Examen de Matemáticas 2º Bachillerato **(Sistemas, Matrices y P. Lineal)**

Alumno...

Fecha: 25 Noviembre 2011

Opción A

---

1. En una empresa se produce queso y mantequilla. Para fabricar una unidad de queso se necesitan 10 unidades de leche y 6 unidades de mano de obra y para fabricar una unidad de mantequilla se utilizan 5 de leche y 8 de mano de obra. La empresa dispone cada día de 200 unidades de leche y 150 de mano de obra. Sabiendo que una unidad de queso se vende a 400 € y una de mantequilla a 250 € y que se vende todo lo que se produce, se pide:

(a) ¿Cuántas unidades de queso y de mantequilla se han de producir diariamente para que el beneficio sea máximo? Explica los pasos seguidos para obtener la solución. (***7 puntos***)

(b) Supón que la empresa decide no producir más de 13 unidades de queso, ¿cambia la solución del apartado ***(a)***? Razona la respuesta y en caso de que varíe, calcula la nueva solución del problema. (***3 puntos***)

2. ***(a)*** Calcula los puntos del recinto $\begin{cases} 2x+y\geq 20 \\ 2x-y\leq 20 \\ 0\leq y\leq 20 \end{cases}$ que hacen mínima la función $f(x,y)=2x+y$. ¿Cuántas soluciones hay? ***(7 puntos)***

(b) Resuelve el problema añadiendo la restricción de ser *x* e *y* números naturales. ***(3 puntos)***

3. Tres lingotes de oro pesan, juntos, 45 Kg. El primero contiene el 90 % de oro, el segundo el 80 % y el 3º el 72 %. Si se fundieran los dos primeros, resultaría un lingote con el 84% de oro, pero si se fundieran el primero y el tercero, se obtendría un lingote con el 78 % de oro puro.

(a) ¿Cuánto pesa cada lingote? (***7 puntos***)

(b) En las mismas condiciones del apartado anterior, supongamos que no se conociera el peso total de los tres lingotes. ¿Qué relación debería de haber entre sus pesos? (***3 puntos***)

4. ***(a)*** Halla una matriz X que verifique:

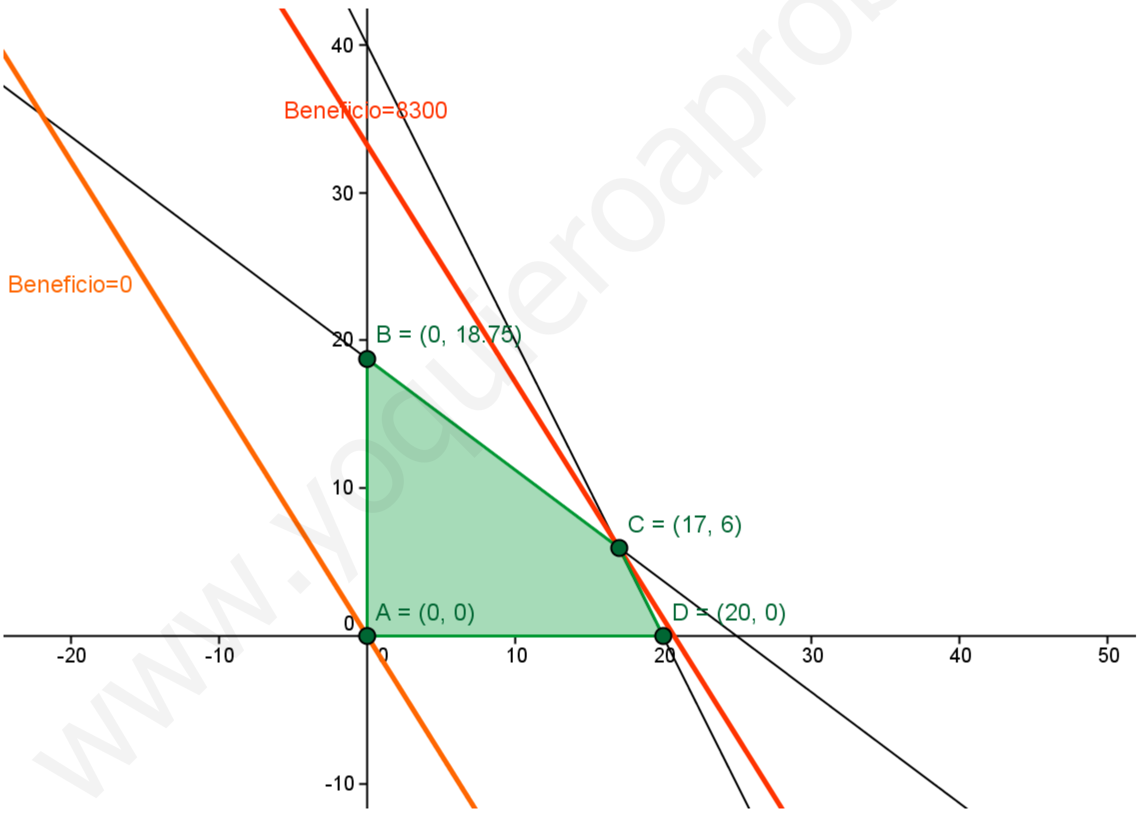
$X-B^2=A\cdot B$, siendo $A=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ y $B=\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ (***4 puntos***)

(b) Explica si es cierta o no la siguiente afirmación: *"El producto de dos matrices diagonales es una matriz diagonal y se verifica la propiedad conmutativa".* **(Demuéstralo con matrices diagonales de orden 3)** (***3 puntos***)

(c) Dada la matriz $C = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$, calcula su inversa. (***3 puntos***)

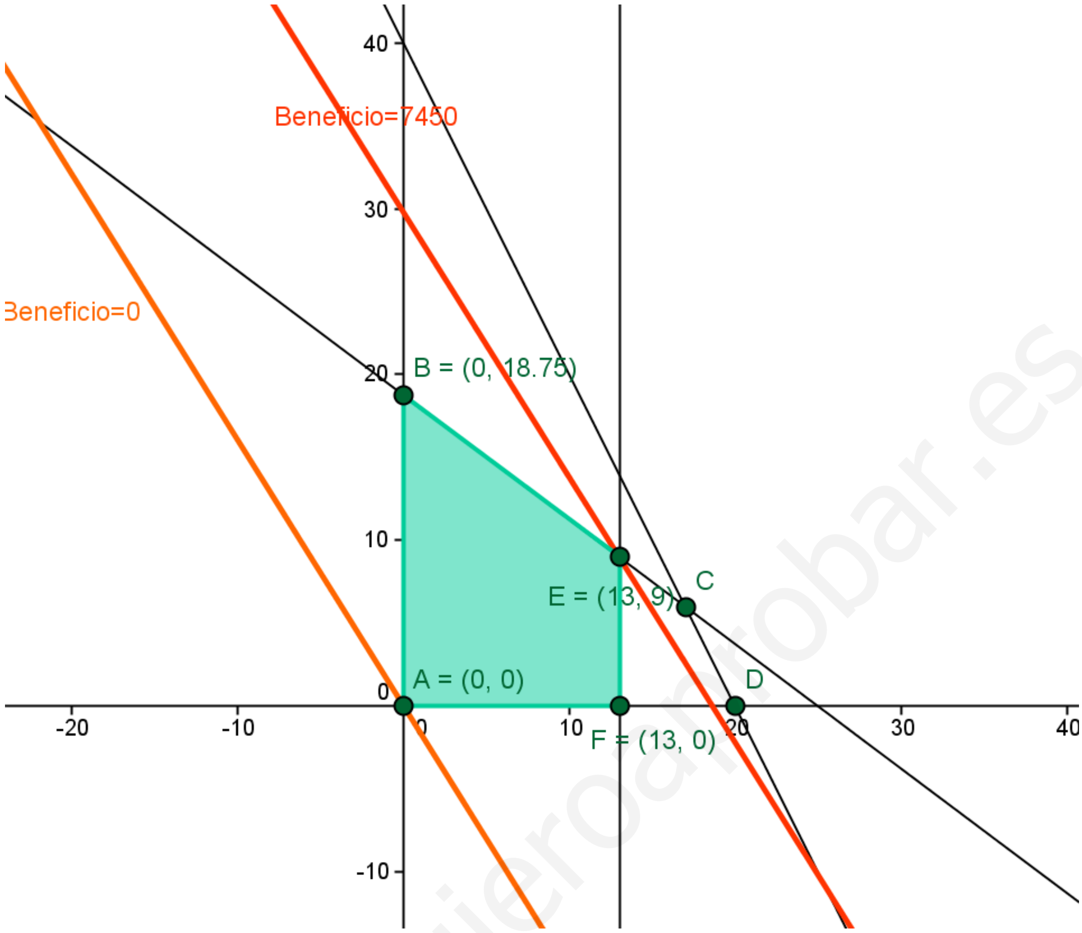
SOLUCIÓN OPCIÓN A

1. (a) Buscamos el nº de unidades (x) de queso y el nº de unidades (y) de mantequilla que verificando las restricciones: $\left\{ \begin{array}{c} 10x+5y \le 200 \\ 6x+8y \le 150 \\ x, y \in N \end{array} \right\}$ y que maximicen la función objetivo: $B(x,y) = 400x + 250y$



Los puntos de la zona sombreada son las soluciones factibles. La solución óptima es x = 17, y = 6 porque la recta paralela a 400x+250y=0 con un término independiente mayor es la que pasa por el punto C.

(b) Al añadir $x \le 13$ a las restricciones nos cambia el conjunto de soluciones factibles de la siguiente manera:

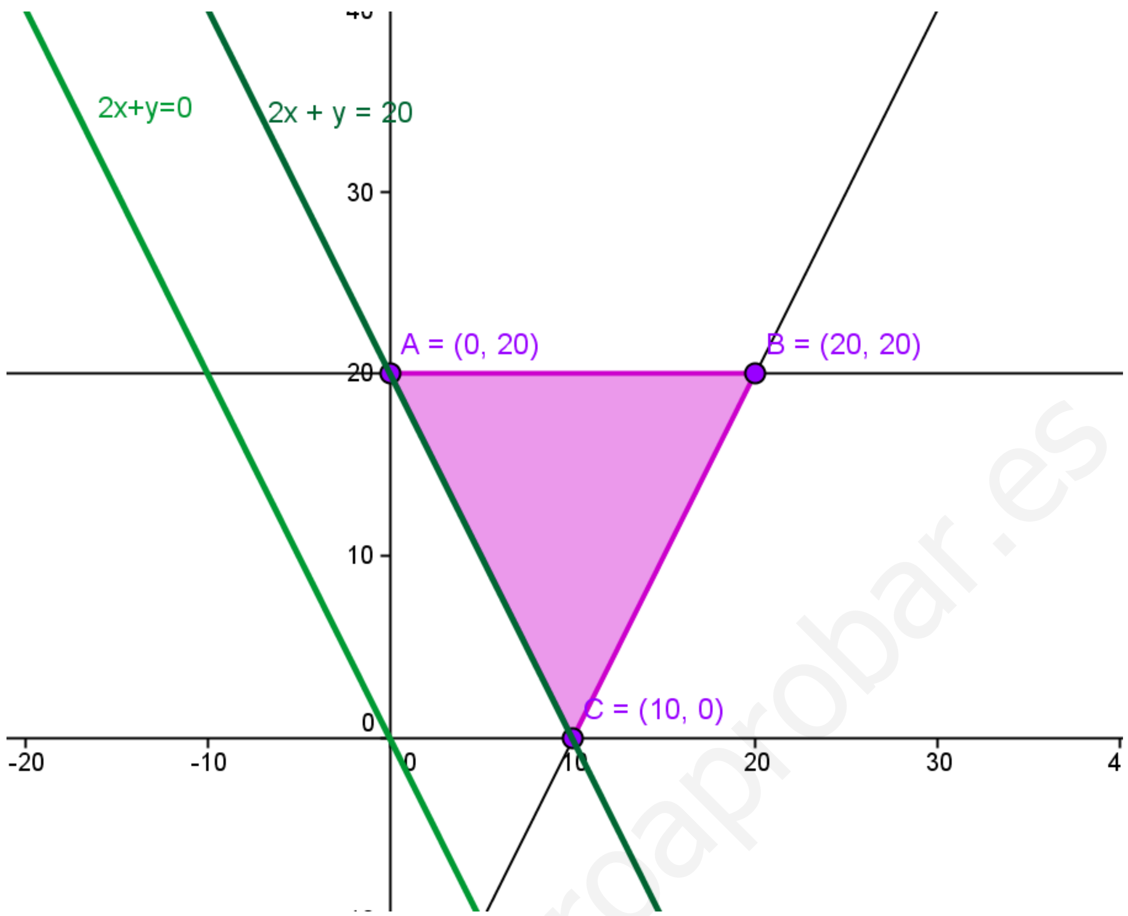


Los puntos de la zona sombreada son las soluciones factibles. La solución óptima es x = 13, y = 9 porque la recta paralela a 400x+250y=0 con un término independiente mayor es la que pasa por el punto E.

2. (a) El conjunto de soluciones factibles son los puntos de la zona sombreada. La función f(x,y)=2x+y alcanza el mínimo en todos los puntos del segmento AC porque la paralela a la recta 2x+y=0 que corta al conjunto de soluciones factibles y tiene un término independiente menor es la que pasa por los puntos A y C.

(b) Si añadimos la restricción de que x e y han de ser naturales, la solución óptima serían los puntos de coordenadas naturales del segmento AC que son:

(0,20), (1,18), (2,16), (3,14), (4,12), (5,10), (6,8), (7,6), (8,4), (9,2) y (10,0).



3. (a)

Lingotes	Peso(en kg)	Oro(kg) en mezcla 1	Oro(kg) en mezcla 2
A	x	0’9x	0’9x
B	y	0’8y	
C	z		0’72z
Totales	45	0’84(x+y)	0’78(x+z)

$$\begin{cases} x+y+z=45 \\ 0'9x+0'8y=0'84(x+y) \\ 0'9x+0'72z=0'78(x+z) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+y+z=45 \\ 0'06x-0'04y=0 \\ 0'12x-0'06z=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+y+z=45 \\ 3x-2y=0 \\ 2x-z=0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x+y+z=45 \\ 5x+2z=90 \\ 2x-z=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+y+z=45 \\ 5x+2z=90 \\ 9x=90 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=15kg \\ z=20kg \\ x=10kg \end{cases}$$

(b) $\begin{cases} 3x-2y=0 \\ 2x-z=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=\frac{3}{2}x \\ z=2x \end{cases}$

4. (a)

$$B^2=\begin{pmatrix}1&0&-2\\2&1&1\\0&0&1\end{pmatrix},\ A\cdot B=\begin{pmatrix}1&0&0\\2&1&0\\0&0&2\end{pmatrix},\ X=A\cdot B+B^2=\begin{pmatrix}2&0&-2\\4&2&1\\0&0&3\end{pmatrix}$$

(b) El producto de matrices diagonales es una matriz diagonal. En efecto:

$$\begin{pmatrix}a&0&0\\0&b&0\\0&0&c\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}x&0&0\\0&y&0\\0&0&z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a\cdot x&0&0\\0&b\cdot y&0\\0&0&c\cdot z\end{pmatrix}$$

El producto de matrices diagonales es conmutativo. En efecto:

$$\begin{pmatrix}a&0&0\\0&b&0\\0&0&c\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}x&0&0\\0&y&0\\0&0&z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a\cdot x&0&0\\0&b\cdot y&0\\0&0&c\cdot z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x&0&0\\0&y&0\\0&0&z\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}a&0&0\\0&b&0\\0&0&c\end{pmatrix}$$

(c) $\left(\begin{array}{cc|cc}1&2&1&0\\0&-1&0&1\end{array}\right)\underset{F1+2F2}{\longleftrightarrow}\left(\begin{array}{cc|cc}1&0&1&2\\0&-1&0&1\end{array}\right)\underset{-F2}{\longleftrightarrow}\left(\begin{array}{cc|cc}1&0&1&2\\0&1&0&-1\end{array}\right)$

$\Rightarrow C^{-1}=C$

Examen de Matemáticas 2º Bachillerato **(Sistemas, Matrices y P. Lineal)**

Alumno..

Fecha: 25 Noviembre 2011

Opción B

---

1. ***(a)*** Dado el siguiente sistema de desigualdades lineales:

$$\begin{cases} x+4y \leq 16 \\ x+2y \leq 10 \\ 2x+y \leq 14 \\ x \geq 0 \quad ; \quad y \geq 0 \end{cases}$$

Determina el conjunto de soluciones factibles. (***4 puntos***)

(b) Maximiza la función $f(x,y)=3x+5y$ sujeta a las restricciones anteriores. (***2 puntos***)

(c) Maximiza la función $g(x,y)=2x+8y$ sujeta a las restricciones anteriores. (***2 puntos***)

(d) Discute razonadamente la solución del apartado ***(b)*** si añadimos la restricción $x \leq 5$. (***2 puntos***)

2. En un almacén se guarda aceite de girasol y de oliva. Para atender a los clientes se han de tener almacenados un mínimo de 20 bidones de aceite de girasol y 40 bidones de aceite de oliva, y además el número de bidones de aceite de oliva no debe ser inferior a la mitad del número de bidones de aceite de girasol. La capacidad total del almacén es de 150 bidones. Sabiendo que el gasto de almacenaje de un bidón de aceite de oliva es de 100 € y de uno de girasol de 50 €, se pide:

(a) ¿Cuántos bidones de cada tipo habrá que almacenar para que el gasto sea mínimo? Razona la respuesta. (***6 puntos***)

(b) Supongamos que se pueden vender todos los bidones almacenados y que el beneficio obtenido por cada bidón (de oliva o de girasol) es de 2000 €. ¿Cuántos bidones de cada tipo habrá que almacenar para que el beneficio sea máximo? Razona la respuesta. (***4 puntos***)

3. ***(a)*** Los 90 alumnos de 2º de Bachillerato de un Instituto están divididos en tres grupos A, B y C. Calcula el número de alumnos de cada grupo sabiendo que si se pasan 7 alumnos del grupo B al grupo A ambos grupos tendrían el mismo número de alumnos; o que si se pasan 4 alumnos del grupo C al grupo A, en éste habría la mitad de alumnos que en el grupo C. (***5 puntos***)

(b) Discute (según los valores del parámetro m) y resuelve, cuando sea posible, el sistema: (***5 puntos***)

$$\left\{\begin{array}{r} 2x-3y+z=0 \\ 5x+2y-z=0 \\ x-my-3z=0 \end{array}\right.$$

4. ***(a)*** Halla la matriz X, sabiendo que satisface la siguiente ecuación matricial:(***5 puntos***)

$$A\cdot X=\tfrac{1}{3}\cdot B, \text{ siendo } A=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ y } B=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

(b) ¿Existe algún valor de x para el que la matriz C no posea inversa? Razona la respuesta. (***5 puntos***)

$$C=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & x & 2 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

SOLUCIÓN OPCIÓN B

1.

(a) El conjunto de soluciones factibles está formado por los puntos de la región sombreada en la **figura 1.**

(b) La función f(x,y)=3x+5y alcanza el máximo en el punto C de coordenadas (x=6, y=2) porque la recta paralela a 3x+5y=0 con un término independiente mayor que corta al conjunto de soluciones factibles lo hace en el punto C.

(c) La función g(x,y)=2x+8y alcanza el máximo en todos los puntos del segmento AB porque la recta paralela a 2x+8y=0 con un término independiente mayor que corta al conjunto de soluciones factibles lo hace en dicho segmento.

(b) Si añadimos la restricción $x \leq 5$ cambia el conjunto de soluciones factibles como se observa en la **figura 2.** En este caso, la función f(x,y)=3x+5y alcanza el máximo en el punto E de coordenadas (x=5, y=2’5) porque la recta paralela a 3x+5y=0 con un término independiente mayor que corta al conjunto de soluciones factibles lo hace en el punto E.

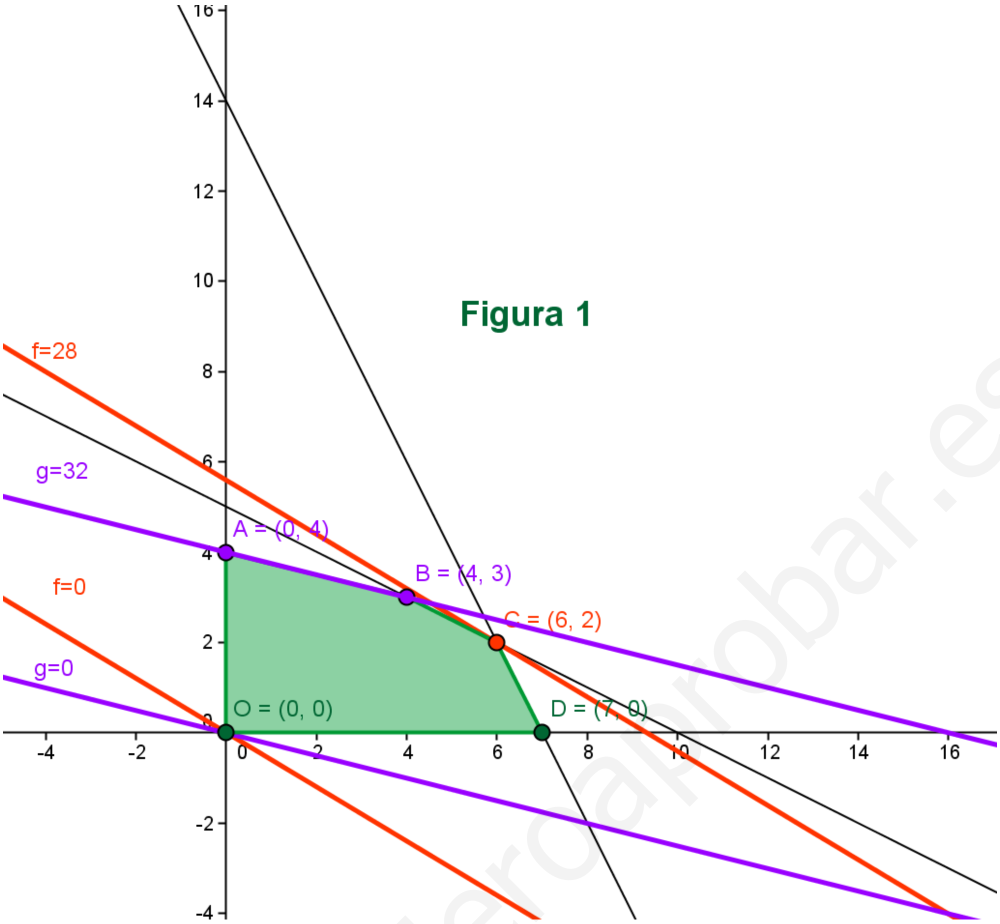


Figura 1
f=28
g=32
f=0
g=0
A = (0, 4)
B = (4, 3)
C = (6, 2)
O = (0, 0)
D = (7, 0)

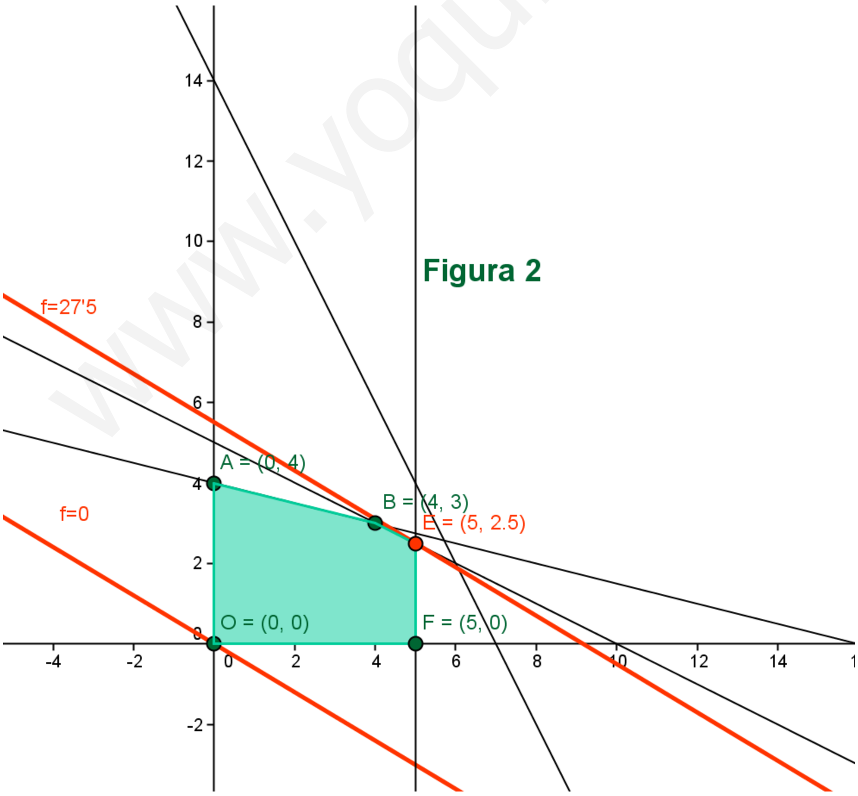
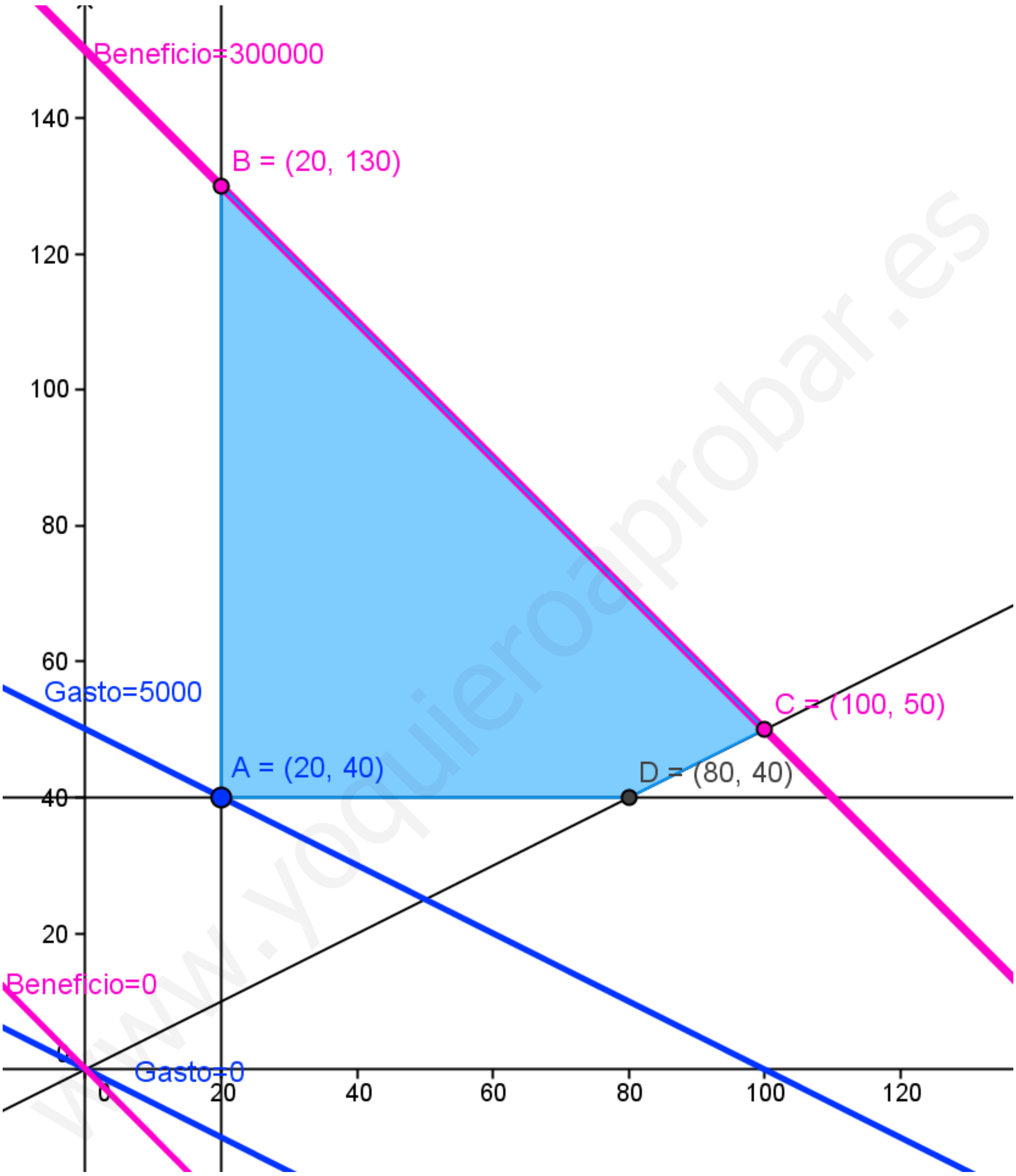


Figura 2
f=27'5
f=0
A = (0, 4)
B = (4, 3)
E = (5, 2.5)
O = (0, 0)
F = (5, 0)

2. (a) Queremos hallar el nº de bidones de aceite de girasol (x) y el nº de bidones de aceite de oliva sujeto a las restricciones: $\{x \geq 20,\ y \geq 40,\ y \geq \frac{x}{2},\ x + y \leq 50,\ x, y \in N\}$ y que minimicen el gasto: G(x,y) = 50x+100y.



La solución óptima para minimizar el gasto es x = 20, y = 40 porque la recta paralela a 50x+100y=0 que tiene un término independiente menor es la que pasa por el punt o A.
(b) Las soluciones óptimas para minimizar el beneficio (2000x+2000y) son todos los puntos de coordenadas enteras del sewgmento BC porque la recta paralela a 2000x+2000y=0 con un término independiente mayor contiene a dicho segmento.

3. (a) x = nº alumnos del grupo A, y = nº alumnos del grupo B, z = nº alumnos del grupo C.

$$\left.\begin{array}{c} x-7=y-7 \\ 2(x+4)=z-4 \\ x+y+z=90 \end{array}\right\} \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{c} x+y+z=90 \\ x-y=-14 \\ 2x-z=-12 \end{array}\right\} \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{c} x+y+z=90 \\ 2x+z=76 \\ 2x-z=-12 \end{array}\right\} \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{c} x+y+z=90 \\ 2x+z=76 \\ 4x=64 \end{array}\right\}$$

$\Leftrightarrow x=16,\ z=44,\ y=30$

(b) $\begin{pmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 5 & 2 & -1 \\ 1 & -m & -3 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 7 & -1 & 0 \\ 7 & -m-9 & 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 7 & -1 & 0 \\ 0 & m+8 & 0 \end{pmatrix}$

(1º) Si m = -8 el rango de A es 2 < nº de incógnitas , el sistema compatible e indeterminado

$$\left.\begin{array}{c} 2x-3y+z=0 \\ 7x-y=0 \end{array}\right\} \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{c} z=19x \\ y=7x \\ x\in R \end{array}\right\}$$

(2º) Si m ≠ -8 el rango de A es 3 = nº de incógnitas , el sistema compatible y determinado. Al ser homogéneo su única solución es x = y = z = 0.

4. (a) $A\cdot X=\frac{1}{3}\cdot B \Leftrightarrow A^{-1}\cdot A\cdot X=A^{-1}\cdot\frac{1}{3}\cdot B \Leftrightarrow X=\frac{1}{3}\cdot A^{-1}\cdot B$

$$A^{-1}=\begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix},\ A^{-1}\cdot B=\begin{pmatrix} -1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix},\ X=\begin{pmatrix} \frac{-1}{3} & \frac{2}{3} & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} & 0 \\ \frac{1}{3} & \frac{-1}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$$

(b) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & x & 2 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix} \leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -3 & x & 0 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix} \leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -0 & 2x+3 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

Si 2x+3=0, x = -3/2 el rango de C es 2, menor que su orden (3) y por lo tanto no posee inversa.