

## Determinantes y matrices

1. Dadas las matrices:

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$$

Halla la inversa de  $A - B$ , y la matriz  $X$  tal que  $X(A - B) = A + B$ .

**Solución:**

$$A - B = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}; \quad |A - B| = 1; \quad \text{Adjunta de } (A - B) = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \Rightarrow$$
$$(A - B)^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$$

De

$$X(A - B) = A + B \Rightarrow X = (A + B) \cdot (A - B)^{-1} \Rightarrow$$

$$X = \begin{pmatrix} 4 & -3 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & -10 \\ -4 & 7 \end{pmatrix}$$

2. Calcula la matriz inversa de la matriz  $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 2 & -1 & 2 \\ 3 & 2 & -3 \end{pmatrix}$

**Solución:**

La matriz inversa viene dada por  $A^{-1} = \frac{(A_{ij})^t}{|A|}$ , siendo  $(A_{ij})$  la matriz de los adjuntos de  $A$ .

El determinante de  $A$  vale  $|A| = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 2 & -1 & 2 \\ 3 & 2 & -3 \end{vmatrix} = 1(3 \cdot -4) - 3(-6 - 6) + 1(4 + 3) = 42$

La matriz de los adjuntos es,  $A_{ij} = \begin{pmatrix} -1 & 12 & 7 \\ 11 & -6 & 7 \\ 7 & 0 & -7 \end{pmatrix}$

Luego  $A^{-1} = \frac{(A_{ij})^t}{|A|} = \frac{1}{42} \begin{pmatrix} -1 & 11 & 7 \\ 12 & -6 & 0 \\ 7 & 7 & -7 \end{pmatrix}$

3. Encuentra el valor de  $a$  que hace que la siguiente matriz no tenga inversa:

$$M = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ a & 5 & 0 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

**Solución:**

Una matriz no tiene inversa cuando su determinante vale 0.

$$|M| = \begin{vmatrix} 3 & 2 & 1 \\ a & 5 & 0 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix} = 45 - 4a - 5 = 40 - 4a$$

Como  $|M| = 0$  cuando  $a = 10$ , para ese valor de  $a$  la matriz  $M$  no tiene inversa. En cambio, si  $a \neq 10$  sí tendrá inversa.

---

4. Resuelve la ecuación matricial  $AX = BX + C$ , siendo

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}; \quad B = \begin{pmatrix} -3 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}; \quad C = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$

**Solución:**

$$AX = BX + C \Rightarrow AX - BX = C \Rightarrow (A - B)X = C \Rightarrow X = (A - B)^{-1}C$$

Cálculos:

$$A - B = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ -2 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -3 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -3 & -2 \end{pmatrix}$$

$$|A - B| = -1; \quad \text{adj}(A - B) = \begin{pmatrix} -2 & 3 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$(A - B)^{-1} = \frac{1}{-1} \begin{pmatrix} -2 & -1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -3 & -2 \end{pmatrix}$$

Por tanto,

$$X = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -3 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

5. a) Dadas las matrices  $A = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 2 & a & 0 \\ -1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$  y  $B = \begin{pmatrix} a^2 & 0 & 0 \\ 4a & a^2 & 0 \\ 1-a & 0 & 1 \end{pmatrix}$ , con  $a$  un parámetro real no

nulo, comprueba que  $A^{-1} \cdot B = A$ .

b) Calcula el rango de la matriz  $\begin{pmatrix} -1 & -1 & -1 \\ 3 & 6 & 9 \\ -5 & -10 & m \end{pmatrix}$  según los valores del parámetro real  $m$ .

**Solución:**

Cálculo de la inversa de  $A$ .

La matriz inversa viene dada por  $A^{-1} = \frac{(A_{ij})^t}{|A|}$ , siendo  $(A_{ij})$  la matriz de los adjuntos de  $A$ .

El determinante de  $A$  vale:  $|A| = -a^2$ .

La matriz de los adjuntos es:  $A_{ij} = \begin{pmatrix} -a & 2 & a \\ 0 & -a & 0 \\ 0 & 0 & a^2 \end{pmatrix}$ .

Luego  $A^{-1} = \frac{(A_{ij})^t}{|A|} = \frac{1}{-a^2} \begin{pmatrix} -a & 0 & 0 \\ 2 & -a & 0 \\ a & 0 & a^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/a & 0 & 0 \\ -2/a^2 & 1/a & 0 \\ -1/a & 0 & -1 \end{pmatrix}$

Multiplicando:

$A^{-1} \cdot B = \begin{pmatrix} 1/a & 0 & 0 \\ -2/a^2 & 1/a & 0 \\ -1/a & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a^2 & 0 & 0 \\ 4a & a^2 & 0 \\ 1-a & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 2 & a & 0 \\ -1 & 0 & -1 \end{pmatrix} = A$

b) El rango de una matriz es el orden del mayor menor no nulo.

El rango es mayor o igual que 2, pues el menor  $\begin{vmatrix} -1 & -1 \\ 3 & 6 \end{vmatrix} = -3 \neq 0$ .

Para ver si puede ser 3 hacemos su determinante.

$$\begin{vmatrix} -1 & -1 & -1 \\ 3 & 6 & 9 \\ -5 & -10 & m \end{vmatrix} = -(6m + 90) + (3m + 45) = -3m - 45$$

Ese determinante vale 0 cuando  $m = -15$ .

Por tanto: Si  $m = -15$  el rango 2; en caso contrario, el rango vale 3.

6. Sean las matrices  $A = \begin{pmatrix} x & 1 \\ 1 & x+1 \end{pmatrix}$  y  $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ .

- Encuentra el valor o valores de  $x$  de forma que  $B^2 = A$ .
- Igualmente para que  $A - I_2 = B^{-1}$ .
- Determina  $x$  para que  $A \cdot B = I_2$

**Solución:**

$$\text{a) } B^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Por tanto,

$$B^2 = A \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x & 1 \\ 1 & x+1 \end{pmatrix} \Rightarrow x = 1.$$

b) Hallamos  $B^{-1} = \frac{1}{|B|} (B_{ij})^t$ , siendo  $(B_{ij})$  la matriz de los adjuntos.

$$\text{Como } |B| = -1 \text{ y } (B_{ij}) = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow B^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Por tanto,

$$A - I_2 = B^{-1} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} x & 1 \\ 1 & x+1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow x - 1 = -1 \Rightarrow x = 0$$

c) De  $A \cdot B = I_2 \Rightarrow A = B^{-1}$ .

Por tanto,

$$\begin{pmatrix} x & 1 \\ 1 & x+1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow x = -1.$$

7. Sean las matrices

$$A = \begin{pmatrix} 4 & -3 & -3 \\ 5 & -4 & -4 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 3 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -3 \end{pmatrix}$$

- a) Determinése si  $A$  y  $B$  son invertibles y, en su caso, calcúlese la matriz inversa.  
 b) Resuélvase la ecuación matricial  $XA - B = 2I$ , siendo  $I$  la matriz identidad de orden tres.  
 c) Calcúlese  $A^{86}$ .

**Solución:**

$$(a) |A| = \begin{vmatrix} 4 & -3 & -3 \\ 5 & -4 & -4 \\ -1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 1 \Rightarrow \text{la matriz } A \text{ es invertible.}$$

$$|B| = \begin{vmatrix} 3 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -3 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow \text{la matriz } B \text{ no es invertible.}$$

Inversa de  $A$ :

$$\text{Matriz adjunta } (A_{ij}) = \begin{pmatrix} 4 & 4 & 1 \\ -3 & -3 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \Rightarrow A^{-1} = \frac{(A_{ij})^t}{|A|} = \begin{pmatrix} 4 & -3 & 0 \\ 4 & -3 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$(b) XA - B = 2I \Rightarrow XA = 2I + B \Rightarrow X = (2I + B)A^{-1}$$

$$X = \begin{pmatrix} 5 & 2 & -1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 & -3 & 0 \\ 4 & -3 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 27 & -20 & 3 \\ 17 & -13 & 2 \\ 3 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$(c) A^2 = \begin{pmatrix} 4 & -3 & -3 \\ 5 & -4 & -4 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 & -3 & -3 \\ 5 & -4 & -4 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & -3 & 0 \\ 4 & -3 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix} = A^{-1}$$

$$A^3 = A \cdot A^2 = A \cdot A^{-1} = I \Rightarrow A^4 = A \quad (A \text{ es periódica de periodo } 3)$$

$$A^{86} = A^{3 \cdot 28} \cdot A^2 = I \cdot A^2 = A^2.$$

8. Sean las matrices  $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 3 & 0 \end{pmatrix}$ ,  $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ -2 \end{pmatrix}$  e  $Y = \begin{pmatrix} -x \\ 2 \\ z \end{pmatrix}$ .

a) Determina la matriz inversa de  $A$ .

b) Halla los valores de  $x, y, z$  para los que se cumple  $AX = Y$ .

**Solución:**

a) La matriz inversa viene dada por  $A^{-1} = \frac{(A_{ij})^t}{|A|}$ , siendo  $(A_{ij})$  la matriz de los adjuntos de  $A$ .

El determinante de  $A$  vale,  $|A| = \begin{vmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 3 & 0 \end{vmatrix} = 1$

La matriz de los adjuntos es:  $A_{ij} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 3 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ .

Luego  $A^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 3 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$

b)  $AX = Y \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 3 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -x \\ 2 \\ z \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x - 2y - 2 = -x \\ y = 2 \\ -x + 3y = z \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = y + 1 \\ y = 2 \\ -x + 3y = z \end{cases} \Rightarrow$

$\Rightarrow x = 3, y = 2, z = 3.$

9. a) Despeja la matriz  $X$  en la ecuación:  $2X - A \cdot X = C - B \cdot X$

b) Halla la matriz  $X$  sabiendo que

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \text{ y } C = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & -2 \\ 1 & 3 & 3 \end{pmatrix}$$

**Solución:**

$$\text{a) } 2X - A \cdot X = C - B \cdot X \Rightarrow 2X - A \cdot X + B \cdot X = C \Rightarrow (2I - A + B) \cdot X = C \Rightarrow$$

$$\Rightarrow X = (2I - A + B)^{-1} \cdot C, \text{ suponiendo que exista la matriz inversa}$$

b) Para las matrices dadas:

$$2I - A + B = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Como  $|2I - A + B| = 2$ , dicha matriz tiene inversa. Vamos a calcularla.

La matriz de los adjuntos es: 
$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & -3 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Luego, 
$$(2I - A + B)^{-1} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \\ -3 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

Por tanto,

$$X = (2I - A + B)^{-1} \cdot C = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \\ -3 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & -2 \\ 1 & 3 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

10. Dadas las matrices  $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 2 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$  y  $B = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 3 & -2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

a) Calcula  $A \cdot B$ .

b) Calcula la matriz inversa de  $B$  y utilízela para resolver la ecuación  $X \cdot B = B + A$ .

**Solución:**

$$a) A \cdot B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 2 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 3 & -2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2+3 & 0 & -1+3 \\ 4+3 & -2 & -2 \\ -2-1 & 0 & 1-1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 2 \\ 7 & -2 & -2 \\ -3 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$b) X \cdot B = B + A \Rightarrow X = (B + A) \cdot B^{-1}$$

Cálculo de la inversa de  $B$ .

La matriz inversa viene dada por  $B^{-1} = \frac{1}{|B|} \cdot (B_{ij})^t$ , siendo  $(B_{ij})$  la matriz de los adjuntos.

El determinante de  $B$  vale:  $|B| = -6$ .

$$\text{La matriz de los adjuntos es: } B_{ij} = \begin{pmatrix} -2 & -3 & 2 \\ 0 & 3 & 0 \\ -2 & -3 & -4 \end{pmatrix}.$$

$$\text{Luego } B^{-1} = \frac{1}{-6} \begin{pmatrix} -2 & 0 & -2 \\ -3 & 3 & -3 \\ 2 & 0 & -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/3 & 0 & 1/3 \\ 1/2 & -1/2 & 1/2 \\ -1/3 & 0 & 2/3 \end{pmatrix}$$

Por tanto:

$$X = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 2 \\ 5 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1/3 & 0 & 1/3 \\ 1/2 & -1/2 & 1/2 \\ -1/3 & 0 & 2/3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/3 & 0 & 7/3 \\ 7/6 & 1/2 & 7/6 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

11. Tres familias van a una heladería. La primera familia toma 2 helados pequeños y 1 grande; la segunda familia toma 2 pequeños, 1 mediano y 1 grande; y la tercera familia toma 1 pequeño y 2 grandes. A la primera familia le cobran 4,50 €, a la segunda, 6,30 €, y a la tercera, 5,40 €. Se denotan por  $x$ ,  $y$ ,  $z$  las incógnitas que representan respectivamente el precio de un helado pequeño, de uno mediano, y de uno grande.

a) Dé la matriz  $A$  que expresa el número de helados pequeños, medianos, y grandes que toma cada una de las tres familias, de manera que

$$A \cdot X = B$$

donde  $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$  y  $B = \begin{pmatrix} 4,5 \\ 6,3 \\ 5,4 \end{pmatrix}$ . (0,5 puntos)

b) Calcule  $A^{-1}$ . (1,5 puntos)

c) Resuelva la ecuación matricial  $A \cdot X = B$ . (0,5 puntos)

**Solución:**

a) La matriz  $A$  es:  $A = \begin{matrix} & \begin{matrix} p & m & g \end{matrix} \\ \begin{matrix} Fam1 \\ Fam2 \\ Fam3 \end{matrix} & \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \end{matrix}$ .

Por tanto,  $A \cdot X = B \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4,5 \\ 6,3 \\ 5,4 \end{pmatrix}$

b) La matriz inversa viene dada por  $A^{-1} = \frac{1}{|A|} \cdot (A_{ij})'$ , siendo  $(A_{ij})$  la matriz de los adjuntos.

Determinante de  $A$ :  $|A| = 3$ . Matriz de los adjuntos:  $(A_{ij}) = \begin{pmatrix} 2 & -3 & -1 \\ 0 & 3 & 0 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$

Luego,

$$A^{-1} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ -3 & 3 & 0 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

c)  $A \cdot X = B \Rightarrow X = A^{-1} \cdot B \Rightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ -3 & 3 & 0 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4,50 \\ 6,30 \\ 5,40 \end{pmatrix} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 3,60 \\ 5,40 \\ 6,30 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1,20 \\ 1,80 \\ 2,10 \end{pmatrix}$

12. a) Despeja la matriz  $X$  en la ecuación:  $2 \cdot X - B = A \cdot X$

b) Halla la matriz  $X$  de la ecuación anterior sabiendo que

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ -1 & 3 & 1 \end{pmatrix} \text{ y } B = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -3 & 3 \\ 4 & -3 \end{pmatrix}$$

**Solución:**

a)  $2 \cdot X - B = A \cdot X \Rightarrow 2X - A \cdot X = B \Rightarrow (2I - A) \cdot X = B \Rightarrow X = (2I - A)^{-1} \cdot B$ , suponiendo que exista la matriz inversa.

b) Para las matrices dadas:

$$2I - A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ -1 & 3 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -2 & 1 & 0 \\ 1 & -3 & 1 \end{pmatrix}.$$

Como  $|2I - A| = -4$ , dicha matriz tiene inversa. Vamos a calcularla.

La matriz de los adjuntos es:  $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 3 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ .

Luego,  $(2I - A)^{-1} = -\frac{1}{4} \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \\ 5 & 3 & 1 \end{pmatrix}$

Por tanto,

$$X = (2I - A)^{-1} \cdot B = -\frac{1}{4} \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \\ 5 & 3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -3 & 3 \\ 4 & -3 \end{pmatrix} = -\frac{1}{4} \begin{pmatrix} -4 & 4 \\ 4 & -4 \\ 0 & -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

13. Considera la ecuación matricial  $X + X \cdot A + B^t = 2C$ , donde las matrices  $A$ ,  $B$  y  $C$  vienen dadas por

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -2 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} -3 & 5 \\ 4 & -5 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

y donde  $B^t$  denota la matriz traspuesta de  $B$ .

- Despeja la matriz  $X$  en la ecuación matricial, ¿qué orden tiene?
- Calcula la matriz  $2C - B^t$  y la inversa de la matriz  $I + A$ , siendo  $I$  la matriz identidad de orden 3.
- Resuelve la ecuación matricial obteniendo el valor de la matriz  $X$ .

**Solución:**

$$\begin{aligned} \text{a) } X + X \cdot A + B^t = 2C &\Rightarrow X \cdot (I + A) + B^t = 2C \Rightarrow X(I + A) = 2C - B^t \Rightarrow \\ &\Rightarrow X = (2C - B^t)(I + A)^{-1} \end{aligned}$$

La matriz  $2C - B^t$  es de dimensión  $2 \times 3$ ; la matriz  $I + A$  es de dimensión  $3 \times 3$ . Por tanto,  $X$  será de dimensión  $2 \times 3$ .

$$\begin{aligned} \text{b) } 2C - B^t &= 2 \cdot \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -3 & 4 & 4 \\ 5 & -5 & 2 \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} -2 & 2 & 2 \\ 4 & -2 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -3 & 4 & 4 \\ 5 & -5 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & -2 \\ -1 & 3 & -2 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$$I + A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ -1 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}. \text{ El determinante de esta matriz vale } -1: |I + A| = -1.$$

Su inversa es  $(I + A)^{-1} = \frac{1}{|I + A|} (\text{Adj}(I + A))^t$ , siendo  $(\text{Adj}(I + A))^t$  la traspuesta de la matriz de los adjuntos de  $I + A$ .

$$\text{Como } \text{Adj}(I + A) = \begin{pmatrix} -3 & -1 & 0 \\ -2 & -1 & 0 \\ -2 & -1 & 1 \end{pmatrix}, \text{ se tiene que}$$

$$(I + A)^{-1} = \frac{1}{-1} \begin{pmatrix} -3 & -2 & -2 \\ -1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

14. Resuelve la ecuación matricial  $M \cdot X = M + M^T$ , siendo  $X$  una matriz desconocida de tamaño  $2 \times 2$ ,  $M = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$  y  $M^T$  la traspuesta de  $M$ .

**Solución:**

Despejando se tiene:

$$M \cdot X = M + M^T \Rightarrow M^{-1} \cdot M \cdot X = M^{-1} \cdot M + M^{-1} M^T \Rightarrow X = I + M^{-1} M^T$$

Matriz traspuesta:  $M^T = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$

Cálculo de  $M^{-1}$  por el método de Gauss:

$$\begin{aligned} (M|I) &= \left( \begin{array}{cc|cc} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 3 & 4 & 0 & 1 \end{array} \right) \rightarrow F2 - 3F1 \left( \begin{array}{cc|cc} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & -3 & 1 \end{array} \right) \rightarrow \\ &\rightarrow F2 / (-2) \left( \begin{array}{cc|cc} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 3/2 & -1/2 \end{array} \right) \rightarrow F1 - 2F2 \left( \begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 3/2 & -1/2 \end{array} \right) \end{aligned}$$

La matriz inversa es  $M^{-1} = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 3/2 & -1/2 \end{pmatrix}$ .

Por tanto,

$$\begin{aligned} X = I + M^{-1} M^T &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 3/2 & -1/2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 1/2 & 5/2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 1/2 & 7/2 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

15. Determina una matriz  $X$  tal que  $A + 2XB = C$ , siendo

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 0 & 3 & 1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 8 & -1 & -1 \end{pmatrix}. \text{ Se pide:}$$

**Solución:**

$$A + 2XB = C \Rightarrow 2XB = C - A \Rightarrow X = \frac{1}{2}(C - A)B^{-1}$$

$$C - A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 8 & -1 & -1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 0 & 3 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 4 & 2 \\ 8 & -4 & -2 \end{pmatrix}$$

Inversa de  $B$ :

$$|B| = 4. \quad \text{Matriz de los adjuntos: } (B_{ij}) = \begin{pmatrix} -1 & -3 & 2 \\ 2 & 2 & 0 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

$$\text{Luego } B^{-1} = \frac{(B_{ij})^t}{|B|} = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} -1 & 2 & -1 \\ -3 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Por tanto,

$$X = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & 4 & 2 \\ 8 & -4 & -2 \end{pmatrix} \frac{1}{4} \begin{pmatrix} -1 & 2 & -1 \\ -3 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & 2 \end{pmatrix} = \frac{1}{8} \begin{pmatrix} -8 & 8 & 8 \\ 0 & 8 & -16 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \end{pmatrix}$$