Recuperación de la 2ª evaluación de Matemáticas

Curso: 2º de Bachillerato de C.C.S.S.

1. Dada la función:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{ax-2}{x^2+1} & si \quad x < -1 \\ 2ax + b & si \quad -1 \leq x \leq 2 \\ \frac{2bx-3}{x} & si \quad x \geq 2 \end{cases}$$

halla los valores de *a* y *b* para que *f(x)* sea continua en todo su dominio. Razona la respuesta.

Solución:

Domf = R ⇒ La función es continua $\forall x \in R \ y \ x \neq -1, 2$ por su definición.

f continua en x = -1 $\Leftrightarrow \lim_{x\to -1^-} \frac{ax-2}{x^2+1} = \lim_{x\to -1^+} (2ax+b) = f(-1) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \frac{-a-2}{2} = -2a + b$

f continua en x = 2 $\Leftrightarrow \lim_{x\to 2^+} \frac{2bx-3}{x} = \lim_{x\to 2^-} (2ax+b) = f(2) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \frac{4b-3}{2} = 4a + b$

Resolviendo el sistema: $\begin{cases} 3a - 2b = 2 \\ 8a - 2b = -3 \end{cases} \Rightarrow a = -1, \ b = \frac{-5}{2}$

2. Determina ***el dominio***, ***la monotonía***, ***extremos relativos***, ***concavidad***, ***puntos de inflexión*** y ***asíntotas*** de la función: $f(x) = \frac{x^2}{x+4}$.

Solución:

(1) Domf = $R - \{-4\}$

(2) $f'(x) = \frac{x^2+8x}{(x+4)^2}$; $f'(x) = 0 \Rightarrow x^2 + 8x = 0 \Rightarrow x = 0, \ x = -8$

f(x) es creciente en $(-\infty, -8) \cup (0, \infty)$.

f(x) es decreciente en $(-8, -4) \cup (-4, 0)$

F(x) posee un máximo relativo en x = -8 y un mínimo relativo en x = 0.

(3)$f''(x) = \frac{32}{(x+4)^3}$; $f''(x) \neq 0$

f(x) es cóncava hacia arriba en $(-4, \infty)$.

f(x) es cóncava hacia abajo en $(-\infty, -4)$

f(x) no presenta puntos de inflexión.

(4) $\left\{ \begin{array}{l} \lim\limits_{x \to -4^-} \frac{x^2}{x+4} = -\infty \\ \lim\limits_{x \to -4^+} \frac{x^2}{x+4} = +\infty \end{array} \right\} \Rightarrow$ la recta x = -4 es una asíntota vertical.

$\lim\limits_{x \to \infty} \frac{x^2}{x+4} = +\infty \Rightarrow$ No tiene asíntota horizontales.

$\lim\limits_{x \to \infty} \frac{x^2}{x(x+4)} = 1 = m, \ \lim\limits_{x \to \infty} \left(\frac{x^2}{x+4} - x\right) = -4 \Rightarrow$ y = x - 4 es una asíntota oblícua.

3. Una compañía de autobuses alquila un autobús de 50 plazas a grupos de 35 o más personas. Si un grupo contiene exactamente 35 personas, cada persona paga 60 dólares. En grupos mayores, la tarifa de todos se reduce en un dólar por cada persona que sobrepasa las 35.

(a) Halla la función que nos proporciona los ingresos de la compañía según el tamaño del grupo.

(b) Determina el tamaño del grupo para el cual los ingresos de la compañía serán mayores. Analiza el resultado

Solución:

(a) x = número de personas que sobrepasan las 35.

(x + 35) = nº de personas del grupo. (60 - x) = coste por persona.

Ingresos = I(x) = (x +35) . (60 - x) = $-x^2 + 25x + 2100$

(b) Derivamos la función I(x) ⇒ $I'(x) = -2x + 25$

Igualando a cero la derivada obtenemos: $x = 12'5$. Podemos comprobar, estudiando el signo de la derivada, que dicho punto es un máximo.

Teniendo en cuenta el contexto del problema debemos tomar como solución óptima un número natural, por los que determinamos los ingresos para x = 12 y x = 13.

I(12) = 2256 dólares, I(13) = 2256 dólares. Por lo tanto la solución puede ser un grupo de 47 personas o bien un grupo de 48 personas.

4. Determina la función derivada de las siguientes funciones:

(a) $f(x) = \sqrt{\frac{2x}{x^2+1}}$

(b) $f(x) = \ln \frac{e^{2x}+1}{e^{2x}-1}$

(c) $y = (x^2-2)\cdot e^{x^2-2}$

Solución:

(a) $f'(x) = \frac{\sqrt{x^2+1}\cdot(-x^2+1)}{\sqrt{2x}\cdot(x^2+1)^2}$

(b) $f'(x) = \frac{-4\cdot e^{2x}}{e^{4x}-1}$

(c) $f'(x) = e^{x^2-2}\cdot(2x^3-4x)$

5. ***(a)*** Utilizando la definición de derivada, calcula el valor de la derivada de $f(x) = \sqrt{3x-6}$ en el punto de abscisa x=3.

(b) Demuestra que la función $f(x) = |2x-10|$ es continua en x = 5, pero no es derivable en dicho punto.

(c) Determina los puntos de la función $f(x) = x^3+9x^2-9x+15$ en los cuales la tangente es paralela a la recta de ecuación $y = 12x+5$.

Solución:(a)

$$f'(3) = \lim_{x\to 3} \frac{\sqrt{3x-6}-\sqrt{3}}{x-3} = \lim_{x\to 3} \frac{3x-6-3}{(x-3)\cdot[\sqrt{3x-6}+\sqrt{3}\,]} = \lim_{x\to 3} \frac{3}{\sqrt{3x-6}+\sqrt{3}} = \frac{3}{2\sqrt{3}}$$

(b) $f(x) = \begin{cases} -2x+10, & x\le 5 \\ 2x-10, & x>5 \end{cases} \Rightarrow f'(x) = \begin{cases} -2, & x<5 \\ 2, & x>5 \end{cases}$

(b-1) $f(5) = 0 = \lim_{x\to 5^-} (-2x+10) = \lim_{x\to 5^+} (2x-10) \Rightarrow$ f(x) continua en x = 5.

(b-2) $f'_-(5) = -2 \neq 2 = f'_+(5) \Rightarrow$ f(x) NO es derivable en x = 5.

(c) $\left.\begin{cases} f'(x) = 3x^2+18x-9 \\ pendiente\ de\ y = 12x+5 \Rightarrow m = 12 \end{cases}\right\} \Rightarrow 3x^2+18x-9 = 12$

Resolviendo la ecuación anterior obtenemos: x = 7, x = -1

Los puntos que buscamos son $(7, f(7) = 736)$ y $(-1, f(-1) = 32)$.

6. Calcula los siguientes límites:

$$(a)\quad \lim_{x\to -\infty} \frac{3x-5}{\sqrt{25x^2+7}}$$

$$(b)\ \lim_{x\to \infty} \left(x - \sqrt{x^2+5x}\right)$$

$$(c)\ \lim_{x\to\infty} \left(\frac{2x+3}{2x-1}\right)^{4x}$$

Solución:

(a) $\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{3x-5}{\sqrt{25x^2+7}} = \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{-3x-5}{\sqrt{25x^2+7}} = \frac{-3}{5}$

(b) $\lim\limits_{x\to\infty} \left(x - \sqrt{x^2+5x}\right) = \lim\limits_{x\to\infty} \frac{x^2-(x^2+5x)}{x+\sqrt{x^2+5x}} = \lim\limits_{x\to\infty} \frac{-5x}{x+\sqrt{x^2+5x}} = \frac{-5}{2}$

(c) $\lim\limits_{x\to\infty} \left(\frac{2x+3}{2x-1}\right)^{4x} = e^{\lim_{x\to\infty} \frac{16x}{2x-1}} = e^8$