sus extremos relativos.**
b) **Determínense los intervalos de concavidad y convexidad de f(x) así como sus puntos de inflexión.**

EJERCICIO 3 (Calificación máxima 2 puntos)

Halle dos números tales que el producto del cuadrado de uno por el otro sea 4 y su suma sea mínima.

EJERCICIO 4 (Calificación máxima 3 puntos)

a) **Calcule** $\int \frac{2x^2+x-3}{x+1}dx$
b) **Dibuje el recinto limitado por las curvas y =** $2 - x^2$ **, y = x y el eje X. Determine su área.**

EJERCICIO 5 (Calificación máxima 1 punto)

Determine para qué punto o puntos de la gráfica de la función y = $x^3 - 2x + 2$ **, la recta tangente es paralela a la recta y = x + 2 .**

OPCIÓN B

EJERCICIO 1 (Calificación máxima 2 puntos) **Determine los parámetros a, b y c en la curva $y = ax^3 + bx^2 + cx$ sabiendo que tiene un mínimo relativo en el punto (2, 1) y un punto de inflexión en x = 2/3.**

EJERCICIO 2 (Calificación máxima 2,5 puntos) **Dada la función:**

$$F(x) = \begin{cases} \frac{x^2}{8} + \frac{7x}{4} & \text{si } x < 2 \\ \frac{ax^2+b}{x} & \text{si } x \geq 2 \end{cases}$$

a) **Calcule a y b para que f(x) sea derivable en x = 2**
b) **Calcule l ecuación de la recta tangente a la gráfica de f(x) en x = - 1.**

EJERCICIO 3 (Calificación máxima 2,5 puntos) **Dada la función $f(x) = \frac{x^2+2}{2x+1}$, calcule sus asíntotas, sus extremos relativos y haga una representación aproximada de su gráfica.**

EJERCICIO 4 (Calificación máxima 2 puntos) **Dibuja el recinto y calcula el área comprendida entre las curvas $y = 2x$, $y = 3 - x^2$.**

EJERCICIO 5 (Calificación máxima 1 puntos) **Dada la función $f(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2+4}}$,**

a) **Determine razonadamente su dominio y calcule $\lim_{x\to\infty} f(x)$.**
b) **Calcule $\int f(x)dx$**

SOLUCIONES

OPCIÓN A

EJERCICIO 1 **(** 0,5 + 1,5 puntos)

a) **Para que f(x) sea continua en x = 0 ,** $\lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^+} f(x)$ **,** $\lim_{x\to 0} e^x = \lim_{x\to 0} \frac{a+3x}{x^2-4x+3}$ **; 1 =** $\frac{a}{3}$ **; a = 3**

b) ***A. Verticales*****: El denominador se anula para los valores x = 1 y x = 3. Vemos si x = 1 x = 3 son asíntotas verticales:**

$\lim_{x\to 1^-} \frac{3x}{x^2-4x+3} = \infty$ **ya que para x = 0.999 y = 1497**

$\lim_{x\to 1^+} \frac{3x}{x^2-4x+3} = -\infty$ **ya que para x = 1,001 y = -1502**

Por tanto x = 1 es una asíntota vertical.

$\lim_{x\to 3^-} \frac{3x}{x^2-4x+3} = -\infty$ **ya que para x = 2.999 y = - 4500**

$\lim_{x\to 3^+} \frac{3x}{x^2-4x+3} = \infty$ **ya que para x = 3,001 y = 4499**

Por tanto x = 3 es una asíntota vertical

A. Horizontales:

$\lim_{x\to -\infty} f(x) = \lim_{x\to -\infty} e^x = 0$ **luego y = 0 es A.H. por la izquierda.**

$\lim_{x\to \infty} f(x) = \lim_{x\to \infty} \frac{3x}{x^2-4x+3} = 0$ **luego y = 0 es también A.H. por la nioderecha. L función no tiene asíntotas oblicuas porque tiene horizontales por ambos lados.**

EJERCICIO 2 Desarrollamos: f(x) = x(25 + x^2 – 10x) = x^3 – 10x^2 + 25x

a) **f' (x) = 3x^2 – 20x + 25 = 0 si x = 5 , x = 5/3**

+	5/3	-	5	+	f '
↗	5/3	↘	5	↗	f

Máximo (5/3 , 500/27) Mínimo (5 , 0)

b) **f '' (x) = 6x – 20 = 0 si x = 20/6 = 10/3**

-	10/3	+	f''
∩	10/3	∪	f

Punto inflexión (10/3 , 250/27)

EJERCICIO 3 Sean x e y los números buscados; x^2y = 4 y hay que buscar el mínimo de la función S = x + y .De la condición anterior, y = 4/x^2 de donde la función S puede ponerse como S(x) = x + $\frac{4}{x^2} = \frac{x^3+4}{x^2}$ **. El dominio de la función es R – {0}**

S’ (x) = $\frac{3x^2x^2-2x(x^3+4)}{x^4} = \frac{x^4-8x}{x^4} = \frac{x^3-8}{x^3}$; S ‘ (x) = 0 si x = 2

+ O 0 - I 2 + S ‘

O 0 I 2

Mínimo si x = 2. Los números son x = 2 e y = 1

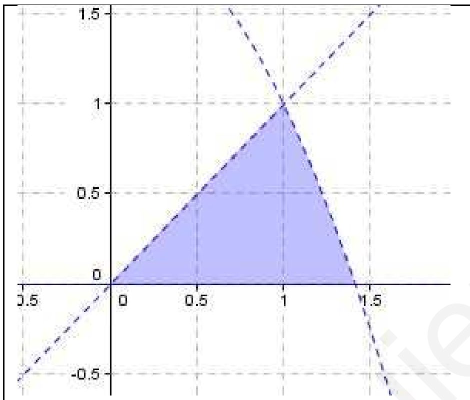
EJERCICIO 4

a) Al efectuar la división de los polinomios, el cociente es 2x – 1 y el resto -2 .

$\frac{2x^2+x-3}{x+1} = \frac{(2x-1)(x+1)-2}{x+1}$ = 2x – 1 - $\frac{2}{x+1}$

Así pues $\int \frac{2x^2+x-3}{x+1}$ dx = $\int (2x-1)dx$ – 2 $\int \frac{dx}{x+1}$ = x^2 - x – 2 ln| x + 1| + C

b)



ÁREA = $\int_0^1 x dx + \int_1^{\sqrt{2}} (2-x^2)dx$ =

$\frac{x^2}{2} |_0^1$ + (2x - $\frac{x^3}{3}$)$|_1^{\sqrt{2}}$ =

$\frac{1}{2} + \frac{4\sqrt{2}}{3} - \frac{5}{3} = \frac{8\sqrt{2}-7}{6}$

EJERCICIO 5

Rectas paralelas tienen l misma pendiente luego y’ = $3x^2$ – 2 = 1 de donde x =1 y x = -1 . Los puntos son (1, 1) y (-1 , 3)

OPCIÓN B

EJERCICIO 1

y = ax^3 + bx^2 + cx   x = 2 y = 1   1 = 8a + 4b + 2c

y’ = $3ax^2$ + 2bx + c   x=2 y’ = 0   0 = 12a + 4b + c

y ‘’ = 6ax + 2b   x=2/3 y’’=0 0 = 4a + 2b

De la últim ecuación b = - 2a ; sustituimos en las dos primeras el valor de b

1 = 8a – 8a + 2c ; c = ½

0 = 12a – 8a + ½ ; 4a + ½ = 0 ; 4a = -1/2 ; a = -1/8 b = 2/8 = ¼

EJERCICIO 2

f(x) = $\begin{cases} \frac{x^2}{8} + \frac{7x}{4} & \text{si } x < 2 \\ \frac{ax^2+b}{x} & \text{si } x \geq 2 \end{cases}$

Para que f(x) sea derivable en x = 2 ha de ser en primer lugar continua

$\lim_{x\to 2^-} f(x) = \lim_{x\to 2^+} f(x)$ **;** $\lim_{x\to 2} \frac{x^2}{8} + \frac{7x}{4}$ **=** $\lim_{x\to 2} \frac{ax^2+b}{x}$

$\frac{4}{8} + \frac{14}{4} = \frac{4a+b}{2}$; $\frac{1}{2} + \frac{7}{2} = \frac{8}{2} = \frac{4a+b}{2}$ **; tenemos 4a + b = 8**

f' (x) = $\begin{cases} \frac{x+7}{4} & \text{si } x < 2 \\ \frac{ax^2-b}{x^2} & \text{si } x \geq 2 \end{cases}$

$\lim_{x\to 2^-} f'(x) = \lim_{x\to 2^+} f'(x)$; $\lim_{x\to 2} \frac{x+7}{4}$ **=** $\lim_{x\to 2} \frac{ax^2-b}{x^2}$

$\frac{9}{4} = \frac{4a-b}{4}$ **;** **9 = 4a –** b

$8 = 4a + b$

17 = 8a ; a = 17/8 b = 8 – 4a = - 4/8 = -1/2

Para x = - 1 y = - 13/8 y ‘ = m = 6/4 = 3/2 y + 13/8 = 1,5 (x + 1)

EJERCICIO 3 f(x) = $\frac{x^2+2}{2x+1}$

D = R – ½

Corte eje X : y = 0 ; x^2 + 2 = 0 ; no hay solución luego no corta

Corte eje Y: x = 0 y = 2

Asíntota vertical x = - ½

$\lim_{x\to -1/2^-} \frac{x^2+2}{2x+1}$ **= - ∞ ya que para x = - 0,5001 y = -135000**

$\lim_{x\to +} \frac{x^2+2}{2x+1}$ **= +∞ ya que para x = - 0.499 y = 1124**

Asíntota horizontal : No hay

$\lim_{x\to\pm\infty} \frac{x^2+2}{2x+1}$ **=** $\lim_{x\to\pm\infty} \frac{x^2}{2x}$ **=** $\lim_{x\to\pm\infty} \frac{x}{2}$ **= ±∞**

Asíntota oblicua: y = mx + n

m = $\lim_{x\to\pm\infty} \frac{x^2+2}{2x^2+x} = \frac{1}{2}$ **n =** $\lim_{x\to\pm\infty} \frac{x^2+2}{2x+1} - \frac{x}{2} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{2(x^2+2)}{2(2x+1)} - \frac{x(2x+1)}{2(2x+1)}$

$$= \lim_{x\to\pm\infty} \frac{2x^2+4-2x^2-x}{4x+2} = -\frac{1}{4} \qquad y = \frac{1}{2}x - \frac{1}{4}$$

$$Y' = \frac{2x(2x+1)-2(x^2+2)}{(2x+1)^2} = \frac{2x^2+2x-4}{(2x+1)^2}$$

El numerador se anula si x = 1 y si x = - 2 . El denominador se anula si x = - 0,5

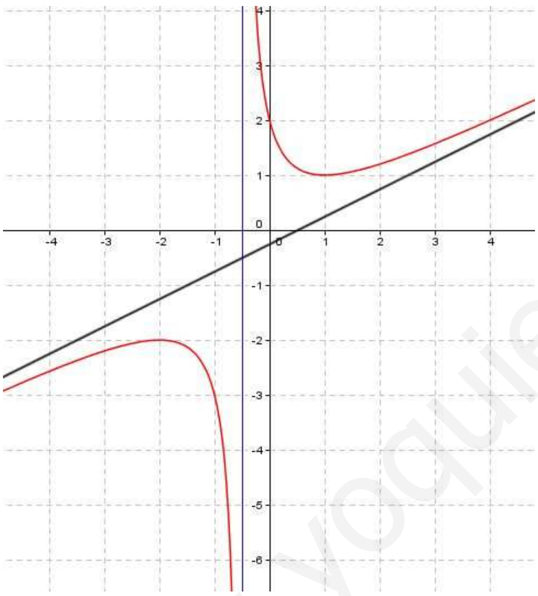
y'

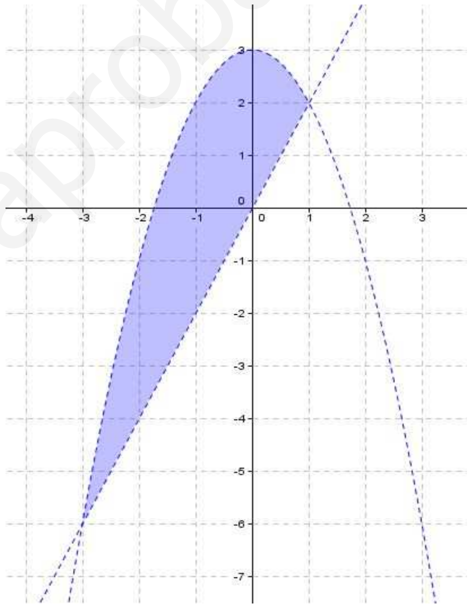
+ -2 - -0,5 - 1 +

-2 -0,5 1 y

Máximo relativo (- 2 , - 2) Mínimo relativo (1,1)

EJERCICIO 4





Calculamos los cortes: $3 - x^2 = 2x$: $0 = x^2 + 2x - 3$; x = -3 x = 1

ÁREA = $\int_{-3}^{1}(3 - x^2 - 2x)dx = 3x - \frac{x^3}{3} - x^2\Big|_{-3}^{1}$ **= 5/3 + 9 = 32/3**

EJERCICIO 5

a) **Como $x^2 + 4 > 0$, el dominio de la función es R :** $\lim_{x\to\infty} \frac{x}{\sqrt{x^2+4}} = 1$

b) $\int \frac{x\,dx}{\sqrt{x^2+4}} = \frac{1}{2}\int \frac{du}{\sqrt{u}} = \frac{1}{2}\int u^{-1/2}du = u^{1/2} + C = \sqrt{x^2+4} + C$

$u = x^2 + 4$ du = 2xdx xdx =du/2