Opción A

Fecha: 23 Noviembre 2012

Alumno...

Ejercicio nº 1.-

a) Resuelve el siguiente sistema, utilizando el método de Gauss:

$$\left.\begin{array}{r} 2x-y+z=3 \\ 3x+y-z=-3 \\ x-3y+3z=9 \\ 2x+4y-4z=-12 \end{array}\right\}$$

Solución:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & 1 & 3 \\ 3 & 1 & -1 & -3 \\ 1 & -3 & 3 & 9 \\ 1 & 2 & -2 & -6 \end{array}\right) \xleftrightarrow[E4+2E1]{\substack{E1+E2 \\ E3-3E1}} \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & 1 & 3 \\ 5 & 0 & 0 & 0 \\ -5 & 0 & 0 & 0 \\ 5 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \xleftrightarrow[E4-E2]{E3+E2} \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & 1 & 3 \\ 5 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Rango A = rango A^* = 2 < nº incógnitas = 3 ⟺ el sistema es compatible e indeterminado

$$\left.\begin{array}{r} 2x-y+z=3 \\ 5x=0 \end{array}\right\} \Leftrightarrow \{x=0,\ \ y\in R,\ \ z=3+y$$

b) En una residencia de estudiantes se compran semanalmente 110 helados de distintos sabores: vainilla, chocolate y nata. El presupuesto destinado para esta compra es de 540 euros y el precio de cada helado es de 4 euros el de vainilla, 5 euros el de chocolate y 6 euros el de nata. Conocidos los gustos de los estudiantes, se sabe que entre helados de chocolate y de nata se han de comprar el 20% más que de vainilla.

Calcula cuántos helados de cada sabor se compran a la semana.

Solución:

x = nº helados de vainilla, y = nº helados de chocolate, z = nº helados de nata

$$\left.\begin{array}{r} x+y+z=110 \\ 4x+5y+6z=540 \\ y+z=1'2x \end{array}\right\} \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{r} x+y+z=110 \\ 4x+5y+6z=540 \\ 6x-5y-5z=0 \end{array}\right. \xleftrightarrow[E3-6E1]{E2-4E1} \left\{\begin{array}{r} x+y+z=110 \\ y+2z=100 \\ -11y-11z=-660 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{r} x+y+z=110 \\ y+2z=100 \\ y+z=60 \end{array}\right. \xleftrightarrow{E2-E3}$$

$$\left\{\begin{array}{r} x+y+z=110 \\ y+2z=100 \\ z=40 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} x=50 \\ y=20 \\ z=40 \end{array}\right.$$

Compran 50 helados de vainilla, 20 de chocolate y 40 de nata.

Ejercicio nº 2.-

a) Maximiza la función *z* = 3*x* + 2*y*, sujeta a estas restricciones:

$$\left\{\begin{array}{c} 50\le x+y\le 150 \\ y\le x \\ 0\le x\le 100 \\ y\ge 0 \end{array}\right.$$

b) Minimiza la función w = 2x+2y, sujeta a las restricciones anteriores.

Solución:

a) Como puede verse en la figura 1, la función z = 3x + 2y alcanza el valor máximo de 400 en el punto C (100, 50) del conjunto de soluciones factibles. Solución óptima: x = 100, y = 50

b) Como puede verse en la figura 2, la función w = 2x + 2y alcanza el mínimo en todos los puntos del segmento AE:

x	25	…	50
y = 50 - x	25	…	0

Es decir, los puntos :P(x, 50-x), siendo $25\le x\le 50$

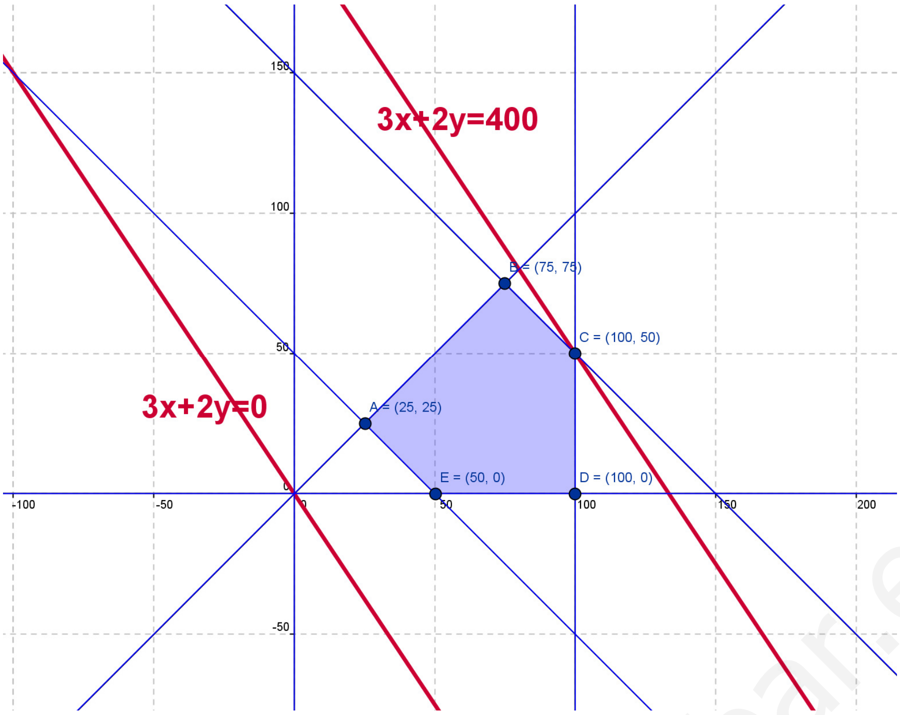


Figura 1

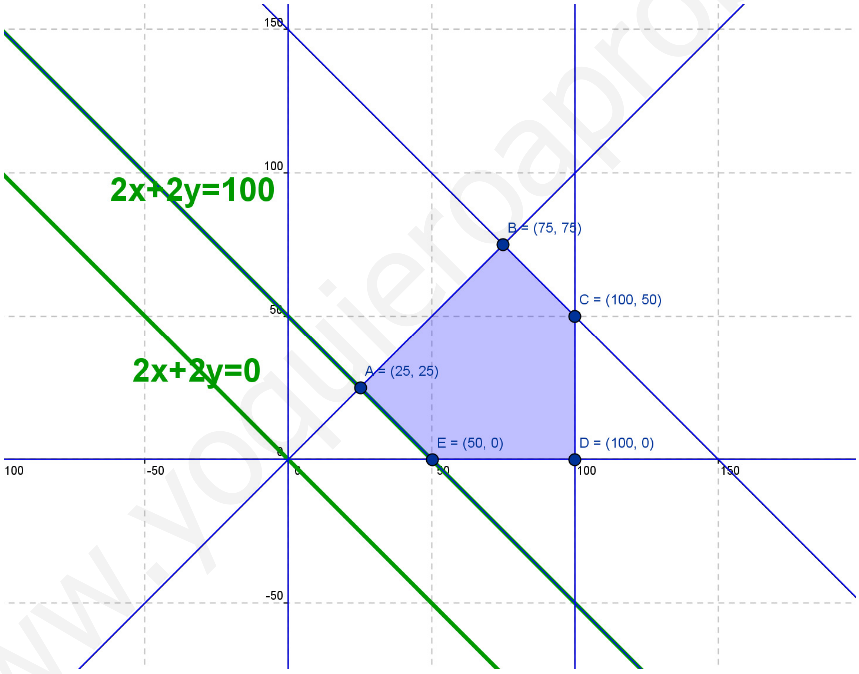


Figura 2

Ejercicio nº 3.-

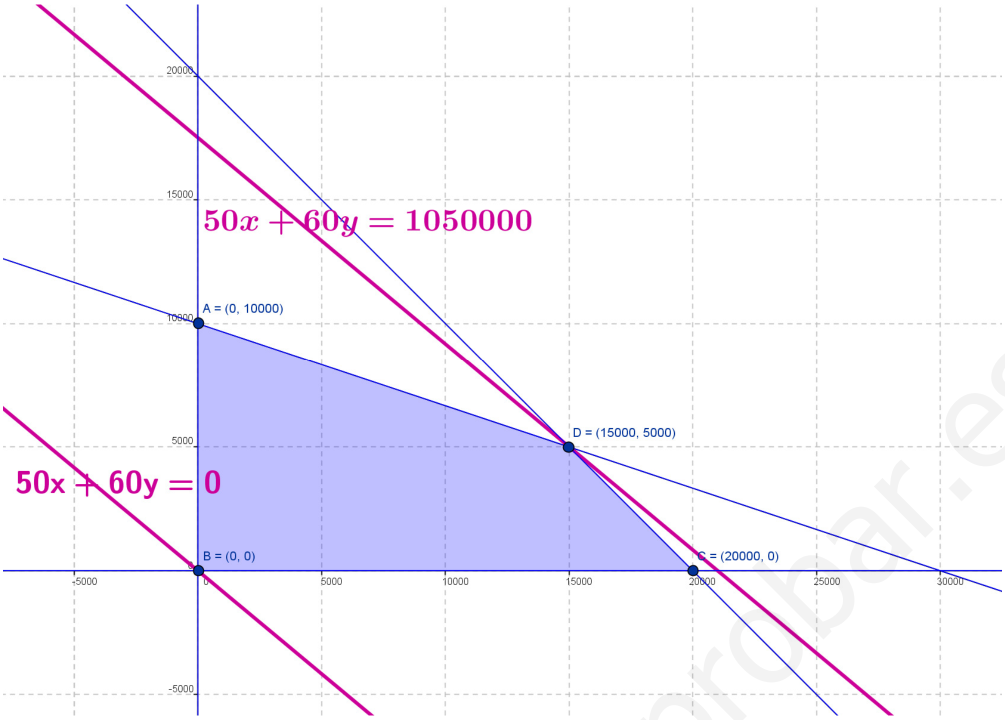
Una fábrica de papel tiene almacenados 4 000 kilos de pasta de papel normal, *A*, y 3 000 kilos de pasta de papel reciclado, *B*. La fábrica produce dos tipos diferentes de cajas de cartón. La caja de tipo 1 está fabricada con 0,2 kilos de *A* y 0,1 kilos de *B*, mientras que la caja del tipo 2 está fabricada con 0,2 kilos de *A* y 0,3 kilos de *B*. El precio de la caja de tipo 1 es de 50 euros/unidad y el precio de la caja de tipo 2 es de 60 euros/unidad. ¿Cuántas cajas de cada clase ha de elaborar la fábrica para maximizar sus ventas?

Solución:

	número	P.normal A	P. reciclado B	Ventas en €
Caja 1	x	0’2x	0’1x	50x
Caja 2	y	0’2y	0’3y	60y

Debemos determinar los pares (x, y) que maximicen las ventas, 50x + 60y, sujetos a las siguientes restricciones:

$$\begin{cases} 0'2x + 0'2y \leq 4000 \\ 0'1x + 0'3y \leq 3000 \\ x, y \in Naturales \end{cases}$$



En el gráfico anterior aparece el conjunto de soluciones factibles coloreado en azul. Podemos comprobar que el valor máximo de las ventas, 1.050.000 €, se consigue en el punto D (15000, 5000). Por lo que se deben fabricar 15.000 cajas tipo 1 y 5.000 cajas tipo 2.

Ejercicio nº 4.-

Determina la matriz *X* que verifica la ecuación $(\boldsymbol{A^2 - A}) \cdot \boldsymbol{X} = \boldsymbol{B}$ donde:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \; y \; B = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 1 & 3 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

Justifica la respuesta.

Solución:

$$A^2 = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -2 \\ 4 & 1 & -2 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix}, \qquad A^2 - A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 2 & 0 & -2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \qquad (A^2 - A)^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ -1 & \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{-1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

$$(A^2 - A) \cdot X = B \Leftrightarrow (A^2 - A)^{-1} \cdot (A^2 - A) \cdot X = (A^2 - A)^{-1} \cdot B \Leftrightarrow X = (A^2 - A)^{-1} \cdot B$$

$$X = \begin{pmatrix} 1/2 & 0 & 1/2 \\ -1 & 1/2 & 0 \\ 1/2 & -1/2 & 1/2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 1 & 3 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1/2 \\ -3/2 & 5/2 & -1/2 \\ 1/2 & -3/2 & 0 \end{pmatrix}$$

Opción B

Fecha: 23 Noviembre 2012

Alumno………

Ejercicio nº 1.-

Estudia el siguiente sistema homogéneo, según los valores del parámetro *m*; y resuélvelo en los casos en los que resulte ser compatible indeterminado:

$$\begin{cases} x+3y+2z=0 \\ x+my+2z=0 \\ 2x+(3+m)y+4z=0 \end{cases}$$

Solución:

$$\begin{vmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 1 & m & 2 \\ 2 & m+3 & 4 \end{vmatrix} = 4m+2m+6+12-4m-2m-6-12=0\ \forall m \Leftrightarrow rango\ A<3$$

$$para\ todo\ valor\ de\ m \Leftrightarrow El\ sistema\ es\ compatible\ e\ indeterminado\ \forall m$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 1 & m & 2 \\ 2 & m+3 & 4 \end{pmatrix} \overset{F2-F1}{\underset{F3-2F1}{\Longleftrightarrow}} \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 0 & m-3 & 0 \\ 0 & m-3 & 0 \end{pmatrix} \overset{F3-F2}{\Longleftrightarrow} \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 0 & m-3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Si m = 3 $\Leftrightarrow rgA=1 \Leftrightarrow Sistema\ compatible\ e\ indeterminado$ **x+3y+2z=0** $\Leftrightarrow x=-3y-2z, y,z\in R$

Si $m\neq 3 \Leftrightarrow rgA=2 \Leftrightarrow Sistema\ compatible\ e\ indeterminado \Leftrightarrow \begin{Bmatrix} x+3y+2z=0 \\ (m-3)y=0 \end{Bmatrix} \Leftrightarrow \begin{Bmatrix} x=-2z \\ y=0 \\ z\in R \end{Bmatrix}$

Ejercicio nº 2.-

a) Estudia para qué valores de a existe la inversa de la siguiente matriz:

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & 0 & 2 \\ 2 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

b) Calcula la matriz inversa de A para a = 0.

Solución:

a) $|A| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & 0 & 2 \\ 2 & -1 & 0 \end{vmatrix} = -a+6$

$Si\ |A|=0 \Leftrightarrow a=6 \Leftrightarrow rango\ A<3 \Leftrightarrow A\ no\ tiene\ inversa$

$Si\ |A|\neq 0 \Leftrightarrow a\neq 6 \Leftrightarrow rango\ A=3 \Leftrightarrow A\ tiene\ inversa$

b) $a=0 \Rightarrow A=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \\ 2 & -1 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow |A|=6$

$$\begin{Bmatrix} A_{11}=2 & A_{21}=-1 & A_{31}=2 \\ A_{12}=4 & A_{22}=-2 & A_{32}=-2 \\ A_{13}=0 & A_{23}=3 & A_{33}=0 \end{Bmatrix} \Rightarrow A^{-1}=\frac{1}{6}\cdot\begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 4 & -2 & -2 \\ 0 & 3 & 0 \end{pmatrix}$$

Ejercicio nº 3.-

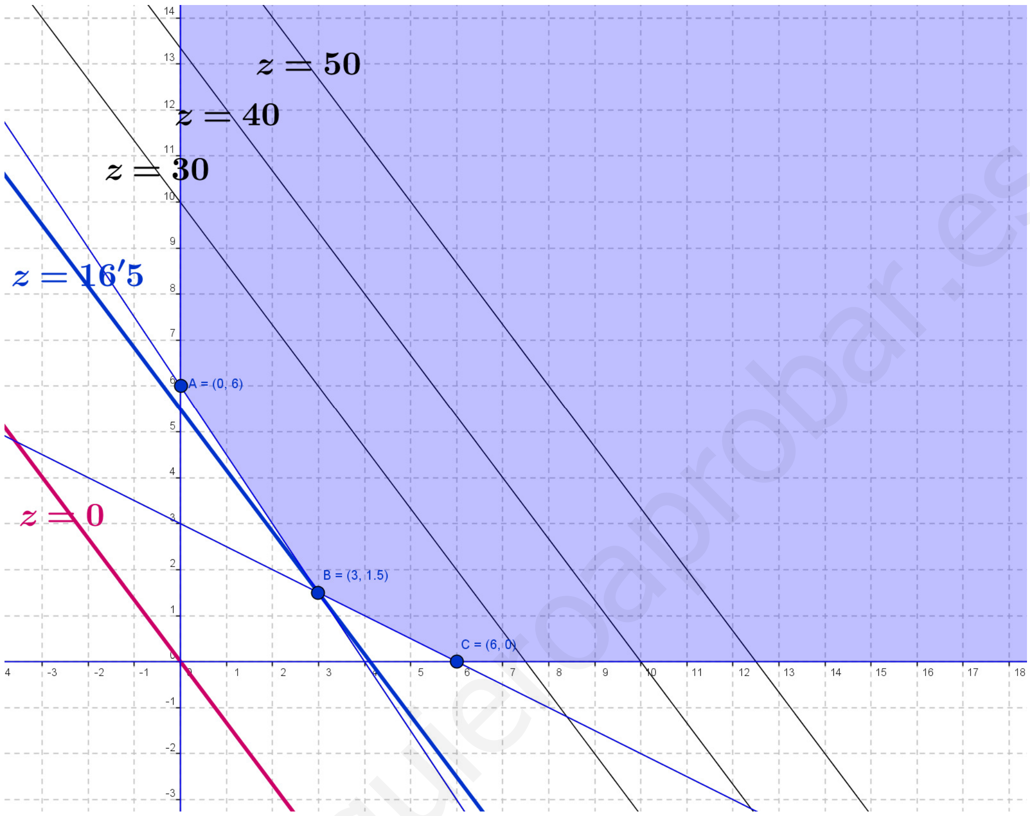
Representa la región del plano delimitada por:

$$\begin{cases} x + 2y \geq 6 \\ 3x + 2y \geq 12 \\ x \geq 0 \\ y \geq 0 \end{cases}$$

¿Es posible maximizar y minimizar la función *z* = 4*x* + 3*y* en ella? Razona la respuesta y, en caso afirmativo, indica en qué puntos se consiguen el máximo y el mínimo**.**

Solución:

Resolvemos el sistema de restricciones y obtenemos el conjunto de puntos del recinto sombreado en azul de la siguiente figura:



Representamos la función z = 0. Se observa que la primera paralela a ella que corta al conjunto de soluciones factibles es la que pasa por el punto B (3, 1'5) y que no existe una última paralela que corte al conjunto de soluciones factibles. Por lo tanto, podemos minimizar z = 4x + 3y en x = 3, y = 1'5 y no podemos maximizar z.

<u>Ejercicio nº 4.-</u>

Se desea fabricar dos tipos de bombones que llamaremos *A* y *B*. Las cajas de tipo *A* contienen 1 kg de chocolate y 2 kg de cacao; las de tipo *B* contienen 2 kg de chocolate, 1 kg de cacao y 1 kg de almendras. Por cada caja del tipo *A* se ganan 2 euros y por cada caja del tipo *B*, 3 euros. Se dispone de 500 kg de chocolate, 400 kg de cacao y 225 kg de almendras.

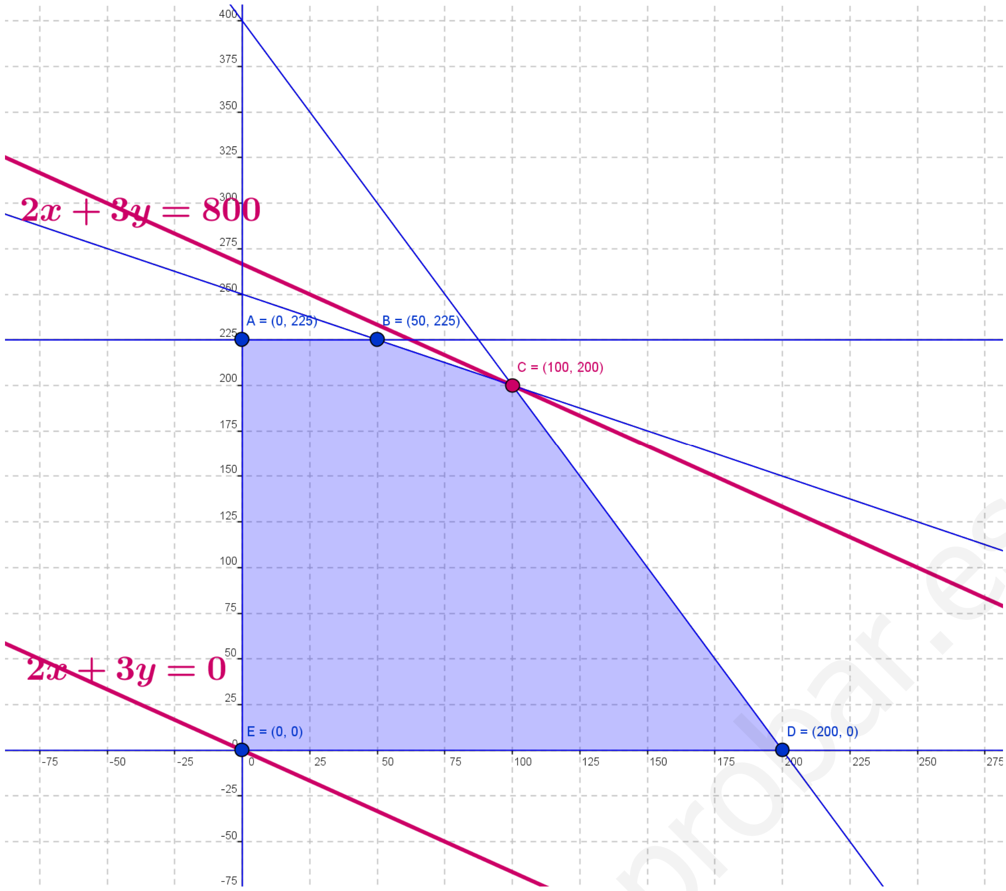
¿Cuántas cajas de cada tipo hay que fabricar para que la ganancia sea máxima?

Solución:

	número	**Kilos de chocolate**	**Kilos de cacao**	**Kilos de almendras**	**Beneficio en €**
Tipo A	**x**	**x**	**2x**	**0**	**2x**
Tipo B	**y**	**2y**	**y**	**y**	**3y**

Queremos determinar los pares (x, y) sujetos a las restricciones: $\begin{cases} x + 2y \leq 500 \\ 2x + y \leq 400 \\ y \leq 225 \\ x, y \in Naturales \end{cases}$ y que maximicen el beneficio

B(x,y) = 2x+3y.



Se puede comprobar que la solución óptima se consigue con x = 100 cajas del tipo A, y = 200 cajas del tipo B para obtener un beneficio máximo de 800 euros.