Matemáticas C.C.S.S. Repaso de Selectividad

1. Se desea obtener dos elementos químicos a partir de las sustancias A y B. Un kilo de A contiene 8 gramos del primer elemento y 1 gramo del segundo; un kilo de B tiene 4 gramos del primer elemento y 1 gramo del segundo. Se desea obtener, como mínimo, 24 gramos del primer elemento, la cantidad del segundo ha de ser como mucho 10 gramos y la cantidad de B utilizada debe ser, como mucho, el cuádruple que la de A.

Si un kilo de A vale 10 € y uno de B vale 4 €:

(a) Plantea un problema para determinar las cantidades de A y B que se deben comprar para minimizar los costes globales.

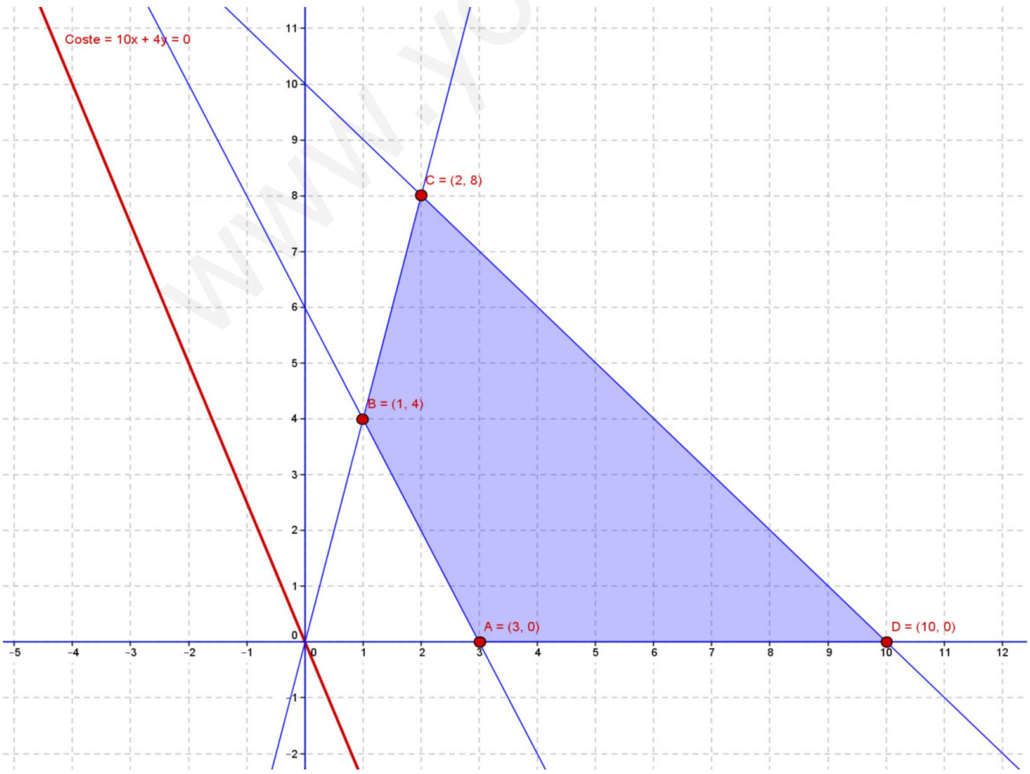
(b) Dibuja la región factible y encuentra una solución óptima para el problema anterior.

(c) Si el kilo de A vale 10 € y el de B cuesta 5 €, ¿cambia la solución óptima del problema? Razona la respuesta.

Solución: (a)

	Nº de Kg	Nº g de E1	Nº g de E2	Coste en €
A	**x**	**8x**	**x**	**10x**
B	**y**	**4y**	**y**	**4y**

Restricciones: $\begin{cases} 8x+4y \geq 24 \\ x+y \leq 10 \\ y \leq 4x \\ x \geq 0 \,; y \geq 0 \end{cases}$ Función objetivo a minimizar: $\boldsymbol{Coste = 10x + 4y}$ €



(b) Determinamos el coste en cada uno de los vértices de la región factible obteniéndose:

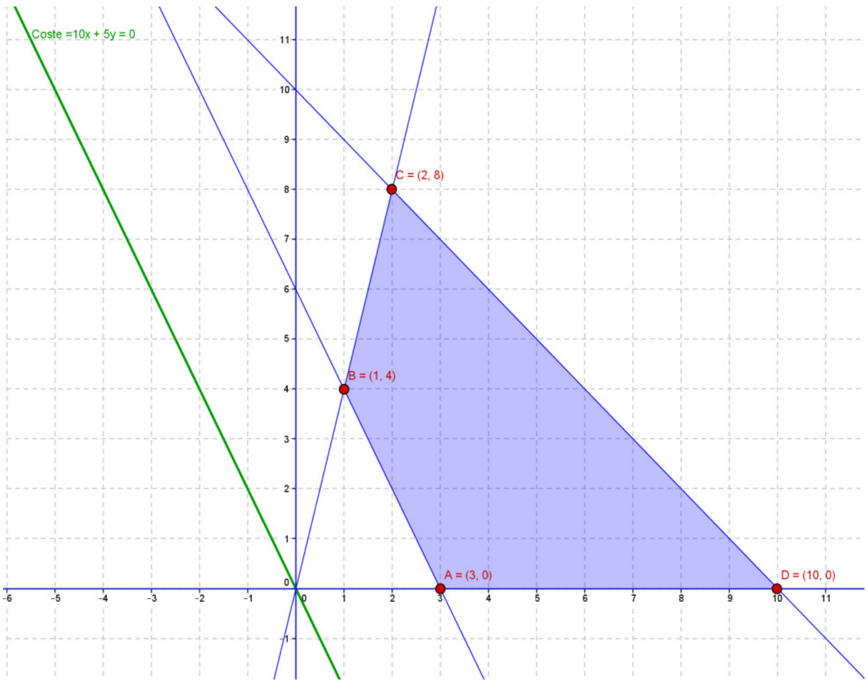
Coste en A(3,0) = 30 €

Coste en B(1,4) = 26€

Coste en C(2,8) = 52 €

Coste en D(10,0) = 100 €

Esto significa que la solución óptima para minimizar el coste es comprar 1 kilo de A y 4 kilos de B.



(c) Determinamos el nuevo coste (10x + 5y) en cada uno de los vértices de la región factible obteniéndose:

Coste en A(3,0) = 30 €

Coste en B(1,4) = 30€

Coste en C(2,8) = 60 €

Coste en D(10,0) = 100 €

Esto significa que las soluciones óptimas se obtienen en todos los puntos del segmento AB.

2. Un camión trae, en su carga, cajas de tres productos A, B y C. Se ha perdido la hoja de carga, pero uno de los operarios recuerda que en total hay 120 cajas, que las del tipo A eran tantas como las del tipo B y C juntas y que las del tipo C eran la cuarta parte de las del tipo B.

(a) ¿Cuántas cajas de cada tipo trae el camión?

(b) Otro operario dice que del tipo A eran 12 más que del tipo B. Comprueba si esta información se contradice con las del primer operario.

Solución: (a)

Nº de cajas del tipo A = x ; Nº de cajas del tipo B = y ; Nº de cajas del tipo C = z

$$\begin{cases} x+y+z=120 \\ x=y+z \\ z=\dfrac{y}{4} \end{cases} \Leftrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 120 \\ 1 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -4 & 0 \end{array}\right) \overset{E2+E1}{\underset{-E3+E1}{\Longleftrightarrow}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 120 \\ 2 & 0 & 0 & 120 \\ 1 & 0 & 5 & 120 \end{array}\right)$$

$$\begin{Bmatrix} x+y+z=120 \\ 2x=120 \\ x+5z=120 \end{Bmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 48 \text{ cajas tipo } B \\ x = 60 \text{ cajas tipo } A \\ z = 12 \text{ cajas tipo } C \end{cases}$$

(b) y + 12 = 48 + 12 = 60 = x , por lo tanto no contradice las condiciones anteriores.

3. **(a)** Sean $A=\begin{pmatrix} 3 & x \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} -1 & 4 \\ y & 3 \end{pmatrix}$ y $C=\begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 9 & z \end{pmatrix}$. Determina los valores x, y, z para que se verifique la ecuación matricial $A \cdot B' = C + I$, siendo B' la traspuesta de B e I la identidad de orden 2.

(b) Despeja la matriz X en la siguiente ecuación matricial: $7I - 2X + AX = B$, suponiendo que todas las matrices son cuadradas del mismo orden.

(c) Si $A = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 7 & 1 \end{pmatrix}$, calcula la matriz X que cumple $A \cdot X = I$.

Solución: (a)

$$\begin{pmatrix} 3 & x \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 & y \\ 4 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 9 & z \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} -3+4x & 3y+3x \\ 9 & -y+6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 9 & z+1 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} -3+4x = 1 \\ 3y+3x = 3 \\ -y+6 = z+1 \end{cases}$$

Resolviendo las ecuaciones anteriores obtenemos: x = 1, y = 0, z = 5.

(b) $\boldsymbol{7I - 2X + AX = B \Leftrightarrow 7I - 2IX + AX = B \Leftrightarrow AX - 2IX = B - 7I \Leftrightarrow (A-2I)X = B - 7I \Leftrightarrow}$

$$(A-2I)^{-1} \cdot (A-2I)X = (A-2I)^{-1} \cdot (B-7I) \Leftrightarrow X = (A-2I)^{-1} \cdot (B-7I)$$

(c) La matriz X que buscamos es, si existe, la inversa de A.

$$(A|I_2) = \left(\begin{array}{cc|cc} 3 & 0 & 1 & 0 \\ 7 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right) \leftrightarrow \left(\begin{array}{cc|cc} 3 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & -7 & 3 \end{array}\right) \leftrightarrow \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 1 & \frac{-7}{3} & 1 \end{array}\right) \leftrightarrow (I_2|A^{-1})$$

4. Considera las matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ $y\ C = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 4 & 2 & 2 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

(a) Calcula la matriz inversa de A.

(b) ¿Cuántas filas y cuántas columnas ha de tener una matriz D para que la ecuación A . D = B tenga solución? Resuelve dicha ecuación.

(c) Estudia el rango de la matriz C.

(d) Utilizando los apartados a) y c), resuelve el sistema lineal $(A \cdot C) \cdot X = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

Solución: (a) $(A|I_3) = \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xleftrightarrow{F2-F1} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xleftrightarrow{F3-F2}$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & -1 & 1 \end{array}\right) \xleftrightarrow{2F2+F3} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & -1 & 1 \end{array}\right) \xleftrightarrow{2F1+F2} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & 0 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & -1 & 1 \end{array}\right)$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1/2 & 1/2 & 1/2 \\ 0 & 1 & 0 & 1/2 & -1/2 & -1/2 \\ 0 & 0 & 1 & 1/2 & -1/2 & 1/2 \end{array}\right) \leftrightarrow (I_3|A^{-1})$$

(b) Para que se pueda multiplicar $A \cdot D$, D tiene que tener tres filas, que son el número de columnas de A. Para que el resultado del producto sea B, D tiene que tener dos columnas, el número de columnas de B.

$$A \cdot D = B \Leftrightarrow A^{-1} \cdot A \cdot D = A^{-1} \cdot B \Leftrightarrow I_3 \cdot D = A^{-1} \cdot B \Leftrightarrow D = A^{-1} \cdot B$$

$$D = A^{-1} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

(c) $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 4 & 2 & 2 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xleftrightarrow{F2-2F1} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow rango\ C = 2$

(d) $A \cdot C \cdot X = O \Leftrightarrow A^{-1} \cdot A \cdot C \cdot X = O \Leftrightarrow C \cdot X = O,$ Como rango C = 2, el sistema es compatible e indeterminado.

$$\begin{cases} 2x + y + z = 0 \\ x = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = -z \\ x = 0 \\ z \in R \end{cases}$$

5. La energía que produce una placa solar viene descrita por la siguiente curva en función del tiempo transcurrido desde que amanece (f(x) representa la energía producida a las x horas de haber amanecido):

$$f(x) = \begin{cases} 10x - x^2 \ \ si\ \ 0 \le x \le 8 \\ \dfrac{1024}{x^2}\ si\ 8 < x \le 12 \end{cases}$$

(a) Estudia la continuidad de la función en su dominio.

(b) ¿En qué momento del día la placa produce más energía? ¿Cuánto produce en ese momento?

Solución: (a) f(x) es continua en (0,8) y (8,12) por su definición. Estudiaremos la continuidad de f(x) en x= 8.

$$\left\{ \begin{array}{c} f(8) = 80 - 64 = 16 \\ \lim\limits_{x\to 8^-} (10x - x^2) = 16 \\ \lim\limits_{x\to 8^+} \dfrac{1024}{64} = 16 \end{array} \right\} \Leftrightarrow f\ continua\ en\ x = 8$$

(b) $f'(x) = \begin{cases} 10 - 2x, 0 < x < 8 \\ \frac{-2048}{x^3},\ \ 8 < x < 12 \end{cases}$

F(x) No es derivable en x = 8 pues $f'_-(8) = -6 \neq -4 = f'_+(8)$

$f'(x) = 0 \Rightarrow 10 - 2x = 0 \Rightarrow x = 5$

$f'(x) > 0\ en\ (0,5); f'(x) < 0\ en\ (5,8) y\ (8,12) \Longrightarrow x = 5\ máximo\ relativo.$

La placa produce más energía a las 5 horas de haber amanecido, y dicha energía asciende a 25 unidades.

6. Dada la función $f(x) = \frac{(x-3)^2}{x-1}$, determina:

(a) El dominio y los puntos de corte con los ejes.

(b) Las asíntotas.

(c) Intervalos de monotonía y extremos.

(d) Intervalos de concavidad y puntos de inflexión.

(e) Con los datos anteriores, dibuja su gráfica.

Solución: (a) $\boldsymbol{Domf = R - \{1\}}$

Si y = f(x) = 0 $\Longrightarrow x - 3 = 0 \Longrightarrow x = 3 \Longrightarrow Pasa\ por\ (3,0)$

Si x = 0 $\Longrightarrow y = -9 \Longrightarrow Pasa\ por\ (0,-9)$

(b) Asíntotas verticales:

$\lim\limits_{x\to 1^-} f(x) = -\infty, \quad \lim\limits_{x\to 1^+} f(x) = \infty \Rightarrow La\ recta\ x = 1\ es\ asíntota\ vertical$

Asíntotas horizontales: No tiene, pues: $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty\ y\ \lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$

Asíntotas oblicuas:

$m = \lim_{x\to+\infty} \frac{(x-3)^2}{x(x-1)} = 1, n = \lim_{x\to+\infty}\left(\frac{(x-3)^2}{(x-1)} - x\right) = \lim_{x\to+\infty} \frac{-5x+9}{(x-1)} = -5 \Longrightarrow$ La recta y = x - 5 es asíntota oblicua.

(c) $\boldsymbol{f'(x) = \frac{x^2-2x-3}{(x-1)^2}\ ; f'(x) = 0 \Rightarrow x^2 - 2x - 3 = 0 \Longrightarrow x = 3, x = -1}$

Intervalo	**x<-1**	**-1<x<1**	**1<x<3**	**3<x**
Signo de f'(x)	**positiva**	**negativa**	**negativa**	**positiva**
Monotonía de f(x)	**creciente**	**decreciente**	**decreciente**	**creciente**

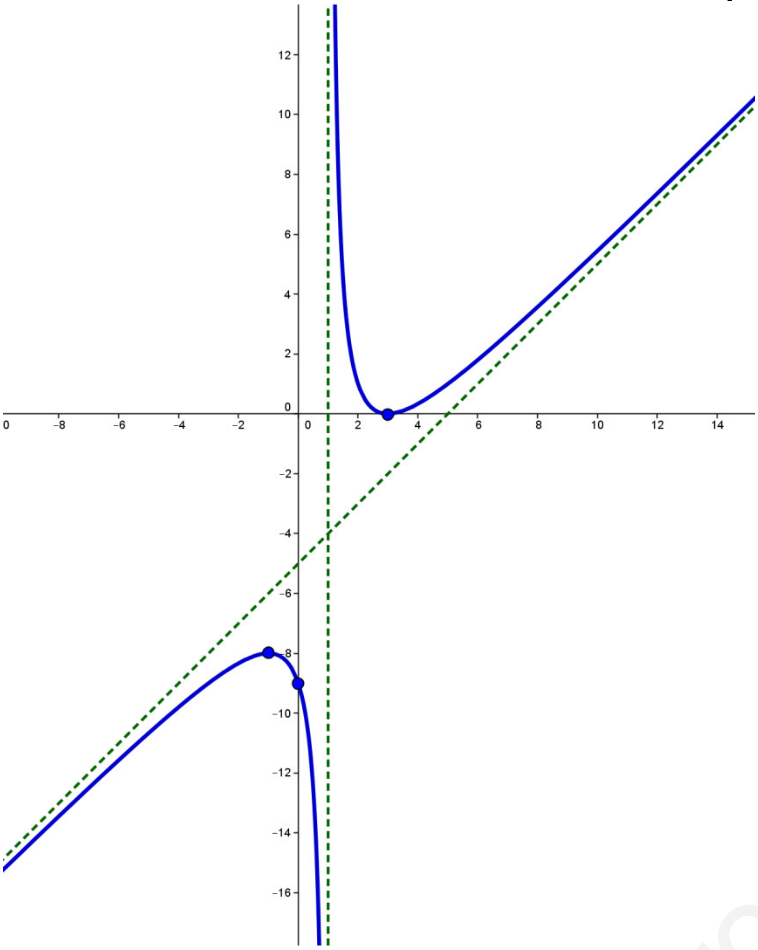
En (-1,8) presenta un máximo relativo y en (3,0) presenta un mínimo relativo.

(d) $\boldsymbol{f''(x) = \frac{8}{(x-1)^3}\ ; f''(x) \neq 0}$

Intervalo	**x<1**	**x>1**
Signo de f''(x)	**negativa**	**positiva**
Concavidad de f(x)	**Cóncava hacia abajo**	**Cóncava hacia arriba**

No hay puntos de inflexión.

(e) Gráfica:



7. La ganancia producida por una máquina que ha durado 6 años se estima por la función:

$f(x) = ax^3 + bx^2, 0 \leq x \leq 6$. (f(x) representa la ganancia en miles de euros a los x años de funcionamiento).

(a) Determina el valor de a y b sabiendo que el punto (2,32) es de inflexión.

(b) Si a = -2 y b= 12, calcula el año en que la máquina ha producido la mayor ganancia. ¿Cuál ha sido el valor de dicha ganancia? Para estos valores, representa la gráfica de la función en [0,6].

Solución: (a) (2,32) es de la gráfica, por lo tanto f(2)=32 ⟹8a + 4b = 32

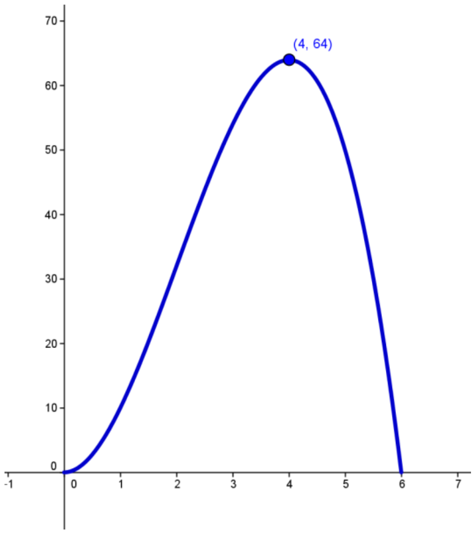
Como x=2 es de inflexión ⇒f''(2)=0. Siendo f''(x)= 6ax +2b deducimos: 12a + 2b =0

Resolviendo el sistema formado por las dos ecuaciones que hemos obtenido: a = -2 y b=12.

(b) $\boldsymbol{f(x) = -2x^3 + 12x^2, 0 \leq x \leq 6.}$ Para determinar los extremos relativos, igualamos a cero la derivada: $f'(x) = -6x^2 + 24x = 0 \Rightarrow x = 0, x = 4$

Intervalo	**0≤x<4**	**4<x≤6**
Signo de f'(x)	**positiva**	**negativa**
Monotonía de f(x)	**creciente**	**decreciente**

(x=4,f(4)=64) es un máximo relativo y también el absoluto en el intervalo [0,6] de definición, pues f(0)=0 y f(6)=0. La máquina ha producido la mayor ganancia en el cuarto año, y esta ascendió a 64000 €.



8. En un entorno controlado, el tamaño de una población de aves, P(t) (en cientos), se ajusta a la función:

$$P(t)=\begin{cases} t^2-8t+50, & 0\le t\le 10 \\ 95-\frac{250}{t}, & t>10 \end{cases}$$ en donde t es el tiempo transcurrido en años.

(a) ¿A partir de qué año crecerá la población P(t)? ¿En algún año la población es mínima?

(b) Determina el valor al que tiende la población de aves con el paso del tiempo.

(c) Calcula el intervalo de tiempo en el que la población se mantiene entre 5000 y 7500 aves.

Solución: (a) Dominio P(t)= [0,∞)

P(t) es continua en [0,10)∪(10,∞) por definición

P(t) es continua en t = 10 pues $\lim_{t\to 10^-}(t^2-8t+50)=\lim_{t\to 10^+}\left(95-\frac{250}{t}\right)=P(10)=70\ cientos.$

$$\boldsymbol{P'(t)=\begin{cases} 2t-8, & 0<t<10 \\ \frac{250}{t^2}, & 10<t \end{cases}}$$

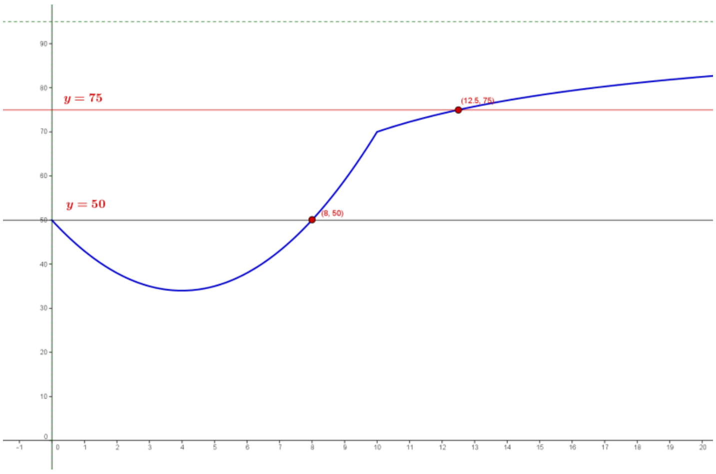
$$P'(t)=0\Longrightarrow 2t-8=0\Rightarrow t=4, pues\ \frac{250}{t^2}\neq 0$$

Intervalo	**0<x<4**	**4<x<10**	**10<x**
Signo de P'(x)	**negativa**	**positiva**	**positiva**
Monotonía de P(x)	**decreciente**	**creciente**	**creciente**

La población crece a partir del cuarto año. El mínimo es (4, 34). En el cuarto año la población tiene un número mínimo de aves de 3400.

(b) $\lim_{x\to\infty}\left(95-\frac{250}{t}\right)=95$, con el paso del tiempo la población irá creciendo hacia 9500 aves.

(c)



Debemos determinar los puntos de corte de las rectas y=50 e y=75 con la función.

$$50=t^2-8t+50\Rightarrow t=0,t=8$$

$$75=95-\frac{250}{t}\Longrightarrow t=12'5$$

El intervalo es [8, 12’5].

9. **(a)** Determina el área del recinto limitado por la gráfica de la función $f(x)=-x(x-4)$ y el eje OX.

(b) Calcula $\int x(2x^2-5)^3dx$

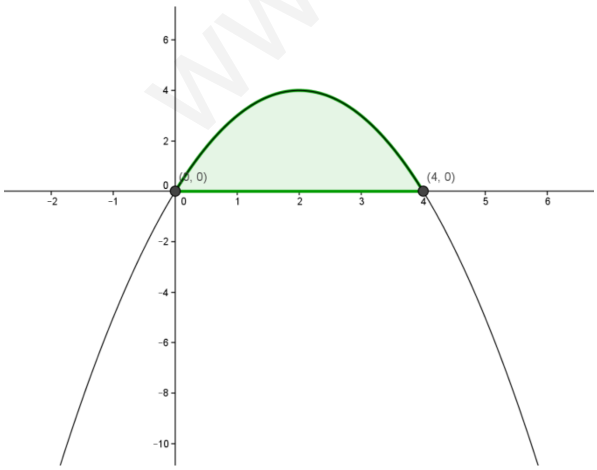
(c) Calcula $\int \frac{1}{(x+2)^3}dx$

(d) Calcula $\int \frac{1}{\sqrt{x+1}}dx$

(e) Calcula $\int 7xe^{x^2+3}dx$

(f) Calcula $\int\left(x^2+5x+\frac{2}{x}\right)dx$

(g) Calcula $\int \frac{x-1}{x^2-2x+5}dx$



Solución: **(a)** Determinamos los puntos de corte de la función con el eje OX y el signo de la misma. Nos están pidiendo el área del recinto sombreado:

$$\int_0^4(-x^2+4x)\,dx=\left.\frac{-x^3}{3}+2x^2\right]_0^4=\frac{-64}{3}+32=\frac{32}{3}$$

(b) $\int x(2x^2-5)^3dx=\frac{1}{4}\int 4x\,(2x^2-5)^3dx=\frac{(2x^2-5)^4}{16}+C$

(c) $\int \frac{1}{(x+2)^3}dx = \int (x+2)^{-3}dx = \frac{-1}{2(x+2)^2} + C$

(d) $\int \frac{1}{\sqrt{x+1}}dx = 2\int \frac{1}{2\sqrt{x+1}}dx = 2\sqrt{x+1} + C$

(e) $\int 7xe^{x^2+3}dx = \frac{7}{2}\int 2xe^{x^2+3}dx = \frac{7}{2}e^{x^2+3} + C$

(f) $\int \left(x^2 + 5x + \frac{2}{x}\right)dx = \frac{x^3}{3} + \frac{5x^2}{2} + 2\ln|x| + C$

(g) $\int \frac{x-1}{x^2-2x+5}dx = \frac{1}{2}\int \frac{2x-2}{x^2-2x+5}dx = \frac{1}{2}\ln|x^2-2x+5| + C$

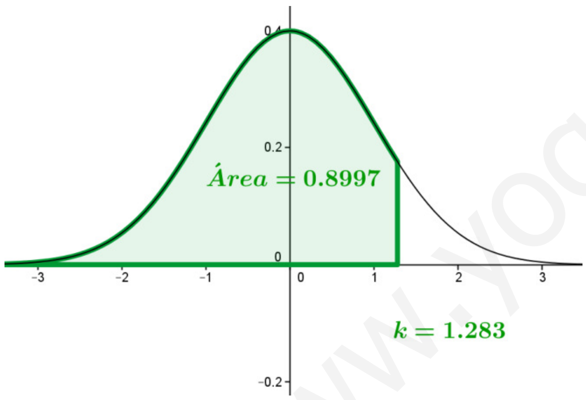
10. Las puntuaciones obtenidas en un test se distribuyen normalmente con media 76 y desviación típica 15. Calcula la puntuación por debajo de la cual se sitúan el 10 % de los peores resultados y aquella por encima de la cual se sitúan el 15 % de los mejores.

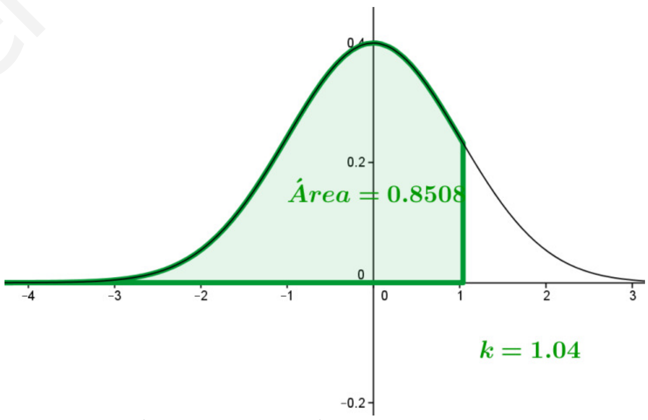
Solución:

$\boldsymbol{X = \text{"puntuación"} = N(\mu = 76, \sigma = 15)}$

$\boldsymbol{P(X < K) = 0'10 \xrightarrow[tipificando]{} P\left(Z < \frac{K-76}{15}\right) = 0'10 \Rightarrow P\left(Z < \frac{-K+76}{15}\right) = 0'9\,0}$

$\boldsymbol{\frac{-K+76}{15} = 1'28 \Rightarrow K = 56'8}$





$\boldsymbol{P(X > K') = 0'15 \xrightarrow[tipificando]{} P\left(Z > \frac{K'-76}{15}\right) = 0'15 \Rightarrow P\left(Z < \frac{K'-76}{15}\right) = 0'85}$

$\boldsymbol{\frac{K'-76}{15} = 1'04 \Rightarrow K' = 91'6}$

11. El gasto que realiza una persona en un supermercado es una cantidad aleatoria con media 50 € y desviación típica 20 €. Si un día han ido al supermercado 200 personas, ¿cuál es la probabilidad de que se hayan gastado entre todas más de 11000 €?

Solución: X = "gasto" tiene de media μ=50 y desviación típica σ=20

Como n = 200 >30 $\Rightarrow \bar{X} = \text{"gasto medio"} = N\left(\mu_{\bar{x}} = 50, \sigma_{\bar{x}} = \frac{20}{\sqrt{200}} = 1'414\right)$

$$P\left(\bar{X} > \frac{11000}{200}\right) = P(\bar{X} > 55) = P\left(Z > \frac{55-50}{1'414}\right) = P(Z > 3'54) = 1 - P(Z < 3'54) = 1 - 0'9998 = 0'0002$$

12. Si el porcentaje de hombres y mujeres en la población española es de 49 % y 51 % respectivamente, ¿cuál es la probabilidad de que escogiendo 200 personas al azar haya más de 100 hombres?

Solución: p = 0'51 (proporción de hombres en la población)

Como n = 200 > 30 $\Longrightarrow P = N(\mu_p = 0'51\,, \sigma_p = \sqrt{\frac{0'51 \cdot 0'49}{200}} = 0'035)$

$$P\left(P > \frac{100}{200}\right) = P\left(Z > \frac{0'5 - 0'51}{0'035}\right) = P(Z > -0'29) = P(Z < 0'29) = 0'6141$$

13. Un fabricante afirma que el 70 % de sus clientes están satisfechos con sus productos. Hemos tomado una muestra aleatoria de 200 clientes suyos y 128 nos han dicho que están satisfechos. Construye un intervalo de confianza con un nivel del 95 % para la proporción de clientes satisfechos con los productos de este fabricante. A la vista del intervalo ¿qué conclusión sacas sobre la afirmación del empresario?

Resolución mediante contraste de hipótesis bilateral

1º) $\boldsymbol{H_0: p = 0'7\,,\ H_1: p \neq 0'7}$

2º) n = 200 >30 $\Longrightarrow P = N(\mu_p = 0'7\,, \sigma_p = \sqrt{\frac{0'7 \cdot 0'3}{200}} = 0'032)$

$1 - \alpha = 0'95 \Longrightarrow Z_{\frac{\alpha}{2}} = 1'96$

Zona de aceptación de la hipótesis nula: $(0'7 - 1'96 \cdot 0'032,\ 0'7 + 1'96 \cdot 0'032) = (0'63728,\ 0'76272)$

3º) Contraste: Como $\boldsymbol{p' = \frac{128}{200} = 0'64}$ pertenece a la zona de aceptación, no tenemos razones para rechazar la hipótesis nula con un nivel de significación del 5 %.

Resolución mediante el intervalo de confianza de la proporción

En la muestra elegida $\boldsymbol{p' = \frac{128}{200} = 0'64}$, n = 200 >30 $\Longrightarrow P = N(\mu_p = p\,, \sigma_p = \sqrt{\frac{0'64 \cdot 0'36}{200}} = 0'034)$

Intervalo de confianza 0'95 para p: $(0'64 - 1'96 \cdot 0'034,\ 0'64 + 1'96 \cdot 0'034) = (0'57336,\ 0'70664)$

Como p = 0'7 pertenece al intervalo de confianza, no podemos rechazar la afirmación del fabricante con un nivel de significación del 5 %.

14. El tiempo de espera en un Centro de Salud sigue una distribución normal de media desconocida y desviación típica 10 minutos. Tomada una muestra aleatoria de 144 pacientes, su media de espera es de 20 minutos. Calcula los intervalos del 95 % y del 99 % para la media de la población.

Solución: X = "tiempo de espera" = N(μ , σ=10)

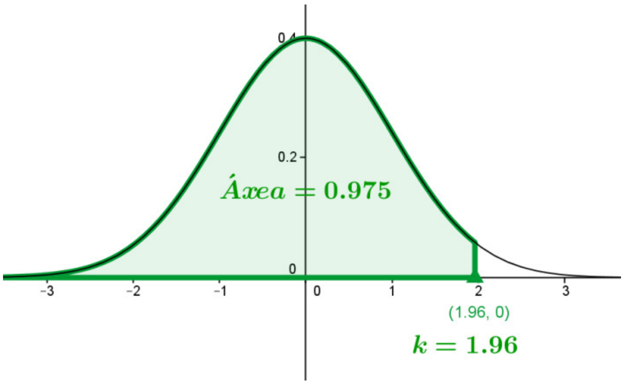
Como n = 144 >30 y X normal $\Longrightarrow \bar{X}$ = "tiempo medio de espera" $= N(\mu_{\bar{x}} = \mu, \sigma_{\bar{x}} = \frac{10}{\sqrt{144}} = 0'833)$

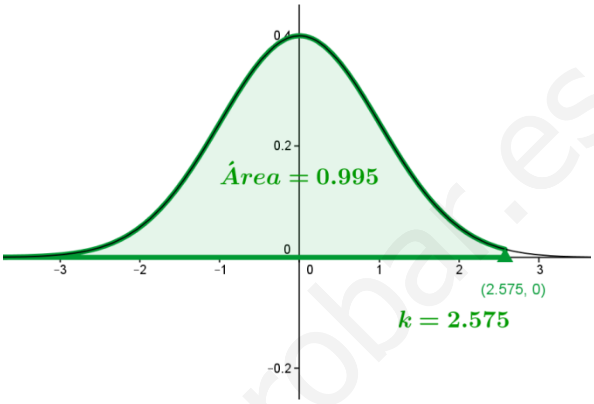
$1-\alpha = 0'95 \Longrightarrow Z_{\frac{\alpha}{2}} = 1'96$, $1-\alpha = 0'99 \Longrightarrow Z_{\frac{\alpha}{2}} = 2'575$

Media en la muestra $= \mathrm{\bar{x}_i} = 20$ min

Intervalo de confianza 1 – α = 0'95 ⇒$(20 - 1'96 \cdot 0'833, 20 + 1'96 \cdot 0'833) = (18'36732, 21'63268)$

Intervalo de confianza 1 – α = 0'99 ⇒$(20 - 2'575 \cdot 0'833, 20 + 2'575 \cdot 0'833) = (17'8550, 22'144975)$





16. El gasto por persona en las rebajas de julio sigue distribución normal con desviación típica 50 €. ¿Qué tamaño deberá tener la muestra para obtener un intervalo de confianza al 99 % de la media poblacional con un error máximo de 9'8?

Solución: X = "gasto por persona" = N(μ , σ=50)

Como X normal $\Longrightarrow \bar{X}$ = "gasto medio" $= N(\mu_{\bar{x}} = \mu, \sigma_{\bar{x}} = \frac{50}{\sqrt{n}})$

$\text{Error} = Z_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \sigma_{\bar{x}} \Rightarrow 9'8 = 2'575 \cdot \frac{50}{\sqrt{n}} \Rightarrow n = \left(\frac{2'575 \cdot 50}{9'8}\right)^2 = 172'6 \cong 173$

17. Hace 10 años, el 60 % de los habitantes de cierta comunidad autónoma estaba en contra de la instalación de una central nuclear. Recientemente, se ha realizado una encuesta a 300 habitantes y 189 se mostraron contrarios a la instalación. Con estos datos y con un nivel de significación de 0'01, ¿se puede afirmar que la proporción de contrarios a la central sigue siendo la misma? ¿Cuál sería la respuesta si el nivel de significación es 0'05?

(a) **1º)** $\boldsymbol{H_0: p = 0'6}$, $\boldsymbol{H_1: p \neq 0'6}$

2º) n = 300 >30 $\Longrightarrow P = N(\mu_p = 0'6 \,, \sigma_p = \sqrt{\frac{0'6 \cdot 0'4}{300}} = 0'028)$

$\alpha = 0'01 \Rightarrow 1-\alpha = 0'99 \Longrightarrow Z_{\frac{\alpha}{2}} = 2'575$

Zona de aceptación de la hipótesis nula: $(0'6 - 2'575 \cdot 0'028,\ 0'6 + 2'575 \cdot 0'028) = (0'5279,\ 0'6721)$

3º) Contraste: Como $p' = \frac{189}{300} = 0'63$ pertenece a la zona de aceptación, no tenemos razones para rechazar la hipótesis nula con un nivel de significación del 1 %.

(b) $1-\alpha = 0'95 \Longrightarrow Z_{\frac{\alpha}{2}} = 1'96$

Zona de aceptación de la hipótesis nula: $(0'6 - 1'96 \cdot 0'028,\ 0'6 + 1'96 \cdot 0'028) = (0'54512,\ 0'65488)$

Contraste: Como $p' = \frac{189}{300} = 0'63$ pertenece a la zona de aceptación, no tenemos razones para rechazar la hipótesis nula con un nivel de significación del 5 %.

18. Un fabricante de automóviles ha realizado un estudio de mercado en un determinado municipio tomando una muestra de 500 turismos y ha encontrado que 80 de ellos tienen un motor diesel. Para un nivel de confianza del 94 %:

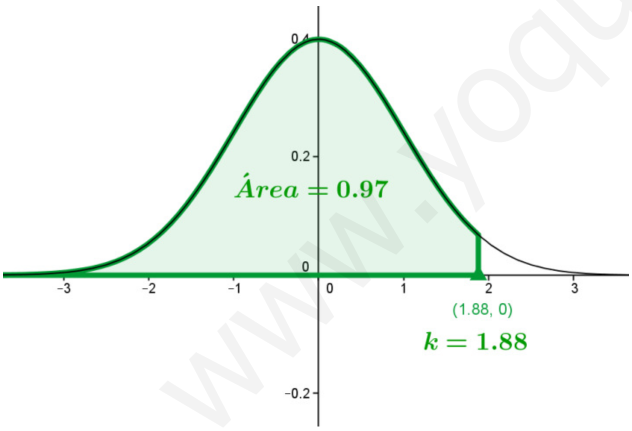
Determina el intervalo de confianza de la proporción de turismos que tienen motor diesel en dicho municipio. Calcula el error máximo.

Solución:

P' = proporción en la muestra elegida = $\frac{80}{500} = 0'16$

Como n = 500 > 30 $\Longrightarrow P = N(\mu_p = p\ , \sigma_p = \sqrt{\frac{0'16 \cdot 0'84}{500}} = 0'016)$

$1-\alpha = 0'94 \Longrightarrow P\left(Z < Z_{\frac{\alpha}{2}}\right) = 0'97 \Longrightarrow Z_{\frac{\alpha}{2}} = 1'88$



Intervalo de confianza para la proporción:

$(0'16 - 1'88 \cdot 0'016, 0'16 + 1'88 \cdot 0'016) =$

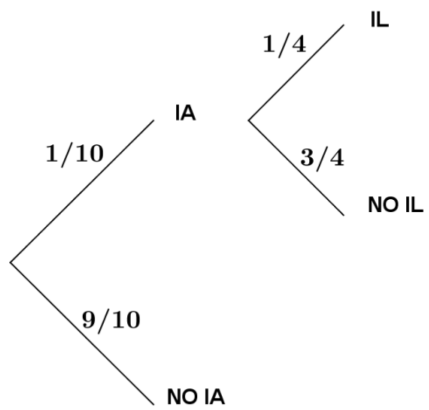
= (0'12992, 0'19008)

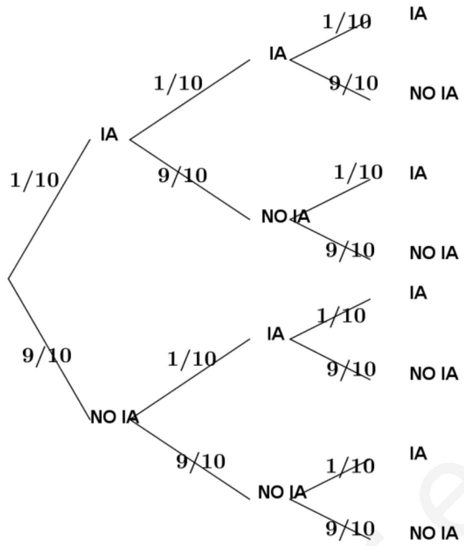
Error máximo = 0'016·1'88 = 0'03008

19. Una décima parte de los niños españoles padece algún tipo de intolerancia alimentaria. De este grupo, la cuarta parte tienen una intolerancia a la lactosa.

a) Calcula la probabilidad de que un niño español no tolere la lactosa.

b) Halla la probabilidad de que en un grupo de tres niños españoles, al menos uno de ellos tenga algún tipo de intolerancia alimentaria.





Solución: (a)

Experiencia: "Elegir un niño", IA = "padece intolerancia alimentaria", IL = "padece intolerancia a la lactosa"

P(IL) = $\frac{1}{10} \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{40}$

(b) P("al menos uno presente intolerancia a la lactosa") = 1 – P("ninguno presente intolerancia a la lactosa) = $1 - \frac{9}{10} \cdot \frac{9}{10} \cdot \frac{9}{10} = 1 - \frac{729}{1000} = \frac{271}{1000} = 0'271$

20. Se trata contra una determinada enfermedad al 40 % de los árboles de una parcela. Se sabe que enferman el 5 % de los árboles tratados y el 30 % de los no tratados contra la enfermedad.

a) Calcula la probabilidad de que no enferme un árbol cualquiera de la parcela.

b) Supongamos que un 80 % de los árboles no están enfermos y que en la parcela hay 625 árboles. ¿Cuál es la probabilidad de que más de 475 árboles de esta parcela no están enfermos?

Solución: (a) T = "el árbol ha sido tratado", E = "el árbol enferma"

$$P(\bar{E}) = P(T \cap \bar{E}) + P(\bar{T} \cap \bar{E}) = 0'4 \cdot 0'95 + 0'6 \cdot 0'7 = 0'8$$

(b) p = proporción de árboles no enfermos.

X= " número de árboles no enfermos" = B(n=625, p = 0'8)

$n \cdot p = 500 \geq 5 \Longrightarrow X\ se\ ajusta\ a\ una\ normal\ \ X' = N(\mu = 625 \cdot 0'8 = 500\ , \sigma = \sqrt{625 \cdot 0'8 \cdot 0'2}$=10)

P(X>475)=P(X'>475'5)=$P\left(Z > \frac{475'5-500}{10}\right) = P(Z > -2'45) = P(Z < 2'45) = 0'9929$

21. En un centro comercial, las compras son pagadas con tarjetas de crédito, tarjetas de débito o en metálico. Se comprobó que en una semana hubo 400 compras con tarjetas de crédito, 500 con tarjetas de débito y 1100 en metálico. Un 60 % de las compras con tarjetas de crédito fue superior a 200 €, mientras que para las compras con tarjetas de débito el porcentaje de compras superiores a 200 € fue del 40 %.

Además, 300 de las compras en metálico también fueron superiores a 200 €. Si se extrae al azar un comprobante de compra:

a) ¿cuál es la probabilidad de que corresponda a una compra superior a 200 €?

b) Si la compra es inferior a 200 €, ¿cuál es la probabilidad de que haya sido pagada en metálico?

SOLUCIÓN: (a) S = "la compra es superior a 200 €", C = "la compra se realiza con tarjeta de crédito", D = "la compra se realiza con tarjeta de débito", M = "la compra se realiza en metálico"

P(S) = $P(C \cap S) + P(D \cap S) + P(M \cap S) = \frac{1}{5} \cdot 0'6 + \frac{1}{4} \cdot 0'4 + \frac{11}{20} \cdot \frac{3}{11} = 0'37$

(b) $\boldsymbol{P(M|\overline{S}) = \frac{P(M \cap \overline{S})}{P(\overline{S})} = \frac{\frac{11}{20} \cdot \frac{8}{11}}{1 - 0'37} = \frac{40}{63}}$

22. El 15 % de los habitantes de cierta población son socios de un club de fútbol y el 3 % son pelirrojos. Si los sucesos "ser socio de un club de fútbol" y "ser pelirrojo" son independientes, calcula las probabilidades de que al elegir al azar un habitante de esa población, dicho habitante:

a) Sea pelirrojo y no sea socio de un club de fútbol.

b) Sea pelirrojo o sea socio de un club de fútbol.

c) Sea socio de un club de fútbol si sabemos que no es pelirrojo.

SOLUCIÓN: (a) F = "ser socio de un club de fútbol", R = "ser pelirrojo"

Si F y R son independientes $\Longrightarrow \overline{F}\ y\ R\ son\ independientes$

$P(R \cap \overline{F}) = P(R) \cdot P(\overline{F}) = 0'03 \cdot (1 - 0'15) = 0'0255$

(b) $\boldsymbol{P(R \cup F) = P(R) + P(F) - P(R \cap F) = 0'03 + 0'15 - 0'03 \cdot 0'15 = 0'1755}$

(c) $\boldsymbol{P(F|\overline{R}) = P(F) = 0'15}$ **por ser independientes.**