Examen global Matemáticas C.C.S.S. 28 Mayo (2011-2012)

PRIMERA EVALUACIÓN

1. **(a)** Dado el sistema lineal:

$$\begin{cases} \boldsymbol{x+y+z=3} \\ \boldsymbol{x-y+z=1} \end{cases}$$

(a-1) añade una ecuación para que el sistema sea incompatible.

$$\left\{\begin{matrix} \boldsymbol{x+y+z=3} \\ \boldsymbol{x-y+z=1} \\ \boldsymbol{x-y+z=4} \end{matrix}\right\} \overset{\substack{E2-E1 \\ E3-E2}}{\Longleftrightarrow} \left\{\begin{matrix} \boldsymbol{x+y+z=3} \\ \boldsymbol{-2y=-2} \\ \boldsymbol{0\cdot z=3} \end{matrix}\right\}$$ Podemos observar que el rango de la matriz de los coeficientes es 2 y el de la matriz ampliada es 3, en consecuencia el sistema es incompatible.

(a-2) añade una ecuación para que el sistema sea compatible y determinado.

$$\left\{\begin{matrix} \boldsymbol{x+y+z=3} \\ \boldsymbol{x-y+z=1} \\ \boldsymbol{z=2} \end{matrix}\right\} \overset{E2-E1}{\Longleftrightarrow} \left\{\begin{matrix} \boldsymbol{x+y+z=3} \\ \boldsymbol{-2y=-2} \\ \boldsymbol{z=3} \end{matrix}\right\}$$ Podemos observar que el rango de la matriz de los coeficientes es, el de la matriz ampliada es 3 y el nº de incógnitas es 3, en consecuencia el sistema es compatible y determinado. La solución es : x = 1, y = 1, z = 2.

(b) Dado el sistema lineal:

$$\begin{cases} \boldsymbol{2x+2y+az=8} \\ \boldsymbol{3x+2y-2z=3} \\ \boldsymbol{x-2y+z=0} \end{cases}$$

(b-1) Discute el sistema según los valores de a.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & -2 & 3 \\ 2 & 2 & a & 8 \end{array}\right) \overset{\substack{E1 \\ -3E1+E2 \\ -2E1+E3}}{\longleftrightarrow} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 8 & -5 & 3 \\ 0 & 6 & a-2 & 8 \end{array}\right) \overset{\substack{E1 \\ E2 \\ 3E2-4E3}}{\longleftrightarrow} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 8 & -5 & 3 \\ 0 & 0 & -4a-7 & -23 \end{array}\right)$$

Si -4a – 7 = 0 $\Leftrightarrow a = \frac{-7}{4} \Rightarrow rangA = 2 \neq rangA^* = 3 \Rightarrow Sistema\ incompatible$

Si $a \neq \frac{-7}{4} \Rightarrow rangA = 3 = rangA^* = n^{o}incógnitas \Rightarrow Sistema\ compatible\ y\ determinado$

(b-2) Al sustituir a por 4, el sistema equivalente al dado es:

$$\begin{cases} x-2y+z=0 \Rightarrow x=1 \\ 8y-5z=3 \Rightarrow y=1 \\ -23z=-23 \Rightarrow z=1 \end{cases}$$

2. Dada la matriz $A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 2 \\ 2 & 0 & 2 \\ 2 & 2 & 0 \end{pmatrix}$

(a) Calcula X tal que $A^2 - X = 2A^t + 8I_3$

Examen global Matemáticas C.C.S.S. 28 Mayo (2011-2012)

$$A^2 - X = 2A^t + 8I \Leftrightarrow X = A^2 - 2A^t - 8I$$

$$A^2 = A \cdot A = \begin{pmatrix} 8 & 4 & 4 \\ 4 & 8 & 4 \\ 4 & 4 & 8 \end{pmatrix},\ 2 \cdot A^t = 2 \cdot \begin{pmatrix} 0 & 2 & 2 \\ 2 & 0 & 2 \\ 2 & 2 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 4 & 4 \\ 4 & 0 & 4 \\ 4 & 4 & 0 \end{pmatrix},\ 8 \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 & 0 & 0 \\ 0 & 8 & 0 \\ 0 & 0 & 8 \end{pmatrix}$$

$$X = \begin{pmatrix} 8 & 4 & 4 \\ 4 & 8 & 4 \\ 4 & 4 & 8 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 4 & 4 \\ 4 & 0 & 4 \\ 4 & 4 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 8 & 0 & 0 \\ 0 & 8 & 0 \\ 0 & 0 & 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

(b) Calcula la inversa de $\frac{1}{2} \cdot A$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xleftrightarrow{F1 \leftrightarrow F2} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xleftrightarrow{F3 - F1} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & -1 & 1 \end{array}\right) \xleftrightarrow{F3 - F2}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & -1 & -1 & 1 \end{array}\right) \xleftrightarrow[2F2+F3]{2F1+F3} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 0 & 0 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -2 & -1 & -1 & 1 \end{array}\right) \begin{array}{c} (1/2)F1 \\ (1/2)F2 \\ (1/2)F3 \end{array} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & \frac{-1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{-1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{-1}{2} \end{array}\right)$$

Es decir: $\left[\frac{1}{2}A\right]^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{-1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{-1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{-1}{2} \end{pmatrix}$

3. Una empresa fabrica dos calidades de un bien, teniendo que producir en total un mínimo de 100 unidades y un máximo de 200. El coste de producción de una unidad de la primera calidad es de 15 € y se obtiene un beneficio unitario de 100 €. El coste de producción de una unidad de la segunda calidad es de 10 € y se obtiene un beneficio unitario de 50 €.

(a) Plantea y resuelve un programa lineal para averiguar el coste total mínimo para obtener un beneficio total de al menos 12500 €.

Examen global Matemáticas C.C.S.S. 28 Mayo (2011-2012)

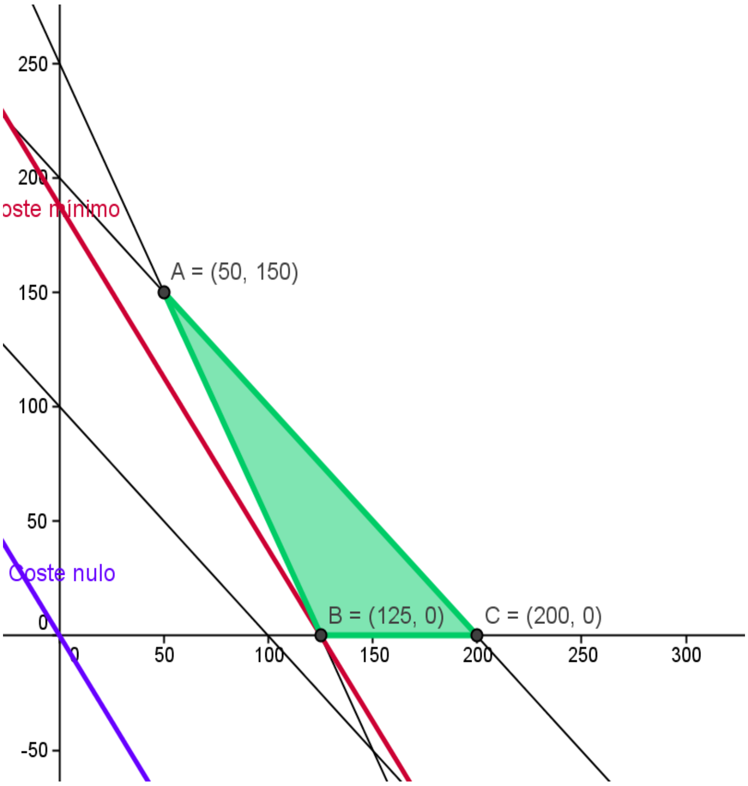
(b) Plantea y resuelve un programa lineal para averiguar el beneficio total máximo con un coste total no superior a 2550 €

	Nº unidades	Coste	Beneficio
Bien 1	x	15x	100x
Bien 2	y	10y	50y
Total	X+y	15x+10y	100x+50y

(a) Restricciones:

$$\begin{Bmatrix} x+y \geq 100 \\ x+y \leq 100 \\ 100x+50y \geq 12500 \\ x, y \geq 0 \end{Bmatrix},$$

Función objetivo: Coste = C(x,y) = 15x+10y € a minimizar.



El conjunto de soluciones factibles es la zona sombrada y la solución óptima se obtiene en el punto B = (125, 0).

El coste mínimo de 1875 € se consigue con x = 125 unidades del bien 1 e y = 0 unidades del bien 2.

(b) Restricciones:

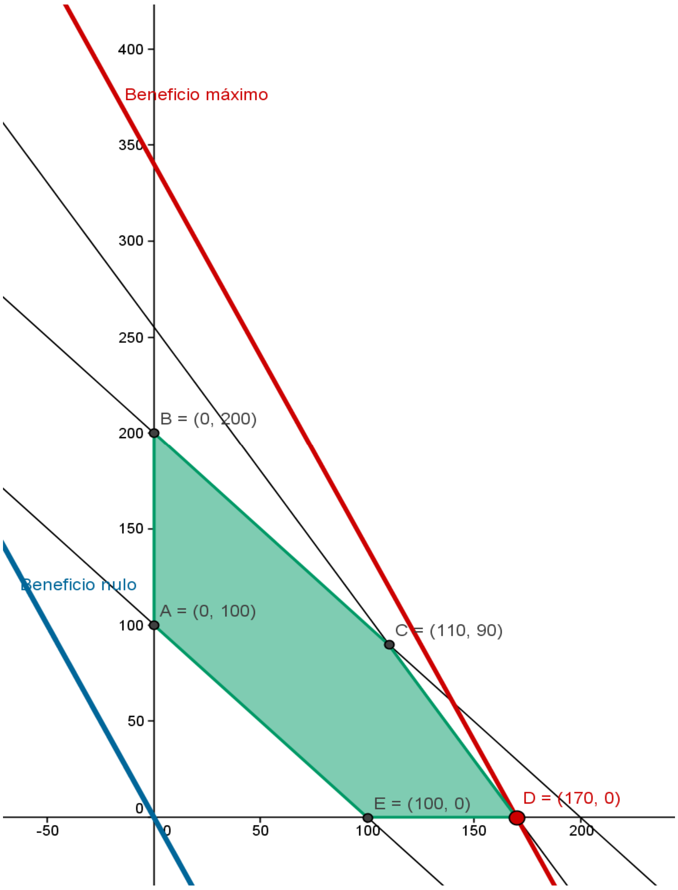
Examen global Matemáticas C.C.S.S. 28 Mayo (2011-2012)

$$\left.\begin{cases} x+y \geq 100 \\ x+y \leq 100 \\ 15x+10y \leq 2550 \\ x, y \geq 0 \end{cases}\right\},$$

Función objetivo: Beneficio = B(x,y) = 100x+50y € a maximizar.

El conjunto de soluciones factibles es la zona sombrada y la solución óptima se obtiene en el punto B = (125, 0).

El coste mínimo de 1875 € se consigue con x = 125 unidades del bien 1 e y = 0 unidades del bien 2.



El conjunto de soluciones factibles es la zona sombrada y la solución óptima se obtiene en el punto D = (170, 0).

El beneficio máximo de 17000 € se consigue con x = 170 unidades del bien 1 e y = 0 unidades del bien 2.

Examen global Matemáticas C.C.S.S. 28 Mayo (2011-2012)

SEGUNDA EVALUACIÓN

1. Estudia la continuidad y derivabilidad de la función:

$$f(x)=\begin{cases}(x+1)^2, & x\le 0\\ \dfrac{1}{x}, & 0<x<2\\ \dfrac{x}{2}, & x\ge 2\end{cases}$$

Continuidad:

$Domf = R$

$$\left\{\begin{matrix} f(0)=1\\ \lim\limits_{x\to 0^-}(x+1)^2=1\\ \lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{1}{x}=+\infty\end{matrix}\right\}\Leftrightarrow f\ presenta\ en\ x=0\ una\ discontinuidad\ inevitable\ de\ 1^{\underline{a}}\ especie$$

$$\left\{\begin{matrix} f(2)=1\\ \lim\limits_{x\to 2^-}\dfrac{1}{x}=\dfrac{1}{2}\\ \lim\limits_{x\to 2^+}\dfrac{x}{2}=1\end{matrix}\right\}\Leftrightarrow f\ presenta\ en\ x=2\ una\ discontinuidad\ inevitable\ de\ 1^{\underline{a}}\ especie$$

Derivabilidad:

La función NO es derivable en x = 0 y en x = 2 por no ser continua en dichos puntos.

En el resto de los puntos del dominio es derivable y su derivada es:

$$f(x)=\begin{cases}2(x+1), & x<0\\ \dfrac{-1}{x^2}, & 0<x<2\\ \dfrac{1}{2}, & x>2\end{cases}$$

2. (**a**) Determina las asíntotas verticales y horizontales, si las tiene, de la función:

$$f(x)=\frac{3x^2-12x+12}{x^2-4}$$

$Domf\ = R - \{-2,+2\}$

1º) $\lim_{x\to 2}\frac{3(x-2)^2}{(x-2)(x+2)}=\lim_{x\to 2}\frac{3(x-2)}{x+2}=4\Longrightarrow$ la recta x = 2 No es asíntota vertical.

2º) $\lim_{x\to -2^-}\frac{3(x-2)^2}{(x-2)(x+2)}=+\infty$, $\lim_{x\to -2^+}\frac{3(x-2)^2}{(x-2)(x+2)}=-\infty \Longrightarrow$ la recta x = -2 es asíntota vertical.

Examen global Matemáticas C.C.S.S. 28 Mayo (2011-2012)

3º) $\lim_{x \to -\infty} \frac{3(x-2)^2}{(x-2)(x+2)} = 3$, $\lim_{x \to \infty} \frac{3(x-2)^2}{(x-2)(x+2)} = 3 \Longrightarrow$ la recta y= 3 es asíntota horizontal.

(b) Calcula la función derivada de las siguientes funciones:

$$m(x) = \log_5 \left(\frac{3x-1}{2x^2}\right)^{\frac{1}{3}} = \frac{1}{3}\log_5(3x-1) - \frac{1}{3}\log_5 2 - \frac{2}{3}\log_5 x$$

$$m'(x) = \frac{1}{3} \cdot \frac{3}{3x-1} \cdot \frac{1}{ln5} - \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{x} \cdot \frac{1}{ln5}$$

$$n(x) = \left(\sqrt[3]{\frac{3}{4x-5}}\right)^4 = \left(\frac{3}{4x-5}\right)^{\frac{4}{3}}$$

$$n'(x) = \frac{4}{3} \cdot \left(\frac{3}{4x-5}\right)^{\frac{1}{3}} \cdot \left(\frac{-12}{(4x-5)^2}\right)$$

3. **(a)** Dada $f(x) = ax + b + \frac{3}{x}$, calcula a y b para que la función cumpla:

- (3, 4) se punto de la gráfica
- La recta tangente a la gráfica en ese punto sea horizontal.

$(3,4) \in gráfica \Rightarrow f(3) = 4 \Longrightarrow 3a + b + 1 = 4$

$f'(x) = a - \frac{3}{x^2}$

La recta tangente a la gráfica en ese punto sea horizontal $\Longrightarrow f'(3) = 0 \Longrightarrow f'(3) = a - \frac{1}{3} = 0$

Resolviendo el sistema: $\begin{cases} 3a + b = 3 \\ a - \frac{1}{3} = 0 \end{cases}$, obtenemos a = 1/3 y b =2

(b) Indica los extremos relativos de la función: $\boldsymbol{f(x) = \frac{x^3-1}{x^2-1}}$

$\boldsymbol{Domf = R — \{-1, +1\}}$

$$\boldsymbol{f'(x) = \frac{x^4 - 3x^2 + 2x}{(x^2-1)^2} = \frac{x(x-1)^2(x+2)}{(x^2-1)^2}}$$

$\boldsymbol{f'(x) = 0 \Rightarrow x = 0, x = -2}$

Examen global Matemáticas C.C.S.S. 28 Mayo (2011-2012)

Intervalo	**x<-2**	**-2<x<-1**	**-1<x<0**	**0<x<1**	**x>1**
Signo de f'	**f' >0**	**f' < 0**	**f' < 0**	**F' >0**	**F' >0**
Monotonía de f	**F creciente**	**F decreciente**	**F decreciente**	**F creciente**	**F creciente**

x = -2 es máximo relativo, x = 0 es mínimo relativo.

TERCERA EVALUACIÓN

1. Calcula:

1.1 $\int_1^3 \left(\frac{1}{\sqrt{x^3}} - \frac{1+x}{x}\right) dx = \int_1^3 \left(x^{\frac{-3}{2}} - \frac{1}{x} - 1\right) dx = \left[\frac{-2}{\sqrt{x}} - lnx - x\right]_1^3 = \frac{-2}{\sqrt{3}} - ln3$

1.2 $\int \left(\sqrt[3]{x^5} - \sqrt{x^5} + \frac{1+x^2}{x}\right) dx = \int \left(x^{5/3} - x^{5/2} + \frac{1}{x} + x\right) dx = \frac{3}{8}x^{8/3} - \frac{2}{7}x^{7/2} + ln|x| + \frac{1}{2}x^2 + C$

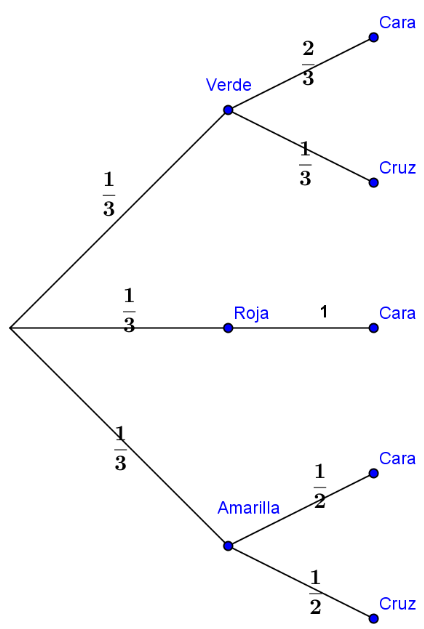
1.3 $\int_2^3 \frac{3xdx}{x^2-2} = \frac{3}{2}\int_2^3 \frac{2xdx}{x^2-2} = \frac{3}{2}\left[ln|x^2-2|\right]_2^3 = \frac{3}{2}(ln7 - ln2) = \frac{3}{2}ln\frac{7}{2}$

1.4 $\int \frac{e^{3\sqrt{x}}}{\sqrt{x}} dx = \frac{2}{3}\int \frac{3}{2\sqrt{x}} \cdot e^{3\sqrt{x}} dx = \frac{2}{3}e^{3\sqrt{x}} + C$

1. (a) Tenemos tres cajas, una verde, una roja y una amarilla, y en cada una de ellas hay una moneda. La moneda de la caja verde está trucada y la probabilidad de que salga cara es el doble de la probabilidad de que salga cruz. Laneda de la caja roja tiene dos caras. Y la moneda de la caja amarilla no está trucada. SE toma al azar una aja y se lanza la moneda que está en esa caja.

Calcula razonadamente:

(a-1) El espacio muestral del experimento.



$E = \{V \cap Cara, V \cap Cruz, R \cap Cara, A \cap Cara, A \cap Cruz\}$

(a-2) La probabilidad de que salga cara.

$$P(Cara) = \frac{1}{3} \cdot \frac{2}{3} + \frac{1}{3} + \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} = \frac{13}{18}$$

(a-3) La probabilidad de que sabiendo que ha salido cara, se haya lanzado la moneda de la caja roja.

$$P(Roja|Cara) = \frac{P(Roja \cap Cara)}{P(Cara)} = \frac{\frac{1}{3}}{\frac{13}{18}} = \frac{6}{13}$$

Examen global Matemáticas C.C.S.S. 28 Mayo (2011-2012)

(b) Sean A y B dos sucesos aleatorios. Supóngase que $P(A) = 0'4$, $P(A \cup B) = 0'7$, $P(B) = p$

(b-1) ¿Para qué valor de p son A y sucesos incompatibles?

A y B incompatibles $\Leftrightarrow P(A \cup B) = P(A) + P(B) \Leftrightarrow 0'7 = 0'4 + p \Leftrightarrow p = 0'3$

(b-2) ¿Para qué valor de p son A y B sucesos independientes?

A y B independientes $\Leftrightarrow P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$

Además sabemos que para cualquier par de sucesos: $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

Por lo tanto: $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A) \cdot P(B) \Leftrightarrow 0'7 = 0'4 + p - 0'4 \cdot p \Leftrightarrow 0'3 = (1 - 0'4)p \Leftrightarrow$

$p = 0'5$

3. En un servicio de atención al cliente, el tiempo de espera hasta recibir atención una variable normal de media 10 minutos y desviación típica 2 minutos. Se toman muestras aleatorias del tiempo de espera de los clientes que llegan en un día concreto. Se pide:

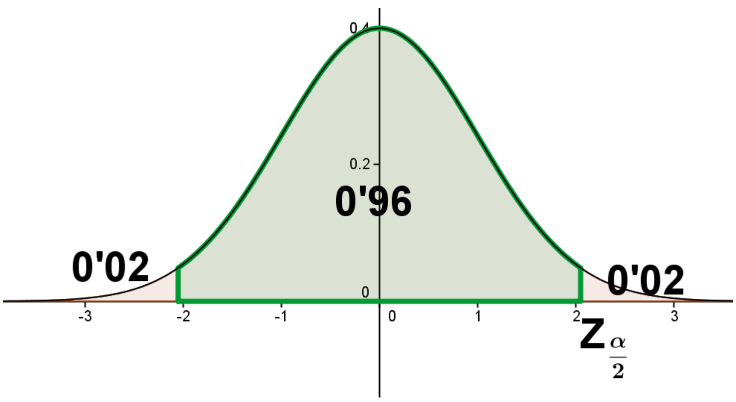
(a) ¿Cuál es la probabilidad de que el tiempo medio de espera de una muestra 25 clientes no supere los 9 minutos?

$$X = \text{tiempo espera} = N(\mu = 10, \sigma = 2) \Longrightarrow \overline{X} = \text{tiempo medio muestral} = N\left(\mu_{\overline{x}} = 10, \sigma_{\overline{x}} = \frac{2}{\sqrt{25}} = 0'4\right)$$

$$P(\overline{X} \leq 9) = P\left(Z \leq \frac{9 - 10}{0'4}\right) = P(Z \leq -2'5) = 1 - P(Z \leq 2'5) = 1 - 0'9938 = 0'0062$$

(b) Indica el intervalo de confianza al 96 % de la media muestral si se toman muestras aleatorias de 64 clientes.

$$X = \text{tiempo espera} = N(\mu = 10, \sigma = 2) \Longrightarrow \overline{X} = \text{tiempo medio muestral} = N\left(\mu_{\overline{x}} = 10, \sigma_{\overline{x}} = \frac{2}{\sqrt{64}} = 0'25\right)$$



Si $1 - \alpha = 0'96 \Longrightarrow Z_{\frac{\alpha}{2}} = 2'05$

$$P\left(Z \leq Z_{\frac{\alpha}{2}}\right) = 0'98 \cong 0'9798 \Longrightarrow Z_{\frac{\alpha}{2}} = 2'05$$

Intervalo de confianza para la media muestral:

$$\mu \pm Z_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \sigma_{\overline{x}}$$

$$(10 - 2'05 \cdot 0'25, 10 + 2'05 \cdot 0'25) =$$

$$= (9'4875, 10'5125)$$