Recuperación de la 1ª evaluación (2º Bachillerato C.C.S.S.; curso 11-12)

(Opción A) **Fecha:** 9 Diciembre 2.011

Alumno:... ....

1. En la tienda *"Zapeco"* se pueden comprar los artículos A, B y C por un total de 1000 € También por 1000 € se pueden comprar los articulos A, B y C en la tienda *"Prisca"*, si bien en esta última A y B son un 10 % más caros y C un 10 % más barato que en *"Zapeco"*.

(a) ¿Cuál es el precio del artículo C en *"Prisca"*? ¿Y en *"Zapeco"*?(***3 puntos***)

(b) ¿Cuánto cuesta comprar los articulos A y B en *"Zapeco"*? (***3 puntos***)

(c) Si sabemos, además de las condiciones anteriores, que en *"Zapeco"* el artículo B cuesta el doble que A más la décima parte de lo que cuesta C, determina el precio de cada artículo en cada una de las tiendas. (***4 puntos***)

2. Considerar el sistema de inecuaciones: $\begin{cases} y-x \geq -2 \\ -x-y \leq 2 \\ 3x+y \leq 3 \end{cases}$. Se pide:

(a) Representar gráficamente el conjunto S solución de dicho sistema de inecuaciones. **(*4 puntos*)**

(b) Determinar si $f(x,y)=3x-2y$ alcanza un valor máximo y un valor mínimo en S y, en caso afirmativo, calcular dichos valores y los puntos donde se alcanzan. **(*3 puntos*)**

(c) Determinar si $g(x,y)=-6x+4y$ alcanza un valor máximo y un valor mínimo en S y, en caso afirmativo, calcular dichos valores y los puntos donde se alcanzan. **(*3 puntos*)**

3. ***(a)*** Halla la matriz X que verifica : $A \cdot X \cdot A - B = 0$, siendo $A=\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}$ y $B=\begin{pmatrix} 5 & -2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$. **(*3'5 puntos*)**

(b) Calcula $A^{22}-12 \cdot A^2 + 2 \cdot A$ sabiendo que $A=\begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ **(*3'5 puntos*)**

(c) Razona si es posible añadir una fila a la matriz $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & -1 & -2 \\ 2 & 7 & -3 & 0 \end{pmatrix}$ de manera que la matriz resultante tenga por rango 4. **(*3 puntos*)**

Recuperación de la 1ª evaluación (2º Bachillerato C.C.S.S.; curso 11-12)

(Opción B) **Fecha:** 9 Diciembre 2.011

Alumno:.. ....

1. **(a)** **Discute** el siguiente sistema en función del valor del parámetro *a*. Resuélvelo en el caso a = 2. $\begin{cases} x+2y-az=1 \\ -y+z=0 \\ 2x+z=a \end{cases}$ (***6 puntos***)

(b) Escribe un ejemplo de un sistema homogéneo compatible e indeterminado. Razona la respuesta. (tres ecuaciones, tres incógnitas). (***2 puntos***)

(c) Si a un sistema incompatible, de dos ecuaciones con dos incógnitas, le añadimos otra ecuación, ¿podemos lograr un sistema compatible e indeterminado?. Razona la respuesta y escribe un ejemplo. (***2 puntos***)

2. Una cooperativa textil fabrica pantalones y camisas. La fabricación de los pantalones necesita 2 horas de trabajo y la de camisas 3 horas. Por cada camisa los almacenes *"Corteglén"* pagan 30 €, y por cada pantalón 20 €.

Disponen de 1.400 horas de trabajo y tienen el compromiso de fabricar 100 unidades, o más, de cada tipo de prenda y el número de pantalones debe ser al menos el doble que el de camisas. Se pide:

(a) ¿Cómo deben organizar la producción para tener una ganancia máxima? (***6 puntos***)

(b) ¿Se puede quitar alguna restricción sin que la solución varíe? Razona la respuesta. (***1 punto***)

(c) Si se suprime la restricción del número de horas disponible, ¿varía la respuesta del apartado **(a)**? En caso de que varíe, calcula la nueva solución. (***3 puntos***)

3. Dadas las matrices $A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$ y $C=\begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 3 & 0 \\ 7 & -2 \end{pmatrix}$, se pide:

(a) Calcula el rango de la matriz C. (***3 puntos***)

(b) Halla la matriz inversa de A y la inversa de B. (***4 puntos***)

(c) Calcula una matriz X tal que: $A \cdot X \cdot B = C$ (***3 puntos***)

Solución opción A

1.

	artículo A	artículo B	artículo C
Precio en Zapeco	x	y	z
Precio en Prisca	1'1.x	1'1.y	0'9.z

(a) $\left\{ \begin{array}{c} x+y+z=1.000 \\ 1'1x+1'1y+0'9z=1.000 \end{array} \right\} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{c} x+y+z=1.000 \\ 11x+11y+9z=10.000 \end{array} \right\} \Leftrightarrow$

$\left\{ \begin{array}{c} x+y+z=1.000 \\ 2z=1.000 \end{array} \right\} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{c} x+y=500 \\ z=500 \end{array} \right\}$

El artículo C en Prisca cuesta $0'9 \cdot 500 = 450$ ∈ y en Zapeco 500 €.

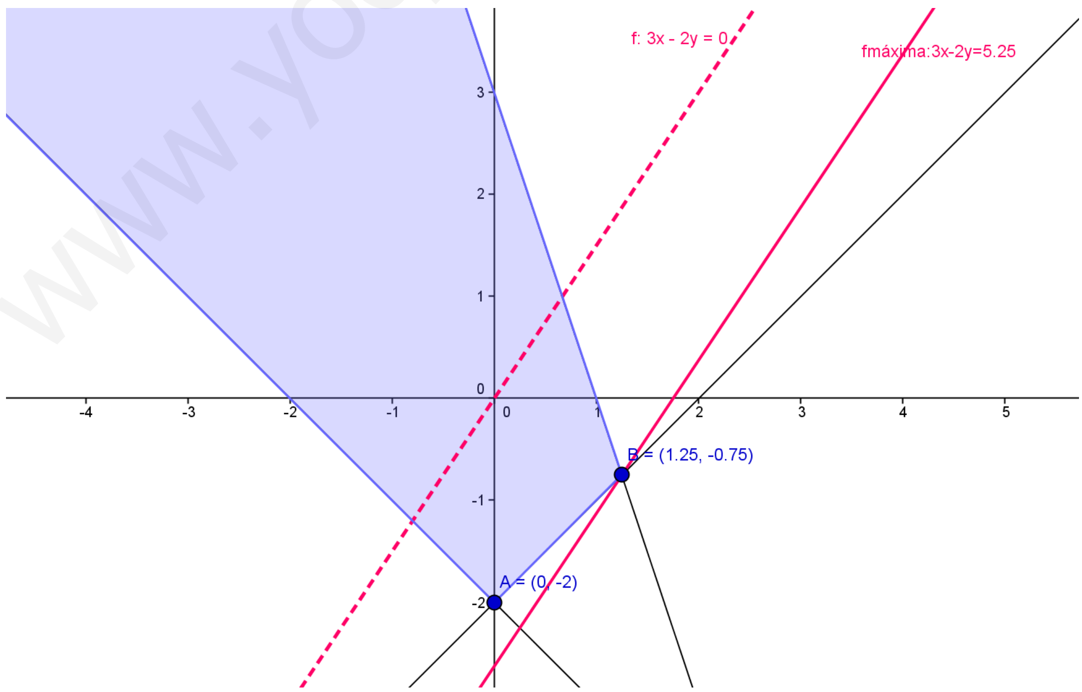
(b) Los artículos A y B en Zapeco cuestan $x+y=500$ ∈ .

(c) $\left\{ \begin{array}{c} x+y=500 \\ z=500 \\ y=2x+0'1 \cdot z \end{array} \right\} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{c} x+y=500 \\ z=500 \\ -2x+y=50 \end{array} \right\} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{c} x+y=500 \\ z=500 \\ 3x=450 \end{array} \right\} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{c} x=150 \\ y=350 \\ z=500 \end{array} \right\}$

En Zapeco los artículos A, B y C cuestan 150, 350 y 500 €, respectivamente.

En Prisca los artículos A, B y C cuestan 165, 385 y 450 €, respectivamente.

2. (a)

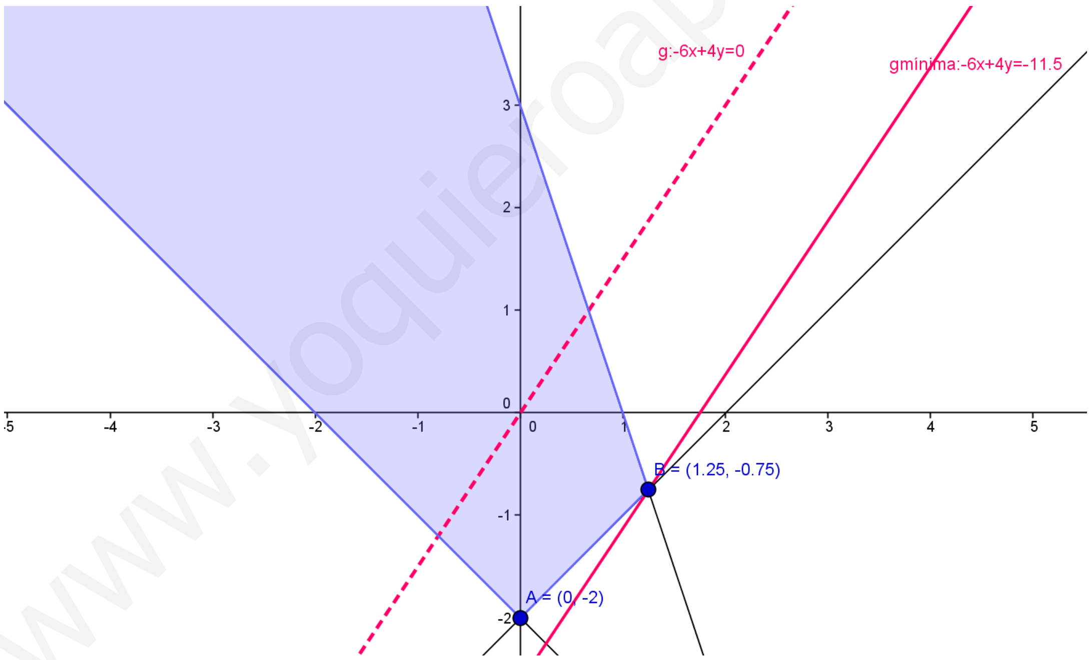


(b) La función f(x,y)=3x-2y en los vértices del recinto de soluciones factibles toma los siguientes valores: f(0,-2) = 4, f(1’25, -0’75) = 5’25

Al representar la recta 3x-2y = 0, observamos que la recta paralela que corta al conjunto de soluciones factibles y tiene un término independiente mayor (5’25), es la que pasa por el punto B(1’25, -0’75). Por lo tanto las coordenadas de dicho punto es la solución óptima que maximiza f(x,y). No hay solución óptima que minimice la función f(x,y) puesto que no encontramos una última paralela a 3x-2y = 0 con un término independiente menor ya que el recinto de soluciones factibles es abierto.

(c) La función g(x,y)=-6x+4y en los vértices del recinto de soluciones factibles toma los siguientes valores: g(0,-2) = -8, g(1’25, -0’75) = -11’5

Al representar la recta -6x+4y = 0, observamos que la recta paralela que corta al conjunto de soluciones factibles y tiene un término independiente menor (-11’5), es la que pasa por el punto B(1’25, -0’75). Por lo tanto las coordenadas de dicho punto es la solución óptima que minimiza g(x,y). No hay solución óptima que maximice la función g(x,y) puesto que no encontramos una última paralela a -6x+4y = 0 con un término independiente mayor ya que el recinto de soluciones factibles es abierto.



3. **(a)** $A \cdot X \cdot A - B = 0 \Leftrightarrow A \cdot X \cdot A = B \Leftrightarrow X = A^{-1} \cdot B \cdot A^{-1}$

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 3 & 1 & 1 & 0 \\ -2 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right) \leftrightarrow \left(\begin{array}{cc|cc} 3 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & 3 \end{array}\right) \leftrightarrow \left(\begin{array}{cc|cc} 3 & 0 & 3 & 3 \\ 0 & -1 & 2 & 3 \end{array}\right) \leftrightarrow \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -2 & -3 \end{array}\right)$$

(b) $A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 2a \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $A^n = \begin{pmatrix} 1 & na \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $A^{22} = \begin{pmatrix} 1 & 22a \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

$$A^{22} - 12 \cdot A^2 + 2 \cdot A = \begin{pmatrix} 1 & 22a \\ 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 12 & 24a \\ 0 & 12 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & 2a \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -9 & 0 \\ 0 & -9 \end{pmatrix}$$

(c) El rango de la matriz dada es 2, por lo tanto aunque añadamos una fila como máximo podría ser 3, nunca 4.

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & -1 & -2 \\ 2 & 7 & -3 & 0 \end{pmatrix} \leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & -1 & -2 \\ 0 & 3 & -3 & -6 \end{pmatrix} \leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Solución opción B

1. **(a)**

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -a & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & a \end{array}\right) \Leftrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -a & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 4 & 2a+1 & a-2 \end{array}\right) \Leftrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -a & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2a-3 & a-2 \end{array}\right)$$

Discusión: 1) Si a = 3/2 el sistema es incompatible. $(rgA^* = 3 \neq rgA = 2)$

2) Si a es distinto de 3/2 el sistema es compatible y determinado.

$$(rgA^* = rgA = n^o \ incógnitas \ = 3)$$

Resolución en el caso a = 2 :

$$\left\{ \begin{array}{c} x + 2y - 2z = 1 \\ -y + z = 0 \\ z = 0 \end{array} \right\} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{c} x = 1 \\ y = 0 \\ z = 0 \end{array} \right\}$$

(b) Escribimos dos ecuaciones independientes y la tercera una combinación lineal de las otras dos, por ejemplo: E3 = 2E2+E1

$$\left\{ \begin{array}{c} 2x - y + 3z = 0 \\ 3y - z = 0 \\ 2x + 5y + z = 0 \end{array} \right\}$$

(c) Si el sistema inicial es incompatible, añadiendo ecuaciones siguirá siendo incompatible.

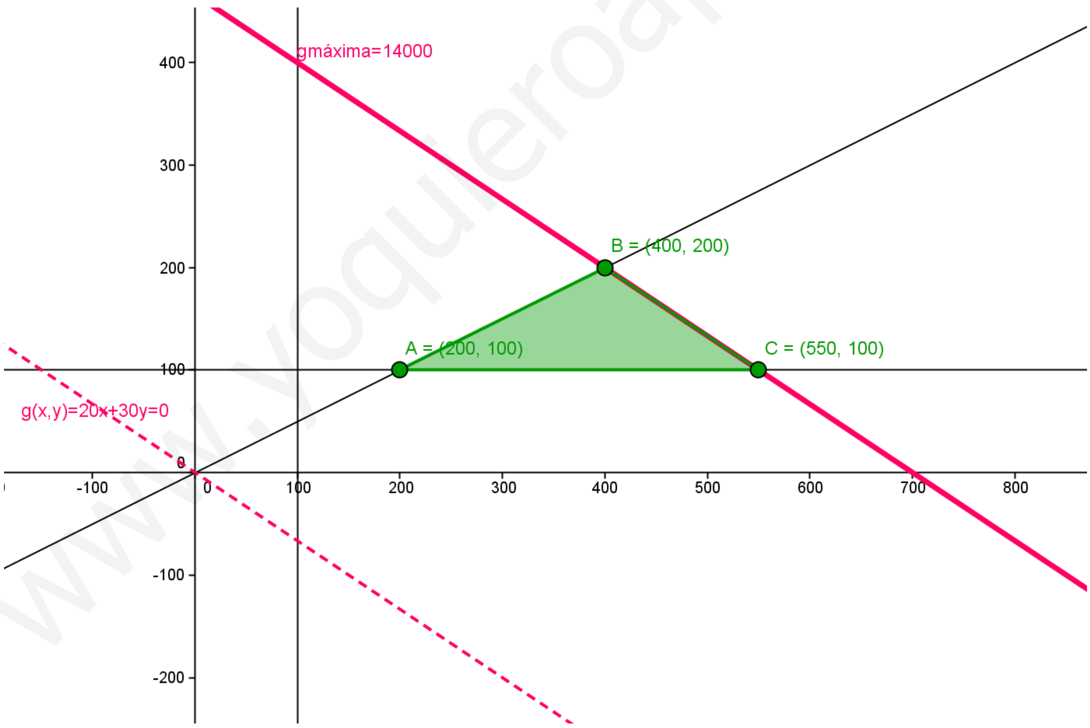
$\left\{\begin{array}{c} x-2y=5 \\ 2x-4y=7 \end{array}\right\}$ es un sistema incompatible, pues es equivalente a $\left\{\begin{array}{c} x-2y=5 \\ 0\cdot y=3 \end{array}\right\}$

Aunque añadamos otras ecuaciones (rectas en el plano), no podemos eliminar las dos de partida (rectas paralelas). Por lo tanto es imposible que tengan algún punto en común.

2. **(a)**

	número	nº de horas	Ganancia en €
pantalones	x	2x	20x
camisas	y	3y	30y

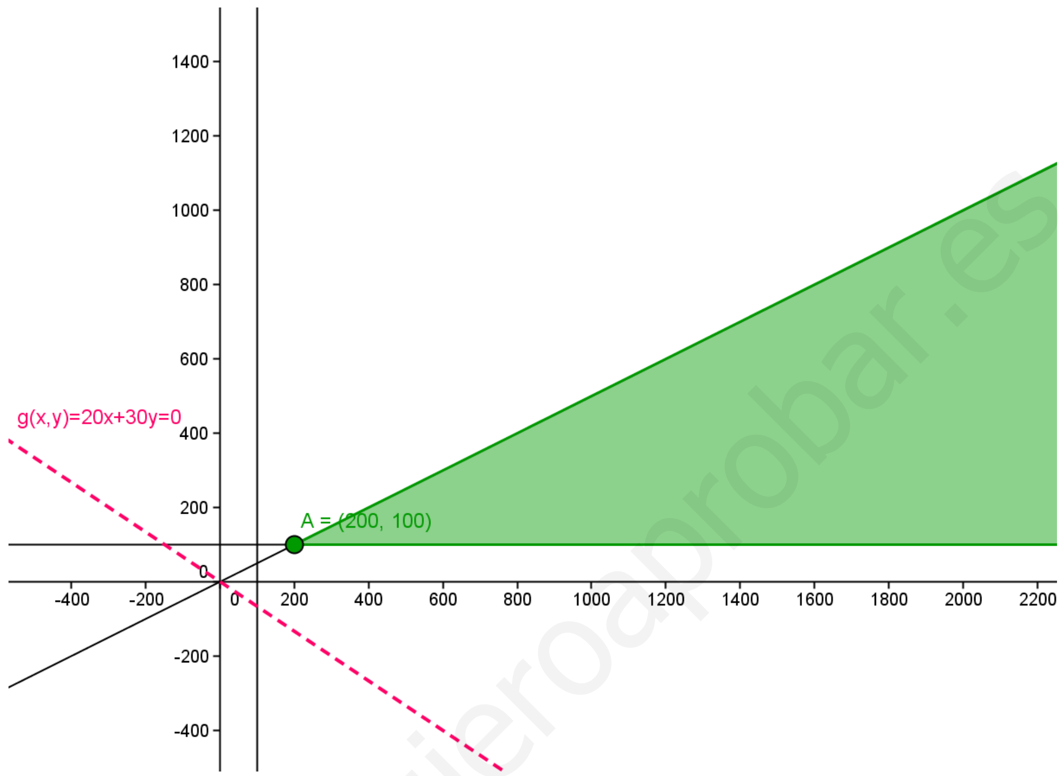
Restricciones: $\left\{\begin{array}{c} 2x+3y\le 1400 \\ x\ge 100 \\ y\ge 100 \\ x\ge 2y \\ x,y\in Naturales \end{array}\right\}$ Función Objetivo: G(x,y)=20x+30y (maximizar)



La ganancia máxima (14.000 €) se consigue en todos los puntos de coordenadas naturales del segmento BC.

(b) Podemos eliminar la restricción $x\ge 100$ puesto que no delimita el conjunto de soluciones factibles.

(c) Si que varía ya que el conjunto de soluciones factibles es abierto. No podemos maximizar la ganancia ya que no hay una última paralela a la recta 20x+30y=0 que corte al conjunto de soluciones factibles y tenga un término independiente más grande.



3. **(a)** $\begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 3 & 0 \\ 7 & -2 \end{pmatrix} \leftrightarrow \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 3 & 0 \\ 12 & 0 \end{pmatrix} \leftrightarrow \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 3 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow rgC = 2$

(b) $A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{-1}{2} & \frac{-1}{2} & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ \frac{1}{2} & \frac{3}{2} & -1 \end{pmatrix}, \quad B^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix}$

(c) $X = A^{-1} \cdot C \cdot B^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{-1}{2} & \frac{-1}{2} & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ \frac{1}{2} & \frac{3}{2} & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 2 & 1 \\ 4 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$