

Matrices y determinantes

Observación: La mayoría de estos ejercicios se han propuesto en las pruebas de Selectividad, en los distintos distritos universitarios españoles.

1. Sean las matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$ y $C = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$. Halla la matriz $X = A \cdot (B - C)$.

Solución:

$$X = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \left[\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \right] = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}$$

2. Calcula dos matrices cuadradas A y B sabiendo que $2A + 3B = \begin{pmatrix} -4 & 5 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}$ y que

$$A - B = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Solución:

Es un sistema lineal.

$$2A + 3B = \begin{pmatrix} -4 & 5 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}$$
$$A - B = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Multiplicando por 3 la segunda ecuación y sumando miembro a miembro ambas ecuaciones, se tiene:

$$5A = \begin{pmatrix} -4 & 5 \\ -2 & -1 \end{pmatrix} + 3 \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 5 \\ -5 & 5 \end{pmatrix} \Rightarrow A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

Sustituyendo y despejando en la segunda ecuación:

$$B = A - \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \Rightarrow B = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

3. Dadas las matrices:

$$A = \begin{pmatrix} -2 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -3 \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$$

determina la matriz X que verifica la ecuación $A \cdot X = B \cdot C$.

Solución:

Si $X = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, debe cumplirse que:

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} -2 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} -2a-c & -2b-d \\ a+c & b+d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \\ \Rightarrow \begin{cases} -2a-c=5 \\ a+c=1 \\ -2b-d=2 \\ b+d=1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a=-6 \\ c=7 \\ b=-3 \\ d=4 \end{cases} \end{aligned}$$

La matriz $X = \begin{pmatrix} -6 & -3 \\ 7 & 4 \end{pmatrix}$.

4. Sean las matrices $A = \begin{pmatrix} -2 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 0 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$.

a) Calcula la matriz $C = B \cdot A - A^t \cdot B^t$.

b) Halla la matriz X que verifique $A \cdot B \cdot X = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \end{pmatrix}$.

Solución:

$$\begin{aligned} \text{a) } C &= \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 0 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -2 & -1 \\ -1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} -1 & -1 & 0 \\ -4 & -2 & 2 \\ 3 & 2 & -1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -1 & -4 & 3 \\ -1 & -2 & 2 \\ 0 & 2 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 3 & -3 \\ -3 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

b) Para que pueda hacerse la multiplicación ABX , la matriz X debe ser de dimensión 2×1 .

Sea $X = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$, entonces:

$$\begin{aligned} A \cdot B \cdot X &= \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} -2 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 0 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} -6 & 3 \\ -3 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \end{pmatrix} \Rightarrow \\ \Rightarrow \begin{pmatrix} -6a+3b \\ -3a+2b \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} -6a+3b=4 \\ -3a+2b=2 \end{cases} \Rightarrow a=-2/3, b=0 \Rightarrow X = \begin{pmatrix} -2/3 \\ 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

5. Sea $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$.

- a) Calcula A^2 y expresa el resultado en función de la matriz identidad.
b) Utiliza la relación hallada con la matriz identidad para calcular A^{2005} .

Solución:

a) $A^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = -I$

b) Puede observarse que:

$$A = A$$

$$A^2 = -I$$

$$A^3 = A^2 \cdot A = -I \cdot A = -A$$

$$A^4 = A^3 \cdot A = -A \cdot A = -A^2 = I$$

$$A^5 = A^4 \cdot A = I \cdot A = A$$

$$A^6 = A^5 \cdot A = A \cdot A = A^2 = -I$$

...

...

Los posibles resultados son:

$$A^{4n} = I$$

$$A^{4n+1} = A$$

$$A^{4n+2} = -I$$

$$A^{4n+3} = -A$$

En consecuencia, como $A^{2005} = A^{4 \cdot 501 + 1} = A$.

6. Sean las matrices $A = \begin{pmatrix} x & y \\ 0 & y \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} a \\ 1 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} y \\ ay \end{pmatrix}$, $D = \begin{pmatrix} 6-ay \\ 1-a \end{pmatrix}$

- a) Si $AB - C = D$, plantea un sistema de dos ecuaciones y dos incógnitas (representadas por x e y) en función de a .
 b) ¿Para qué valores de a el sistema tiene solución?; ¿es siempre única? Encuentra una solución para $a = 1$ con $y \neq 1$.

Solución:

$$a) AB - C = D \Leftrightarrow \begin{pmatrix} x & y \\ 0 & y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} y \\ ay \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6-ay \\ 1-a \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} ax+y \\ y \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} y \\ ay \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6-ay \\ 1-a \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} ax \\ y-ay \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6-ay \\ 1-a \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} ax = 6-ay \\ (1-a)y = 1-a \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} ax+ay = 6 \\ (1-a)y = 1-a \end{cases}$$

b) Si observamos la primera ecuación, vemos que cuando $a = 0$ queda $0 = 6$, lo que indica que el sistema será incompatible.

Igualmente, la segunda ecuación, cuando $a = 1$, queda $0 = 0$, lo que indica que el sistema será compatible indeterminado.

Por tanto:

- Si $a = 0$ el sistema es incompatible.
- Si $a = 1$, el sistema es compatible indeterminado: con infinitas soluciones.
- Si $a \neq 0$ y 1 , el sistema es compatible determinado. En cada caso tendrá una única solución.

Para $a = 1$ el sistema queda: $\begin{cases} x+y=6 \\ 0=0 \end{cases} \Leftrightarrow (y=6-x) \Leftrightarrow \begin{cases} x=t \\ y=6-t \end{cases}$

Algunas soluciones son: $x = 0, y = 6$; $x = 3, y = 3$; ...

La única que excluimos en este caso es: $x = 5, y = 1$.

7. ¿Es posible que una matriz de tamaño 3×2 coincida con su traspuesta? ¿Y con su inversa?

Solución:

- Una matriz rectangular nunca puede coincidir con su traspuesta.

Por ejemplo, si la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 8 \\ 0 & 3 \\ 4 & -2 \end{pmatrix}$, su traspuesta es $A^t = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 4 \\ 8 & 3 & -2 \end{pmatrix}$. Evidentemente

no coinciden.

- Una matriz rectangular no tiene inversa.

8. Halla una matriz X que verifique la igualdad: $AX = B$, con $A = \begin{pmatrix} 4 & 6 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 4 & -2 \end{pmatrix}$

¿Verifica también la matriz X la igualdad $XA = B$?

Solución:

Sea $X = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ la matriz buscada.

$$\text{Si } \begin{pmatrix} 4 & 6 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 4 & -2 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 4a+6c & 4b+6d \\ 2a+4c & 2b+4d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 4 & -2 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} 4a+6c=2 \\ 2a+4c=4 \\ 4b+6d=2 \\ 2b+4d=-2 \end{cases} \Rightarrow a=-4; c=3; b=5; d=-3 \Rightarrow \text{La matriz es: } X = \begin{pmatrix} -4 & 5 \\ 3 & -3 \end{pmatrix}$$

Normalmente no se verifica que $XA = B$, pues el producto de matrices no es conmutativo; no obstante, en este caso, basta con multiplicar para comprobarlo.

$$\text{Efectivamente, } \begin{pmatrix} -4 & 5 \\ 3 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 & 6 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -6 & -4 \\ 6 & 6 \end{pmatrix} \neq B$$

9. Se consideran las matrices $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 4 & 20 \\ 16 & 5 \end{pmatrix}$

a) Calcula A^2 y $(A^2)^{-1}$

b) Despeja X de la ecuación matricial $A^2 X = B$

c) Calcula X .

Solución:

$$\text{a) } A^2 = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & 1 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$$

$$\text{Si } (A^2)^{-1} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}, \text{ se verifica: } \begin{pmatrix} 7 & 1 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} 7a+c & 7b+d \\ 3a+4c & 3b+4d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} 7a+c=1 \\ 3a+4c=0 \\ 7b+d=0 \\ 3b+4d=1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a=4/25 \\ b=-1/25 \\ c=-3/25 \\ d=7/25 \end{cases}$$

$$\text{Luego, } (A^2)^{-1} = \begin{pmatrix} 4/25 & -1/25 \\ -3/25 & 7/25 \end{pmatrix}$$

$$\text{b) } A^2 X = B \Rightarrow X = (A^2)^{-1} B$$

$$\text{c) } X = (A^2)^{-1} B \Rightarrow X = \begin{pmatrix} 4/25 & -1/25 \\ -3/25 & 7/25 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 & 20 \\ 16 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 4 & -1 \end{pmatrix}$$

10. Determina la matriz A que verifica la ecuación $AB + A = 2B'$, donde $B = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ y B' representa la matriz transpuesta de B .

Solución:

$$AB + A = 2B' \Leftrightarrow A(B + I) = 2B'$$

Si la matriz $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ se tendrá:

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \left[\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right] = 2 \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & 0 \\ -2 & 4 \end{pmatrix}$$

Multiplicando e igualando se tiene:

$$\begin{pmatrix} 4a & -a+3b \\ 4c & -c+3d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & 0 \\ -2 & 4 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} 4a = 6 \\ 4c = -2 \\ -a+3b = 0 \\ -c+3d = 4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = 3/2 \\ c = -1/2 \\ b = 1/2 \\ d = 7/6 \end{cases}$$

La matriz $A = \begin{pmatrix} 3/2 & 1/2 \\ -1/2 & 7/6 \end{pmatrix}$

11. Dadas las matrices $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 6 \end{pmatrix}$, averigua si existe una matriz C que cumpla $B \cdot C = A$, y si es el caso, calcúlala.

Solución:

Si existiese, la matriz C podría calcularse despejando. Esto es: $B \cdot C = A \Rightarrow C = B^{-1} \cdot A$.

Como el determinante de B vale 0, no existe su matriz inversa. En consecuencia no existe la matriz C buscada.

De otra forma:

Si suponemos que existe C y que es igual a $C = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, debe cumplirse que:

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} a+3c & b+3d \\ 2a+6c & 2b+6d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a+3c=2 \\ 2a+6c=1 \\ b+3d=3 \\ 2b+6d=2 \end{cases}, \text{ que como puede verse fácilmente se trata de dos sistemas}$$

incompatibles: si $a+3c=1$, su doble $2a+6c$ debe valer 2, y no 1 como se indica.

12. Sean las matrices $A = \begin{pmatrix} x & 1 \\ 1 & x+1 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$.

- Encuentra el valor o valores de x de forma que $B^2 = A$.
- Igualmente para que $A - I_2 = B^{-1}$.
- Determine x para que $A \cdot B = I_2$.

Solución:

$$a) B^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Por tanto,

$$B^2 = A \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x & 1 \\ 1 & x+1 \end{pmatrix} \Rightarrow x = 1.$$

b) Hallamos $B^{-1} = \frac{1}{|B|} (B_{ij})^t$, siendo (B_{ij}) la matriz de los adjuntos.

$$\text{Como } |B| = -1 \text{ y } (B_{ij}) = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow B^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Por tanto,

$$A - I_2 = B^{-1} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} x & 1 \\ 1 & x+1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow x - 1 = -1 \Rightarrow x = 0$$

Nota: La matriz inversa se puede hallar por cualquier otro método.

c) De $A \cdot B = I_2 \Rightarrow A = B^{-1}$.

Por tanto,

$$\begin{pmatrix} x & 1 \\ 1 & x+1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow x = -1.$$

13. Calcula los valores de x, y, z que verifican la siguiente ecuación matricial:

$$\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Solución:

Operando con las matrices se tiene:

$$\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x + 2y + 2z = 2 \\ 2x + 2y + z = 0 \\ x - z = 0 \end{cases} \rightarrow (\text{transformando por Gauss})$$

$$\Rightarrow E1 - E2 \begin{cases} z = 2 \\ 2x + 2y + z = 0 \\ x - z = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} z = 2 \\ 2y = -2x - z \\ x = z \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 2 \\ y = -3 \\ z = 2 \end{cases}$$

14. Halla todas las matrices X tales que $AX = XA$, siendo $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}$.

Solución:

Si $X = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, entonces:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 4 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 4 & 2 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} a & b \\ 4a+2c & 4b+2d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a+4b & 2b \\ c+4d & 2d \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a = a + 4b \\ b = 2b \\ 4a + 2c = c + 4d \\ 4b + 2d = 2d \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = a \\ b = 0 \\ c = 4d - 4a \\ d = d \end{cases}$$

Las matrices pedidas son: $X = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 4d - 4a & d \end{pmatrix}$.

Por ejemplo, una de ellas es: $X = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -8 & -1 \end{pmatrix}$.

15. Sea la matriz 2×2 :

$$A = \begin{pmatrix} a & -3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$$

Calcula el valor de a sabiendo que AA^t es una matriz diagonal.

Solución:

$$AA^t = \begin{pmatrix} a & -3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & 2 \\ -3 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^2 + 9 & 2a - 12 \\ 2a - 12 & 20 \end{pmatrix}$$

Si es igual a una matriz diagonal, se cumple:

$$\begin{pmatrix} a^2 + 9 & 2a - 12 \\ 2a - 12 & 20 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x & 0 \\ 0 & y \end{pmatrix} \Rightarrow 2a - 12 = 0 \Rightarrow a = 6.$$

La matriz inicial debe ser: $A = \begin{pmatrix} 6 & -3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$.

16. Encuentra, si existen, matrices cuadradas A , de orden 2, distintas de la matriz identidad, tales que $A \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot A$

¿Cuántas matrices A existen con esa condición? Razona tu respuesta.

Solución:

Sea $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ la matriz buscada. Entonces:

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} a+b & b \\ c+d & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ a+c & b+d \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a+b = a \\ b = b \\ c+d = a+c \\ d = b+d \end{cases} \Rightarrow b = 0; a = d.$$

La matriz buscada es $A = \begin{pmatrix} a & 0 \\ c & a \end{pmatrix}$, con $a \neq 1$ o $c \neq 0$. Por ejemplo, $A = \begin{pmatrix} -4 & 0 \\ 17 & -4 \end{pmatrix}$.

17. Calcula los valores de a para los cuales la inversa de la matriz

$$A = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} a & 4 \\ -4 & a \end{pmatrix}$$

coincide con sus traspuesta.

Solución:

La traspuesta de A es $A^t = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} a & -4 \\ 4 & a \end{pmatrix}$.

Como $A^t = A^{-1}$ se cumplirá que

$$A \cdot A^t = A \cdot A^{-1} = I \Leftrightarrow \frac{1}{5} \begin{pmatrix} a & 4 \\ -4 & a \end{pmatrix} \frac{1}{5} \begin{pmatrix} a & -4 \\ 4 & a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{1}{25} \begin{pmatrix} a^2+16 & 0 \\ 0 & 16+a^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \frac{a^2+16}{25} = 1 \Rightarrow a = \pm 3$$

18. Dada la ecuación matricial: $A \cdot X + 2B = X$ con $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$; $B = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

a) Despeja la matriz X . (3 puntos)

b) Calcula la matriz X . (7 puntos)

Solución:

$$\text{a) } A \cdot X + 2B = X \Rightarrow 2B = X - A \cdot X \Rightarrow 2B = (I - A)X \Rightarrow (I - A)^{-1} \cdot 2B = X$$

b) Calculamos cada una de las matrices producto:

$$2B = \begin{pmatrix} 2 & -4 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$$I - A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & -2 \\ -1 & -3 \end{pmatrix}$$

La inversa de $I - A$ existe, pues: $|I - A| = 4$

$$\text{Adjunta de } I - A: \quad ((I - A)_{ij}) = \begin{pmatrix} -3 & 1 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}.$$

$$\text{Luego: } (I - A)^{-1} = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} -3 & 2 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$$

$$\text{Por tanto, } X = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} -3 & 2 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & -4 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} -6 & 16 \\ 2 & -8 \end{pmatrix}$$

19. Una empresa fabrica juguetes de tres tipos diferentes T_1 , T_2 y T_3 . El precio de coste de cada juguete y los ingresos que obtiene la empresa por cada juguete vendido vienen dados por la siguiente tabla:

	T_1	T_2	T_3
Precio de coste	4 €	6 €	9 €
Ingreso	10 €	16 €	24 €

El número de ventas anuales es de 4500 juguetes T_1 , 3500 juguetes T_2 y 1500 juguetes T_3 . Sabiendo que la matriz de costes (C) y la matriz de ingresos (I) son matrices diagonales y que la matriz de ventas anuales (V) es una matriz fila.

a) Determina las matrices C, I y V.

b) Obtén, utilizando las matrices anteriores, la matriz de costes anuales, la matriz de ingresos anuales, y la matriz de beneficios anuales, correspondientes a los tres tipos de juguetes.

Solución:

a) Matriz de ventas: $V = (4500 \quad 3500 \quad 1500)$

Matriz de costes: $C = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 9 \end{pmatrix}$

Matriz de ingresos: $I = \begin{pmatrix} 10 & 0 & 0 \\ 0 & 16 & 0 \\ 0 & 0 & 24 \end{pmatrix}$

b) Costes anuales:

$$V \cdot C = (4500 \quad 3500 \quad 1500) \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 9 \end{pmatrix} =$$

$$= (4 \cdot 4500 \quad 6 \cdot 3500 \quad 9 \cdot 1500) = (18000 \quad 21000 \quad 13500)$$

Ingresos anuales:

$$V \cdot I = (4500 \quad 3500 \quad 1500) \begin{pmatrix} 10 & 0 & 0 \\ 0 & 16 & 0 \\ 0 & 0 & 24 \end{pmatrix} =$$

$$= (10 \cdot 4500 \quad 16 \cdot 3500 \quad 24 \cdot 1500) = (45000 \quad 56000 \quad 36000)$$

Beneficios anuales:

$$VC - VI = (45000 \quad 56000 \quad 36000) - (18000 \quad 21000 \quad 13500) =$$

$$= (27000 \quad 35000 \quad 22500)$$

Los beneficios anuales son de 27000 euros por la venta de los juguetes T_1 ; 35000 euros por la venta de los juguetes T_2 y 22500 euros por la venta de los juguetes T_3 .

20. Un almacén de ruedas de vehículos de diferentes tipos tiene en *stock* los componentes (en cientos de unidades) dados por la tabla siguiente:

	Neumáticos	Embellecedores	Llantas
Utilitarios	3,1	0,3	2,1
Berlinas	1,6	1,1	0,6
Todo terreno	0,9	0	0,2

La cantidad de quilos de materia prima necesaria para cada componente es:

	Acero	Caucho
Neumáticos	0,1	4,6
Embellecedores	1	0,05
Llantas	5	0

- Calcula el total de acero acumulado en el almacén.
- Calcula la cantidad de caucho acumulado en el almacén.

Solución:

- a) Cantidad de acero: (Unidades de vehículos × quilos de acero)

$$\text{Utilitarios: } 310 \cdot 0,1 + 30 \cdot 1 + 210 \cdot 5 = 1111$$

$$\text{Berlinas: } 160 \cdot 0,1 + 110 \cdot 1 + 60 \cdot 5 = 426$$

$$\text{Todo terreno: } 90 \cdot 0,1 + 0 \cdot 1 + 20 \cdot 5 = 109$$

$$\text{Total: } 1111 + 426 + 109 = 1646 \text{ kg}$$

- b) Cantidad de caucho: (Unidades de vehículos × quilos de caucho)

$$\text{Utilitarios: } 310 \cdot 4,6 + 30 \cdot 0,05 + 210 \cdot 0 = 1427,5$$

$$\text{Berlinas: } 160 \cdot 4,6 + 110 \cdot 0,05 + 60 \cdot 0 = 741,5$$

$$\text{Todo terreno: } 90 \cdot 4,6 + 0 \cdot 0,05 + 20 \cdot 0 = 414$$

$$\text{Total: } 1427,5 + 741,5 + 414 = 2583 \text{ kg}$$

NOTA: Las cantidades anteriores pueden obtenerse mediante cálculo matricial así:

$$\text{Matriz de vehículos: } V = \begin{pmatrix} 310 & 30 & 210 \\ 160 & 110 & 60 \\ 90 & 0 & 20 \end{pmatrix}$$

$$\text{Matriz de materias primas: } M = \begin{pmatrix} 0,1 & 4,6 \\ 1 & 0,05 \\ 5 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\text{Matriz de cantidades de acero y caucho: } V \cdot M = \begin{matrix} & \begin{matrix} \text{acero} & \text{caucho} \end{matrix} \\ \begin{matrix} 1111 & 1427,5 \\ 426 & 741,5 \\ 109 & 414 \end{matrix} \\ \text{Total} & \begin{matrix} 1646 & 2583 \end{matrix} \end{matrix}$$

21. Un importador de globos los importa de dos colores: de color naranja (N) y de color fresa (F). Todos ellos se envasan en paquetes de 2, 5 y 10 unidades, que vende a los siguientes precios (en pesetas):

	2 unidades	5 unidades	10 unidades
Color N	4	8	12
Color F	3	5	8

Sabiendo que en un año se venden el siguiente número de paquetes,

	Color N	Color F
De 2 unidades	700000	50000
De 5 unidades	600000	40000
De 10 unidades	500000	500000

se pide:

- Resume la información anterior en dos matrices A y B: A será una matriz 2×3 que recoja las ventas en un año y B una matriz 3×2 que recoja los precios.
- Calcula los elementos de la diagonal principal de la matriz A por B y dar su significado.
- Calcula los elementos de la diagonal principal de la matriz B por A y dar su significado

Solución:

a) Matriz de ventas: $A = \begin{pmatrix} 700000 & 600000 & 500000 \\ 50000 & 40000 & 500000 \end{pmatrix}$

Matriz de precios: $B = \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 8 & 5 \\ 12 & 8 \end{pmatrix}$

b) $AB = \begin{pmatrix} 700000 & 600000 & 500000 \\ 50000 & 40000 & 500000 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 8 & 5 \\ 12 & 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 13600000 & 9100000 \\ 6520000 & 4350000 \end{pmatrix} = C$

El elemento $c_{11} = 13600000$ da los ingresos por venta de los globos de color naranja.

El elemento $c_{22} = 4350000$ da los ingresos por venta de los globos de color fresa.

c) $BA = \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 8 & 5 \\ 12 & 8 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 700000 & 600000 & 500000 \\ 50000 & 40000 & 500000 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2950000 & 2520000 & 3500000 \\ 5850000 & 5000000 & 6500000 \\ 8800000 & 7520000 & 10000000 \end{pmatrix} = D$

El elemento $d_{11} = 2950000$ da los ingresos por venta de los globos envasados de dos en dos (de ambos colores).

El elemento $d_{22} = 5000000$ da los ingresos por venta de los paquetes de 5 unidades.

El elemento $d_{33} = 10000000$ da los ingresos por venta de los paquetes de 10 unidades.

Nota: Puede observarse que la suma de los elementos de ambas diagonales es la misma: 17950000 pta.

22. En una clínica dental colocan tres tipos de prótesis, P_1 , P_2 y P_3 , en dos modelos diferentes, M_1 y M_2 . El número de prótesis que tienen ya construidas viene dado en la matriz A. El precio, en euros, de cada prótesis viene dado en la matriz B

$$A = \begin{matrix} & M_1 & M_2 \\ P_1 & \begin{pmatrix} 11 & 21 \end{pmatrix} \\ P_2 & \begin{pmatrix} 16 & 12 \end{pmatrix} \\ P_3 & \begin{pmatrix} 9 & 14 \end{pmatrix} \end{matrix} \quad B = \begin{matrix} & P_1 & P_2 & P_3 \\ M_1 & \begin{pmatrix} 150 & 160 & 240 \end{pmatrix} \\ M_2 & \begin{pmatrix} 210 & 190 & 220 \end{pmatrix} \end{matrix}$$

- a) Obtener, si es posible, las matrices $C = A \cdot B$ y $D = B \cdot A$
 b) ¿Qué información proporcionan los elementos c_{12} de la matriz C y el elemento d_{22} de D?
 c) ¿Qué elemento de C o de D proporciona el valor total de todas las prótesis del tipo P_2 ?

Solución:

$$a) C = A \cdot B = \begin{pmatrix} 11 & 21 \\ 16 & 12 \\ 9 & 14 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 150 & 160 & 240 \\ 210 & 190 & 220 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6060 & 5750 & 7260 \\ 4920 & 4840 & 6480 \\ 4290 & 4100 & 5240 \end{pmatrix}$$

$$D = B \cdot A = \begin{pmatrix} 150 & 160 & 240 \\ 210 & 190 & 220 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 11 & 21 \\ 16 & 12 \\ 9 & 14 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6370 & 8430 \\ 7330 & 9770 \end{pmatrix}$$

- b) $c_{12} = 11 \cdot 160 + 21 \cdot 190 = 5750$ no proporciona ninguna información válida, pues multiplica el número de prótesis P_1 con los precios de las prótesis P_2 .

$d_{22} = 210 \cdot 21 + 190 \cdot 12 + 220 \cdot 14 = 9770$ da el precio de todas las prótesis (P_1 , P_2 y P_3) del modelo M_2 .

- c) El precio de todas las prótesis del tipo $P_2 = 16 \cdot 160 + 14 \cdot 190 = 4840$ es el elemento c_{22} .

23. Tres personas van a una pescadería. La primera compra 1 kg de salmonetes y 2 de calamares, la segunda compra 2 kg de salmonetes, 1 de calamares y 1 kg de sardinas, y la tercera compra 1 kg de salmonetes y 3 de calamares.

- Dar una matriz 3×3 que exprese el número de kg de salmonetes, de calamares y de sardinas que ha comprado cada una de las tres personas.
- Si en esa compra la primera persona ha gastado un total de 59 euros, la segunda un total de 47 euros y la tercera un total de 84 euros, ¿qué vale un kg de salmonetes, qué vale un kg de calamares y qué vale un kg de sardinas?

Solución:

a) Una posibilidad es la siguiente:

$$\begin{array}{l} \\ 1^a \\ 2^a \\ 3^a \end{array} \begin{array}{ccc} S & C & S \\ \left(\begin{array}{ccc} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 0 \end{array} \right) \end{array}$$

b) Sean x , y , z los precios de un kg de salmonetes, calamares y sardinas, respectivamente. Se tendrá el sistema

$$\left. \begin{array}{l} x + 2y = 59 \\ 2x + y + z = 47 \\ x + 3y = 84 \end{array} \right\}$$

Si a la primera ecuación se le resta la tercera, se tiene:

$$\left. \begin{array}{l} x + 2y = 59 \\ 2x + y + z = 47 \\ y = 25 \end{array} \right\} \Rightarrow \text{(Sustituyendo) } x = 9; z = 4$$

Luego los salmonetes están a 9 euros el kg, los calamares a 25 y las sardinas a 4 euros el kg.

NOTA: Matricialmente, el sistema tiene la siguiente expresión:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 59 \\ 47 \\ 84 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 0 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 59 \\ 47 \\ 84 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 0 & -2 \\ -1 & 0 & 1 \\ -5 & 1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 59 \\ 47 \\ 84 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 \\ 25 \\ 4 \end{pmatrix}$$

24. En la siguiente tabla se indica la audiencia prevista (en miles de espectadores) por tres cadenas de TV (A, B, C) en una determinada semana y en cada uno de los tres segmentos horarios (Mañana: M, Tarde: T y Noche: N)

	A	B	C
M	40	60	20
T	60	40	30
N	100	80	90

Sin embargo, como consecuencia de la calidad de los programas emitidos, se produce en la audiencia prevista (y en todos los segmentos horarios) una reducción del 10 % para la cadena A, una reducción del 5 % para la cadena B y un aumento del 20 % para la cadena C.

- Obtener la matriz que representa la nueva audiencia de las tres cadenas A, B y C, en los tres segmentos horarios M, N y T.
- Sabiendo que el beneficio que obtiene cada cadena por espectador es de 3 euros por la mañana, de 4 euros por la tarde y de 6 euros por la noche, obtener mediante cálculo matricial los beneficios para cada una de las cadenas.

Solución:

a)

Cadena A: conserva el 90 % de la audiencia → hay que multiplicar por 0,90

Cadena B: conserva el 95 % de la audiencia → hay que multiplicar por 0,95

Cadena C: consigue 20 % más → hay que multiplicar por 1,20

La nueva audiencia se obtiene multiplicando las matrices:

$$\begin{pmatrix} 40 & 60 & 20 \\ 60 & 40 & 30 \\ 100 & 80 & 90 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0,90 & 0 & 0 \\ 0 & 0,95 & 0 \\ 0 & 0 & 1,20 \end{pmatrix} = \begin{matrix} M \\ T \\ N \end{matrix} \begin{matrix} A & B & C \\ \begin{pmatrix} 36 & 57 & 24 \\ 54 & 38 & 36 \\ 90 & 76 & 108 \end{pmatrix} \end{matrix}$$

b) El beneficio será:

$$\begin{pmatrix} 3 & 4 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 36 & 57 & 24 \\ 54 & 38 & 36 \\ 90 & 76 & 108 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & B & C \\ 864 & 779 & 864 \end{pmatrix}$$

El beneficio para la cadena A será de 864000 €; para la cadena B de 779000 €; para la cadena C de 864000 €.

25. a) Mediante cálculo matricial, discute y resuelve el sistema:

$$\begin{cases} 2x - y + z = -3 \\ 2x + 3y - z = 1 \\ 2x + 7y - 3z = 5 \end{cases}$$

b) Calcula la matriz X solución de la ecuación $2X + \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} -1 & 4 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}$.

Solución:

a) La matriz de coeficientes y términos independientes asociada a este sistema es:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & 1 & -3 \\ 2 & 3 & -1 & 1 \\ 2 & 7 & -3 & 5 \end{array} \right)$$

Aplicando transformaciones elementales:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & 1 & -3 \\ 2 & 3 & -1 & 1 \\ 2 & 7 & -3 & 5 \end{array} \right) \xrightarrow{\substack{F2-F1 \\ F3-F1}} \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & 1 & -3 \\ 0 & 4 & -2 & 4 \\ 0 & 8 & -4 & 8 \end{array} \right)$$

Como las filas 2ª y 3ª son proporcionales, el sistema es compatible indeterminado equivalente a:

$$\begin{cases} 2x - y + z = -3 \\ 4y - 2z = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x - y + z = -3 \\ 2y - z = 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2x = y - z - 3 \\ z = -2 + 2y \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = -\frac{1}{2} - \frac{1}{2}y \\ z = -2 + 2y \end{cases}$$

$$\text{O bien: } \begin{cases} x = -\frac{1}{2} - \frac{1}{2}t \\ y = t \\ z = -2 + 2t \end{cases}$$

$$\text{b) } 2X + \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} -1 & 4 \\ 4 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2X = \begin{pmatrix} -1 & 4 \\ 4 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} -1 & 4 \\ 4 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -14 & 15 \\ -9 & -11 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 13 & -11 \\ 13 & 12 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow X = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 13 & -11 \\ 13 & 12 \end{pmatrix}$$

26. Tres familias van a una cafetería. La primera familia toma 2 cafés, 1 cortado y 2 descafeinados; la segunda familia toma 3 cafés y 2 cortados; y la tercera familia toma 1 café y 2 descafeinados. A la primera familia le cobran 5 €; a la segunda, 5,1 €; y a la tercera, 2,9 €. Se denota por x , y , z las incógnitas que representan respectivamente los precios de un café, de un cortado y de un descafeinado.

a) Dar la matriz A que expresa el nombre de cafés, de cortados y de descafeinados que toma cada una de las familias, de manera que $A \cdot X = B$

$$\text{donde } X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \text{ y } B = \begin{pmatrix} 5 \\ 5,1 \\ 2,9 \end{pmatrix}$$

b) Calcular A^{-1} .

c) Resolver la ecuación matricial $A \cdot X = B$

Solución:

Si designamos por C , Co y D los cafés, los cortados y los descafeinados, respectivamente, la matriz A puede ser la siguiente:

$$\begin{array}{l} 1^{\text{a}} \text{ familia} \\ 2^{\text{a}} \text{ familia} \\ 3^{\text{a}} \text{ familia} \end{array} \begin{array}{ccc} C & Co & D \\ \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 3 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \end{array} \cdot \text{Esto es: } A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 3 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

b) La matriz inversa es $A^{-1} = \frac{(A_{ij})^t}{|A|}$, siendo (A_{ij}) la matriz de los adjuntos.

Como $|A| = -2$ y $(A_{ij}) = \begin{pmatrix} 4 & -6 & -2 \\ -2 & 2 & 1 \\ -4 & 6 & 1 \end{pmatrix}$, se tiene:

$$A^{-1} = \frac{1}{-2} \begin{pmatrix} 4 & -2 & -4 \\ -6 & 2 & 6 \\ -2 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 2 \\ 3 & -1 & -3 \\ 1 & -1/2 & -1/2 \end{pmatrix}$$

c) $AX = B \Rightarrow X = A^{-1}B$, luego:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 2 \\ 3 & -1 & -3 \\ 1 & -1/2 & -1/2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 \\ 5,1 \\ 2,9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,90 \\ 1,20 \\ 1 \end{pmatrix}$$

El precio de cada café es:

Café: 0,90 euros; Cortado: 1,20 euros; Descafeinado: 1 euro.