Tema 1: MATRICES. OPERACIONES CON MATRICES

1. DEFINICIÓN Y TIPO DE MATRICES

DEFINICIÓN.

Una matriz es un conjunto de números reales dispuestos en filas y columnas. Si en ese conjunto hay $m \times n$ números escritos en forma de tabla con *m* filas y *n* columnas, a esa tabla la llamaremos **matriz de dimensión *m*×n**. Los elementos de una matriz se suelen encerrar entre paréntesis. Una matriz genérica de dimensión $m \times n$ se representa por:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \quad \text{o bien} \quad A = \left(a_{ij}\right)_{j=1,2,\dots,n}^{i=1,2,\dots,m}$$

en la que a_{ij} indica que este elemento se halla en la fila *i-ésima* y en la columna *j-ésima*.

Ejemplo 1: La matriz $\begin{pmatrix} 2 & 5 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & 3 & -2 \\ 0 & 4 & 1 & -3 \end{pmatrix}$ es de dimensión 3×4 (se lee "*tres por cuatro*") y algunos de sus elementos son: $a_{11} = 2$ $a_{32} = 4$ $a_{23} = 3$ $a_{34} = -3$

IGUALDAD DE MATRICES

Dos matrices A_{mn} y B_{mn} de **igual dimensión** se dice que son iguales si los términos que ocupan idénticas posiciones son iguales.

CLASIFICACIÓN

Según su aspecto podemos clasificar las matrices en los siguientes tipos:

- **<u>Matriz fila</u>:** Es una matriz de dimensión $1 \times n$; un ejemplo sería: $\begin{pmatrix} 1 & 4 & -2 & 3 \end{pmatrix}$
- **<u>Matriz columna</u>:** Es una matriz de dimensión $m \times 1$; un ejemplo sería: $\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$
- **<u>Matriz cuadrada</u>:** Es una matriz con el mismo números de filas que de columnas. (Una matriz que **no sea cuadrada** se llama **rectangular)**. Una matriz cuadrada A_{nn} se denota simplemente por A_n y se dice de *orden n*. Los elementos a_{ii} de *A* forman su **diagonal principal** mientras que los a_{ij} tales que $i + j = n + 1$ constituyen la diagonal segundaria.

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{pmatrix}$$

Diagonal secundaria

Diagonal principal

- **<u>Matriz nula</u>**: Es aquella en que todos sus elementos son 0.

- **<u>Matriz triangular</u>**: Es una <u>matriz cuadrada</u> en la que todos los elementos situados por encima o por debajo de la diagonal principal son nulos. Si son cero los elementos que están por debajo de la diagonal principal se dice que es **triangular superior**; si son cero los elementos que están por encima de la diagonal principal se dice que es **triangular inferior**.

- **<u>Matriz diagonal</u>**: Es una <u>matriz cuadrada</u> en la que todos los elementos situados fuera de la diagonal principal son nulos. Un ejemplo es:

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

- **<u>Matriz unidad</u>**: Es la matriz diagonal en la que todos los elementos de la diagonal principal son 1. Hay una para cada orden y la matriz unidad de orden n se indica por I_n; por ejemplo, la matriz unidad de orden 3 sería: $I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

- **<u>Matriz opuesta</u>**: Es la matriz cuyos elementos son los opuestos de los elementos de la matriz dada. Por ejemplo: dada la matriz $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 7 & -1 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}$ su opuesta es $-A = \begin{pmatrix} -2 & -3 \\ -7 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$

- **<u>Matriz traspuesta</u>**: Se llama matriz traspuesta de A_{mn} y se representa por A^t_{mn} a la matriz que resulta de intercambiar, ordenadamente, las filas por las columnas.

Ejemplo: La traspuesta de la matriz $\begin{pmatrix} 2 & 5 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & 3 & -2 \\ 0 & 4 & 1 & -3 \end{pmatrix}$ es la matriz $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 5 & -1 & 4 \\ -1 & 3 & 1 \\ 0 & -2 & -3 \end{pmatrix}$

- **<u>Matriz simétrica</u>**: Es la matriz cuadrada que cumple que $a_{ij} = a_{ji}$ para todo i, j. Es decir, los elementos simétricos respecto de la diagonal principal son iguales. Una matriz simétrica es aquella que coincide con su traspuesta.

2. OPERACIONES CON MATRICES

2.1 SUMA

Dadas dos matrices de **igual dimensión**, se llama suma de ambas a la matriz de la misma dimensión que se obtiene sumando los elementos de la misma posición. Por ejemplo, para dos matrices de orden 2×3:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}+b_{11} & a_{12}+b_{12} & a_{13}+b_{13} \\ a_{21}+b_{21} & a_{22}+b_{22} & a_{23}+b_{23} \end{pmatrix}$$

- **Propiedades de la suma de matrices**

  a) $A+B=B+A$ (conmutativa)

  b) $A+\left(B+C\right)=\left(A+B\right)+C=A+B+C$ (asociativa)

  c) $A+0=0+A$ siendo 0 la matriz nula de orden el de A

  d) $A+\left(-A\right)=0$ siendo $-A$ la matriz opuesta.

2.2 PRODUCTO DE UN ESCALAR POR UNA MATRIZ

El producto de un número por una matriz será la matriz obtenida multiplicando todos los elementos de la matriz por dicho número. Por ejemplo, para una matriz de orden 2×3 tendremos:

$$p\cdot\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p\cdot a_{11} & p\cdot a_{12} & p\cdot a_{13} \\ p\cdot a_{21} & p\cdot a_{22} & p\cdot a_{23} \end{pmatrix}$$

- **Propiedades del producto de un número por una matriz.**

  a) $p\cdot\left(A+B\right)=p\cdot A+p\cdot B$

  b) $p\cdot\left(q\cdot A\right)=p\cdot q\cdot A$

  c) $\left(p+q\right)\cdot A=p\cdot A+q\cdot A$

2.3 PRODUCTO DE MATRICES

Dadas dos matrices A y B, diremos que son *multiplicables* en este orden, y se escribe $A\cdot B$ o AB, si el número de columnas de A es igual al número de filas de B. Si se verifica esta condición y $A=\left(a_{ij}\right)$ es de orden $m\times n$ y $B=\left(b_{ij}\right)$ de orden $n\times p$, la matriz producto $C=A\cdot B$ es de orden $m\times p$, $C=\left(c_{ij}\right)$, y el elemento c_{ik} viene definido por:

$$c_{ik}=a_{i1}\cdot b_{1k}+a_{i2}\cdot b_{2k}+\ldots+a_{in}\cdot b_{nk} \quad \text{es decir,} \quad c_{ik}=\sum_{h=1}^{n} a_{ih}\cdot b_{hk}$$

El elemento c_{ik} de la matriz producto viene dado por el producto de la fila *i* de la matriz *A* por la columna *k* de la matriz *B*, como se indica en el siguiente esquema:

$$\begin{pmatrix} \\ a_{i1} & a_{i2} & \dots & a_{in} \\ \\ \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} b_{1k} \\ b_{2k} \\ \dots \\ b_{nk} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} & & | & \\ & & | & \\ - & - & c_{ik} & - \\ & & | & \end{pmatrix}$$

Ejemplo 2: Si $A=\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$ y $B=\begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 0 & 4 & -5 \end{pmatrix}$ la matriz producto $A\cdot B$ es:

$$A\cdot B=\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 0 & 4 & -5 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 2\cdot1+1\cdot0 & 2\cdot(-2)+1\cdot4 & 2\cdot3+1\cdot(-5) \\ 0\cdot1+(-2)\cdot0 & 0\cdot(-2)+(-2)\cdot4 & 0\cdot3+(-2)\cdot(-5) \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & -8 & 10 \end{pmatrix}$$

Observación importantísima: Para poder hacer el producto de dos matrices A y B siempre ha de ocurrir que <u>el número de columnas de la primera coincida con el número de filas de la segunda</u>. En cualquier otro caso el producto no es posible realizarlo. La matriz producto tiene el número de filas de la primera matriz y el número de columnas de la segunda. Es decir, si A es una matriz de dimensión $m\times p$, y B es otra de dimensión $p\times n$, la matriz producto, $C=A\cdot B$ tendrá dimensión $m\times n$

$$A_{m\times p}\cdot B_{p\times n}=C_{m\times n}$$

- **Propiedades del producto.**
  a) *Asociativa:* Si A, B y C son matrices multiplicables, se tiene que $A\cdot(B\cdot C)=(A\cdot B)\cdot C$

  b) *Distributividad respecto de la suma:* $A\cdot(B+C)=A\cdot B+A\cdot C$

  c) *No conmutatividad:* En general el producto de matrices no es conmutativo. Unas veces porque no es posible hacerlo (si la matriz A es de orden 2×3 y la B es de orden 3×3 podremos hacer el producto $A\cdot B$ pero no el producto $B\cdot A$). Y otras veces siendo posibles los dos productos, sencillamente no coinciden.

Ejerclase 1: Dadas las matrices $A=\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$ y $B=\begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ calcula las matrices producto $A\cdot B$ y $B\cdot A$ y comprueba que son distintas

Ejerclase 2: Dadas las matrices $A=\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -5 \end{pmatrix}$ y $B=\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}$ calcula cuando sea posible:

a) $2A-3B$ b) $A\cdot B$ c) $A^t\cdot B^t$

Ejerclase 3: Dadas las matrices:

$A=\begin{pmatrix}1 & -1 & 3 & 5\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}4\\5\\0\\-1\end{pmatrix}$, $C=\begin{pmatrix}3 & 2 & 7 & 9\\4 & 0 & 1 & -2\\0 & 3 & 1 & 1\end{pmatrix}$ y $D=\begin{pmatrix}7 & 2\\1 & -1\\0 & 2\\2 & -2\end{pmatrix}$ calcula cuando sea posible:

a) $A\cdot B$ b) $B\cdot A$ c) $C\cdot B$ d) $C\cdot D$ e) $C\cdot A$

Ejerclase 4: Dadas las matrices $A=\begin{pmatrix}2 & 1 & -1\\3 & 0 & 4\\2 & 1 & 3\end{pmatrix}$ y $B=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\2 & -1 & 1\\3 & 2 & 0\end{pmatrix}$ calcula:

a) $3A-2B$ b) $A\cdot B$ c) $B\cdot A$ d) A^2 e) B^3 f) $A^2-3A+2I$

Ejerclase 5: Dadas las matrices $A=\begin{pmatrix}a & 1\\0 & a\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\0 & 1 & 0\\0 & 0 & 1\end{pmatrix}$ y $C=\begin{pmatrix}2 & 2\\2 & 2\end{pmatrix}$ calcula:

a) A^{50} b) B^{100} c) C^{200} d) C^n

Ejercicios propuestos: 1, 2, 5, 6, 7 y 8

3. MATRIZ INVERSA

Una matriz cuadrada de orden n se dice **INVERSIBLE, regular** o que **tiene matriz inversa** si existe una matriz cuadrada del mismo orden, que se denota por A^{-1}, tal que:

$$A\cdot A^{-1}=A^{-1}\cdot A=I_n \qquad I_n \text{ es la matriz unidad de orden } n.$$

¡No toda matriz cuadrada tiene inversa! Más adelante veremos bajo que condiciones una matriz tiene inversa.

Ejerclase 6: Siendo $A=\begin{pmatrix}1 & 1 & 2\\2 & 0 & -1\\-6 & -1 & 0\end{pmatrix}$ comprobar que su matriz inversa es

$$A^{-1}=\begin{pmatrix}-1 & -2 & -1\\6 & 12 & 5\\-2 & -5 & -2\end{pmatrix}$$

3.1 CÁLCULO DE LA MATRIZ INVERSA POR EL MÉTODO DE GAUSS-JORDAN

Se llaman operaciones elementales en una matriz a las que consisten en:

1. Permutar entre sí dos filas (o dos columnas)
2. Multiplicar una fila por un número distinto de cero (igualmente una columna)
3. Sustituir una fila por ella misma sumada o restada con otra u otras multiplicadas por números.

(Observa similitud con las operaciones que hacíamos en las ecuaciones de un sistema en la aplicación del método de Gauss).

Vamos a ejemplificar el cálculo de la matriz inversa de un matriz por el denominado método de Gauss-Jordan (está basado en la realización de operaciones elementales con las filas de la matriz de partida y no entramos en la justificación del método):

Ejemplo 3. Hallar por el método de Gauss-Jordan la matriz inversa de la siguiente:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 2 \\ 2 & 1 & 0 \\ 3 & -2 & 2 \end{pmatrix}$$

<u>Resolución:</u>

Se escribe una matriz compuesta de la matriz dada y la matriz unidad de la forma siguiente:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & -2 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & -2 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

Hemos de transformar la matriz anterior mediante operaciones elementales con las filas para que la matriz anterior quede de la forma:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ 0 & 1 & 0 & a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ 0 & 0 & 1 & a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{array}\right)$$

El proceso consiste en triangular la matriz de la parte izquierda mediante las operaciones ya comentadas y luego eliminar los elementos que están por encima de la diagonal superior. Veámoslo en la matriz dada:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & -2 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & -2 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{F2+(-1)\cdot F1} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & -2 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & -2 & -1 & 1 & 0 \\ 3 & -2 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{2\cdot F3+(-3)\cdot F1}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & -2 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & -2 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & -2 & -3 & 0 & 2 \end{array}\right) \xrightarrow{3\cdot F3+(-2)\cdot F2} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & -2 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & -2 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & -7 & -2 & 6 \end{array}\right)$$

Con esto hemos obtenido una matriz triangular en la parte izquierda. Ahora haremos cero los elementos que hay por encima de la diagonal principal

$$\xrightarrow{F1+F3}\left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & -2 & 0 & -6 & -2 & 6 \\ 0 & 3 & -2 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & -7 & -2 & 6 \end{array}\right)\xrightarrow{F2+(-1)F3}\left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & -2 & 0 & -6 & -2 & 6 \\ 0 & 3 & 0 & 6 & 3 & -6 \\ 0 & 0 & -2 & -7 & -2 & 6 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{3\cdot F1+2\cdot F2}\left(\begin{array}{ccc|ccc} 6 & 0 & 0 & -6 & 0 & 6 \\ 0 & 3 & 0 & 6 & 3 & -6 \\ 0 & 0 & -2 & -7 & -2 & 6 \end{array}\right)$$

Por último dividimos cada fila por el elemento de la diagonal correspondiente para que queden en la diagonal principal de la parte izquierda de la matriz sólo unos.

$$\xrightarrow{\frac{F1}{6};\frac{F2}{3};\frac{F3}{-2}}\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{7}{2} & 1 & -3 \end{array}\right)$$

La matriz inversa de la dada es por tanto $A^{-1}=\begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & -2 \\ \frac{7}{2} & 1 & -3 \end{pmatrix}$

Observación importante: Si en el proceso de triangulación una fila o más de la matriz de la izquierda sale con todos sus elementos cero, entonces la matriz NO tiene inversa.

Ejerclase 7: Hallar (si es posible) por el método de Gauss-Jordan las matrices inversas de las siguientes:

a) $M=\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$ b) $N=\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & -4 \end{pmatrix}$ c) $P=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$

d) $Q=\begin{pmatrix} -2 & 4 & -7 \\ 0 & 1 & -2 \\ 1 & -2 & 4 \end{pmatrix}$ e) $R=\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$

Ejercicio propuesto. Hallar por el método de Gauss-Jordan las matrices inversas (si existen) de las siguientes:

a) $A=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 3 & 7\end{pmatrix}$ b) $B=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 2 & 5\end{pmatrix}$ c) $C=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ -1 & 2 & 3\\ 0 & 1 & 2\end{pmatrix}$ d) $D=\begin{pmatrix}2 & 1 & -1\\ 1 & 2 & -4\\ 0 & 3 & -7\end{pmatrix}$

Sol:

a) $A^{-1}=\begin{pmatrix}7 & -2\\ -3 & 1\end{pmatrix}$ b) $B^{-1}=\begin{pmatrix}5 & -2\\ -2 & 1\end{pmatrix}$ c) $C^{-1}=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 2 & 2 & -3\\ -1 & -1 & 2\end{pmatrix}$ d) No tiene

4. RANGO DE UNA MATRIZ

Se llama rango de una matriz A al número de filas linealmente independientes que posea.

En una matriz, el número de filas L.I. coincide con el número de columnas L.I. Según esto, el **rango de una matriz** es el número de filas o de columnas L.I. que posea.

5. DETERMINANTE DE UNA MATRIZ CUADRADA

5.1 DETERMINANTE DE MATRICES CUADRADAS DE ÓRDENES 1, 2 Y 3

El **determinante** de una matriz **es siempre un escalar**

a) Determinantes de primer orden. Si es $A=(a_{11})$ una matriz de orden 1, entonces el determinante es el número: $\det A=|A|=a_{11}$

b) Determinantes de 2º orden. Si es A una matriz de orden 2, $A=\begin{pmatrix}a_{11} & a_{12}\\ a_{21} & a_{22}\end{pmatrix}$, el determinante se define como el número: $\det A=|A|=\begin{vmatrix}a_{11} & a_{12}\\ a_{21} & a_{22}\end{vmatrix}=a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}$

c) Determinantes de 3er orden. Si es A una matriz de orden 3, $A=\begin{pmatrix}a_{11} & a_{12} & a_{13}\\ a_{21} & a_{22} & a_{23}\\ a_{31} & a_{32} & a_{33}\end{pmatrix}$, el determinante se define como el número:

$$\det A=|A|=\begin{vmatrix}a_{11} & a_{12} & a_{13}\\ a_{21} & a_{22} & a_{23}\\ a_{31} & a_{32} & a_{33}\end{vmatrix}=a_{11}\cdot\begin{vmatrix}a_{22} & a_{23}\\ a_{32} & a_{33}\end{vmatrix}-a_{21}\cdot\begin{vmatrix}a_{12} & a_{13}\\ a_{32} & a_{33}\end{vmatrix}+a_{31}\cdot\begin{vmatrix}a_{12} & a_{13}\\ a_{22} & a_{23}\end{vmatrix}$$

Si se desarrollan los determinantes de orden 2 y se ordenan los sumandos se obtiene:

$$|A| = (a_{11} \cdot a_{22} \cdot a_{33} + a_{12} \cdot a_{23} \cdot a_{31} + a_{21} \cdot a_{32} \cdot a_{13}) - (a_{13} \cdot a_{22} \cdot a_{31} + a_{12} \cdot a_{21} \cdot a_{33} + a_{23} \cdot a_{32} \cdot a_{11})$$

Existe una regla nemotécnica para el cálculo de determinantes de tercer orden denominada **REGLA DE SARRUS** con la que obtenemos el valor del determinante y cuyo esquema es:

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ c & a & b \\ b & c & a \end{vmatrix} \qquad \begin{vmatrix} c & b & a \\ b & a & c \\ a & c & b \end{vmatrix}$$

Productos con signo + Productos con signo $-$

Ejemplo 4: Hallar el determinante de la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}$

Resolución:

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 3 \end{vmatrix} = 1 \cdot 3 - (-2) \cdot 2 = 3 + 4 = 7$$

Ejemplo 5: Hallar el determinante de la matriz $A = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 2 \\ 2 & 1 & 0 \\ 3 & -2 & 2 \end{pmatrix}$

Resolución: Aplicando la regla de Sarrus:

$$|A| = [2 \cdot 1 \cdot 2 + (-2) \cdot 0 \cdot 3 + 2 \cdot (-2) \cdot 2] - [2 \cdot 1 \cdot 3 + (-2) \cdot 2 \cdot 2 + 0 \cdot (-2) \cdot 2] =$$
$$[4 + 0 - 8] - [6 - 8 + 0] = -4 - (-2) = -4 + 2 = -2$$

Ejerclase 8:

1. Halla los siguientes determinantes de orden 2:

a) $\begin{vmatrix} 1 & -3 \\ 3 & -8 \end{vmatrix}$ b) $\begin{vmatrix} a & -2 \\ -1 & 5 \end{vmatrix}$ c) $\begin{vmatrix} a & -x \\ 3 & a \end{vmatrix}$

2. Calcular los determinantes de las matrices de orden 3:

a) $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 3 & 0 & 1 \\ 4 & -1 & 1 \end{pmatrix}$ b) $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -4 \\ 0 & 1 & -3 \\ 2 & -3 & 2 \end{pmatrix}$ c) $C = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 3 & 7 & -2 \\ 2 & 0 & 5 \end{pmatrix}$ d) $D = \begin{pmatrix} 0 & -2 & 4 \\ 3 & -1 & -6 \\ 3 & -5 & 2 \end{pmatrix}$

Tres propiedades que facilitan el cálculo de algunos determinantes son las siguientes:

1. Si en un determinante hay una fila o una columna de ceros, entonces vale cero.
2. El determinante de una matriz triangular vale el producto de los elementos de su diagonal principal.
3. El determinante de una matriz cuadrada coincide con el determinante de su traspuesta.

Ejercicios propuestos: 3,4

5.2 **MATRIZ ADJUNTA DE UNA MATRIZ CUADRADA**

Sea la matriz de orden n $\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$.

Se define el **adjunto del elemento** a_{ij} como el valor del determinante que se obtiene al suprimir en la matriz de partida la fila *i-ésima* y la columna *j-ésima* cambiado de signo si $i+j$ es impar.

Se define la **Matriz Adjunta** de la matriz A como la matriz que se obtiene al sustituir en la matriz A cada elemento por su correspondiente adjunto. La matriz adjunta de A se denota por: $Adj(A)$

Ejemplo 6a: Calcular los adjuntos de los elementos de la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$

Resolución:

$$a_{11} = 1 \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \Rightarrow adj(a_{11}) = +|2| = 2 \quad (i+j=2 \text{ par})$$

$$a_{12} = -1 \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \Rightarrow adj(a_{12}) = -|0| = 0 \quad (i+j=3 \text{ impar})$$

$$a_{21} = 0 \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \Rightarrow adj(a_{21}) = -|-1| = 1 \quad (i+j=3 \text{ impar})$$

$$a_{22} = 2 \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \Rightarrow adj(a_{22}) = +|1| = 1 \quad (i+j=4 \text{ par})$$

Ejemplo 6b: Calcula la matriz adjunta de la matriz A:

$$Adj(A) = \begin{pmatrix} |2| & -|0| \\ -|-1| & |1| \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Ejemplo 7a: Calcular los adjuntos de los elementos de la matriz:

$$B=\begin{pmatrix}1 & 0 & -2\\ 3 & 4 & -1\\ 2 & 0 & 3\end{pmatrix}$$

$$a_{11}=1 \Rightarrow \begin{pmatrix}1 & 0 & -2\\ 3 & 4 & -1\\ 2 & 0 & 3\end{pmatrix} \Rightarrow adj(a_{11})=+\begin{vmatrix}4 & -1\\ 0 & 3\end{vmatrix}=12 \quad (i+j=2 \text{ par})$$

$$a_{12}=0 \Rightarrow \begin{pmatrix}1 & 0 & -2\\ 3 & 4 & -1\\ 2 & 0 & 3\end{pmatrix} \Rightarrow adj(a_{12})=-\begin{vmatrix}3 & -1\\ 2 & 3\end{vmatrix}=-11 \quad (i+j=3 \text{ impar})$$

$$a_{13}=-2 \Rightarrow \begin{pmatrix}1 & 0 & -2\\ 3 & 4 & -1\\ 2 & 0 & 3\end{pmatrix} \Rightarrow adj(a_{13})=+\begin{vmatrix}3 & 4\\ 2 & 0\end{vmatrix}=-8 \quad (i+j=4 \text{ par})$$

$$a_{21}=3 \Rightarrow \begin{pmatrix}1 & 0 & -2\\ 3 & 4 & -1\\ 2 & 0 & 3\end{pmatrix} \Rightarrow adj(a_{21})=-\begin{vmatrix}0 & -2\\ 0 & 3\end{vmatrix}=0 \quad (i+j=3 \text{ impar})$$

$$a_{22}=4 \Rightarrow \begin{pmatrix}1 & 0 & -2\\ 3 & 4 & -1\\ 2 & 0 & 3\end{pmatrix} \Rightarrow adj(a_{22})=+\begin{vmatrix}1 & -2\\ 2 & 3\end{vmatrix}=7 \quad (i+j=4 \text{ par})$$

$$a_{23}=-1 \Rightarrow \begin{pmatrix}1 & 0 & -2\\ 3 & 4 & -1\\ 2 & 0 & 3\end{pmatrix} \Rightarrow adj(a_{23})=-\begin{vmatrix}1 & 0\\ 2 & 0\end{vmatrix}=0 \quad (i+j=5 \text{ impar})$$

$$a_{31}=2 \Rightarrow \begin{pmatrix}1 & 0 & -2\\ 3 & 4 & -1\\ 2 & 0 & 3\end{pmatrix} \Rightarrow adj(a_{31})=+\begin{vmatrix}0 & -2\\ 4 & -1\end{vmatrix}=8 \quad (i+j=4 \text{ par})$$

$$a_{32}=0 \Rightarrow \begin{pmatrix}1 & 0 & -2\\ 3 & 4 & -1\\ 2 & 0 & 3\end{pmatrix} \Rightarrow adj(a_{32})=-\begin{vmatrix}1 & -2\\ 3 & -1\end{vmatrix}=-5 \quad (i+j=5 \text{ impar})$$

$$a_{33}=3 \Rightarrow \begin{pmatrix}1 & 0 & -2\\ 3 & 4 & -1\\ 2 & 0 & 3\end{pmatrix} \Rightarrow adj(a_{33})=+\begin{vmatrix}1 & 0\\ 3 & 4\end{vmatrix}=4 \quad (i+j=6 \text{ par})$$

Ejemplo 7b: Calcula la matriz adjunta de la matriz B:

$$Adj(B)=\begin{pmatrix} \begin{vmatrix} 4 & -1 \\ 0 & 3 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} 0 & -2 \\ 0 & 3 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} 0 & -2 \\ 4 & -1 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 12 & -11 & -8 \\ 0 & 7 & 0 \\ 8 & -5 & 4 \end{pmatrix}$$

Ejercicio propuesto: Calcular las matrices adjuntas de las siguientes:

a) $A=\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$ b) $B=\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 2 & -3 \\ 4 & 5 & 1 \end{pmatrix}$

Solución:

a) $Adj(A)=\begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ b) $Adj(B)=\begin{pmatrix} 17 & -12 & -8 \\ 11 & -7 & -9 \\ -1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$

6. CÁLCULO DE LA MATRIZ INVERSA MEDIANTE DETERMINANTES

La siguiente propiedad (que no demostraremos) permite saber de antemano si una matriz cuadrada tiene inversa, y caso de tenerla, una forma fácil de calcularla:

PROPIEDAD FUNDAMENAL: Se comprueba que la matriz inversa de una matriz A es:

$$A^{-1}=\frac{1}{|A|}\left[Adj(A)\right]^t$$

y la condición necesaria y suficiente para que una matriz cuadrada tenga inversa es que su determinante sea distinto de cero.

Para hallar, por tanto, la inversa de una matriz cuadrada, daremos los siguientes pasos:

1. Calculamos su determinante. Si es cero, no tiene inversa. Si no es cero tiene inversa y continuamos.
2. Calculamos su matriz adjunta y luego trasponemos dicha matriz
3. La matriz inversa es el producto del inverso del valor del determinante por la matriz anterior.

Ejemplo 8: Averiguar si la siguiente matriz A tiene inversa y calcularla si tuviera:

$$A=\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

<u>Resolución:</u>

1. $|A|=\begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 3 \end{vmatrix}=6-1-3=2\Rightarrow |A|\neq 0$ y por tanto A tiene inversa.

2. $Adj(A)=\begin{pmatrix} +\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 3 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} & +\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3 \end{vmatrix} & +\begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} \\ +\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} & +\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 3 & -4 & -1 \\ -3 & 6 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$

$$\Rightarrow Adj(A)=\begin{pmatrix} |2| & -|0| \\ -|-1| & |1| \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

3. $A^{-1}=\dfrac{1}{|A|}\left[Adj(A)\right]^t=\dfrac{1}{2}\begin{pmatrix} 3 & -3 & -1 \\ -4 & 6 & 2 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

Ejerclase 9: Averiguar si las siguientes matrices tienen inversa y calcularla cuando la tengan.

$$A=\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \qquad B=\begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad C=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & -1 \\ -6 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

<u>Ejercicios propuestos:</u> 9 y 10

7. ECUACIONES MATRICIALES

Una ecuación matricial es una igualdad en la que la incógnita que figura en ella es una matriz. Se resuelven de manera análoga a las ecuaciones numéricas pero teniendo en cuenta que para despejar una matriz incógnita que está multiplicada por otra, no podemos pasarla dividiendo al otro miembro (no hemos definido la división de matrices) si no que hemos de multiplicarla en los dos miembros de la ecuación por su inversa.

Ejerclase 10: Resolver la ecuación matricial $X \cdot A - B = C$ siendo:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad C = \begin{pmatrix} 4 & 4 \\ -6 & -2 \end{pmatrix}$$

Ejercicio propuesto: Dadas las siguientes matrices resuelve la ecuación $M \cdot X + N = P$, en los casos:

a) $M = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \qquad N = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 5 \end{pmatrix} \qquad P = \begin{pmatrix} 9 & 2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$

b) $M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \\ -2 & 3 & 1 \end{pmatrix} \qquad N = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} \qquad P = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$

Ejerclase 11: Dadas las siguientes matrices, resuelve la ecuación $A \cdot X \cdot B = C$ siendo:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -1 & 4 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad C = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$$

Ejerclase 12: Dada la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ hallar las matrices B que cumplan la condición $A \cdot B = B \cdot A$

Cuidado: En algunas ocasiones, para despejar hemos de multiplicar ambos miembros por la inversa de una matiz que no la tiene. ¿qué hacer en estos casos? Averiguar la dimensión de la matriz incógnita, tomar todos sus elementos como incógnitas, operar matricialmente ambos miembros e imponer la igualdad matricial de los dos miembros. El siguiente ejercicio sirve como ejemplo.

Ejerclase 13 (Selectividad 2005):

Sean las matrices $A=\begin{pmatrix} -2 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ y $B=\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 0 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$. Hallar la matriz X que verifique: $A\cdot B\cdot X=\begin{pmatrix} 4 \\ 2 \end{pmatrix}$

Ejerclase 14: Hallar los valores x, y, z que verifiquen la ecuación matricial:

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}x+\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} y \\ z \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Ejerclase 15: Hallar las matrices cuadradas X de orden 2 y simétricas que verifican $A\cdot X=0$ siendo $A=\begin{pmatrix} 3 & -3 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}$

<u>Ejercicios propuestos</u>: 11, 12, 13 y 14

EJERCICIOS PROPUESTOS

1. Siendo $A=\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 0 \\ -3 & 4 \end{pmatrix}$ y $B=\begin{pmatrix} 1 & -2 & -5 \\ 3 & 4 & 0 \end{pmatrix}$ calcular:

   a) $A\cdot B$ b) $B\cdot A$ c) $\left(A\cdot B\right)^2$ d) $\left(B\cdot A\right)^2$

2. Siendo $A=\begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 3 & 0 & 0 \\ 5 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ y $B=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ hallar $A^2+B^2-2AB-3I$

3. Calcular los siguientes determinantes de orden 2:

   a) $\begin{vmatrix} -1 & -7 \\ 2 & 8 \end{vmatrix}$ b) $\begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 1 & -2 \end{vmatrix}$ c) $\begin{vmatrix} b & -x \\ x & -b \end{vmatrix}$

4. Halla los siguientes determinantes de orden 3:

   a) $\begin{vmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 5 & -2 & -3 \\ -2 & 4 & 4 \end{vmatrix}$ b) $\begin{vmatrix} -1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & -2 \\ 3 & 5 & 3 \end{vmatrix}$ c) $\begin{vmatrix} 4 & 1 & 2 \\ 3 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & 4 \end{vmatrix}$

   d) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -1 & -3 & -2 \\ 0 & 4 & 1 \end{vmatrix}$ e) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix}$ f) $\begin{vmatrix} 3 & 0 & -1 \\ 1 & -2 & -4 \\ 0 & 1 & -2 \end{vmatrix}$

5. Determinar los valores de a y b de forma que la matriz $A=\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ a & b \end{pmatrix}$ verifique $A^2=A$.

6. Encontrar números a y b de forma que la matriz $A=\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ a & b \end{pmatrix}$ verifique $A^2=2A$

7. 1 de pág. 23

8. Dada la matriz $A=\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ hallar A^{200}.

9. 1b) de pág.5

10. 1 de pág. 9

11. Resolver la ecuación matricial $A\cdot X+B=2C$ siendo,

$$A=\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}\ \text{y}\ C=\begin{pmatrix} 4 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

12. Resolver la ecuación matricial $A\cdot X+B=C$ siendo:

$$A=\begin{pmatrix}2&2&1\\1&3&1\\1&2&2\end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix}2&-1&0\\0&3&1\\-1&4&2\end{pmatrix}\ \text{y}\ C=\begin{pmatrix}3&1&2\\0&-2&1\\4&3&-2\end{pmatrix}$$

13. 1 de pág. 2

14. Resolver la ecuación matricial $A\cdot X+B=C$ siendo:

$$A=\begin{pmatrix}1&1\\2&1\end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix}1&1&0\\1&2&1\end{pmatrix}\ \text{y}\ C=\begin{pmatrix}0&1&1\\1&1&3\end{pmatrix}$$

EJERCICIOS FINALES DE REPASO

15. 1 de pág. 4
16. 1 de pág. 8
17. 1b) de pág. 12
18. 1b) de pág. 14
19. 1b) de pág. 16
20. 1b) de pág. 18
21. 1b) de pág. 19
22. 1 de pág. 25
23. 1b) de pág. 27
24. 1 de pág. 30
25. 1 de pág. 33
26. 1 de pág. 35
27. 1 de pág. 41
28. 1 de pág. 47
29. 1 de pág. 50

SOLUCIONES A LOS EJERCICIOS PROPUESTOS Y FINALES DE REPASO

1. a) $\begin{pmatrix}-1&-8&-10\\1&-2&-5\\9&22&15\end{pmatrix}$ b) $\begin{pmatrix}15&-21\\10&-3\end{pmatrix}$ c) $\begin{pmatrix}-97&-196&-100\\-48&-114&-75\\148&214&25\end{pmatrix}$ d) $\begin{pmatrix}15&-252\\120&-201\end{pmatrix}$
2. $\begin{pmatrix}2&0&0\\4&2&0\\6&-3&-7\end{pmatrix}$
3. a) 6 b) 0 c) x^2-b^2
4. a) 0 b) -25 c) -12 d) 7 e) 0 f) 23
5. $a=2$ $b=-1$
6. $a=1$ $b=1$
7. Operando queda: $\begin{pmatrix}3x+y\\x+3y\\x\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2-z\\2-z\\-z\end{pmatrix}\Rightarrow\left\{\begin{array}{l}3x+y+z=2\\x+3y+z=2\\x+z=0\end{array}\right\}$; resolviendo da: $x=\dfrac{2}{3},\,y=\dfrac{2}{3},\,z=-\dfrac{2}{3}$
8. $\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}$
9. $\left(A^t\cdot B-2I_2\right)^{-1}=\begin{pmatrix}-1/2&-3/2\\1/2&1/2\end{pmatrix}$

10. a) Debe ocurrir $\begin{pmatrix} 4 & x^2+4x \\ 0 & x^2+4x+4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 2x \\ 0 & 2x+4 \end{pmatrix} \Rightarrow \left\{ \begin{matrix} x^2+4x=2x \\ x^2+4x+4=2x+4 \end{matrix} \right\}$. Ambas ecuaciones se reducen a la misma: $x^2+2x=0$ que tiene por soluciones $x=0$ y $x=-2$

b) Para $x=-1$ $A^{-1} = \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

11. $X = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 5 & -3 & 4 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$

12. $\frac{1}{5}\begin{pmatrix} -1 & 19 & 12 \\ -6 & -16 & 2 \\ 19 & 4 & -18 \end{pmatrix}$

13. Con los datos dados sabemos que es de dimensión 3×2; será por tanto de la forma $A = \begin{pmatrix} x & 1 \\ -1 & 2 \\ y & -3 \end{pmatrix}$;

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} x & 1 \\ -1 & 2 \\ y & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} x-1+y & 0 \\ 2x+y & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \Rightarrow \left\{ \begin{matrix} x+y-1=0 \\ 2x+y=0 \\ 0=0 \\ -1=-1 \end{matrix} \right\}$$

Resolviendo el sistema anterior (con las dos primeras ya que las otras son identidades) queda $x=-1,\ \ y=2$

14. $X = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

15. a) $P = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}^{-1}\cdot\begin{pmatrix} 3 & -1 & -2 \\ -2 & 4 & -1 \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 3 & -1 & -2 \\ -2 & 4 & -1 \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 8 & -6 & -3 \\ -10 & 10 & 2 \end{pmatrix}$

b) $\dim(M) = 3\times 3$ ya que $filas(M) = columnas(A) = 3;\ \ columnas(M) = filas(C) = 3$

c) $\dim(N) = 3\times 2$

16. a) $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 5 & 10 \\ -4 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -4 & 5 \end{pmatrix}$ b) $B = -\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 4 & -2 \\ -3 & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} -4 & 2 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$

$$X = [M\cdot B - N]\cdot M^{-1} = \left[\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}\cdot\frac{1}{2}\begin{pmatrix} -4 & 2 \\ 3 & -1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}\right]\cdot\frac{1}{2}\begin{pmatrix} -4 & 2 \\ 3 & -1 \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 3 & -3 \\ 8 & -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3/2 & -3/2 \\ 4 & -2 \end{pmatrix}$$

17.