Contraste de hipótesis

1º El año pasado se observo que el 25% de los partos fueron de madres de más de 30 años. La maternidad informa que esa es la tónica de los últimos años.

Elegida una muestra de 120 partos, 34 fueron de madres de más de 30 años. Con un nivel de significación de 0'10, ¿Se puede aceptar que la afirmación del hospital es cierta?

Solución.

Test de hipótesis:

- Hipótesis nula: $p_o = 0{,}25$
- Hipótesis alternativa: $p_o \neq 0{,}25$

Para comprobar la hipótesis se ha tomado una proporción $\left(\hat{p} = \dfrac{34}{125}\right)$, siendo la región de aceptación:

$$\left(p_o - Z_{\alpha/2} \cdot \sqrt{\frac{p_o \cdot q_o}{n}}, p_o + Z_{\alpha/2} \cdot \sqrt{\frac{p_o \cdot q_o}{n}}\right)$$

Nivel de significación = α = 0,10

$$Z_{\alpha/2} = \Phi^{-1}\left(1 - \frac{\alpha}{2}\right) = \Phi^{-1}\left(1 - \frac{0{,}1}{2}\right) = \Phi^{-1}(0{,}95) = 1{,}65$$

$$p_o = 0{,}25;\ q_o = 1 - p_o = 1 - 0{,}25 = 0{,}75;\ n = 100$$

Sustituyendo en la expresión de la región de aceptación:

$$\left(0{,}25 - 1{,}65 \cdot \sqrt{\frac{0{,}25 \cdot 0{,}75}{100}}, 0{,}25 + 1{,}65 \cdot \sqrt{\frac{0{,}25 \cdot 0{,}75}{100}}\right) = (0'18, 0'32)$$

Como $\hat{p} = \dfrac{34}{125} = 0{,}27 \in (0'18, 0'32)$, se acepta la hipótesis nula y se rechaza la alternativa, se puede aceptar la afirmación del Hospital.

2. Se ha tomado una muestra de 100 personas a las que se ha preguntado la cantidad de dinero que lleva en la cartera, obteniéndose una media de 110 €. Se sabe que la desviación típica de la población es de 20 €.

a) Obtener el intervalo de confianza, al 95 % para dicha cantidad de dinero en la población.
b) ¿Cuál es el error máximo cometido?
c) Si se desea cometer un error, mitad del anterior y con el mismo nivel de confianza ¿Cuál debe ser el tamaño de la muestra?

Solución.

a. Se pide establecer un intervalo de confianza para la media poblacional (μ) de una variable continua con distribución Normal a partir de la media de una muestra 100 datos.

$$\left(\overline{x} - Z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \overline{x} + Z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)$$

Media de la muestra: $\overline{x} = 110$ €

Nivel de confianza = 1 – α = 0,95 $\Rightarrow$ α = 0,05

$$Z_{\alpha/2} = \Phi^{-1}\left(1 - \frac{\alpha}{2}\right) = \Phi^{-1}\left(1 - \frac{0{,}05}{2}\right) = \Phi^{-1}(0{,}9750) = 1{,}96$$

Desviación típica σ = 20€

Número de elementos de la muestra n = 100

$$\left(110-1{,}96\frac{20}{\sqrt{100}},100+1{,}96\frac{20}{\sqrt{100}}\right)=(106,114)$$

b. Error máximo $\varepsilon = Z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}=1{,}96\frac{20}{\sqrt{100}}=3{,}92$

c. El tamaño de la muestra se puede obtener del error máximo admitido.

$$\varepsilon = Z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\Rightarrow n>\left(Z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\varepsilon}\right)^2=\left(1{,}96\cdot\frac{20}{3{,}92/2}\right)^2=400$$

3. En un IES hay 650 estudiantes. Su altura sigue una distribución normal de media 175 cm, con desviación típica de 10 cm.

a) ¿Cuántos estudiantes se espera que midan más de 190 cm?

b) Se sabe que el 34% miden más que la media pero menos de cierta cantidad ¿cuál es cantidad?

Solución.

a. Se pide calcular la probabilidad de que una variable continua con distribución Normal sea mayor que un cierto valor.

$$p(x>190)\underset{N_x(175,10)}{=}\left\{\begin{array}{c}x=190\\ z=\dfrac{190-175}{10}=1{,}50\end{array}\right\}=p(z>1{,}50)=p\left(\overline{z\le 1{,}50}\right)=1-p(z\le 1{,}50)=$$

$$=1-\Phi(1{,}50)=1-0{,}9332=0{,}0668$$

$$p(x>190)=6{,}68\%$$

b. Se pide calcular x_o que cumpla:

$p(175<x<x_o)=0{,}3400$

Tipificando $\left(z=\dfrac{x-\mu}{\sigma}\right)$

$$p(175<x<x_o)\underset{N_x(175,10)}{=}\left\{\begin{array}{ll}x=175 & z=\dfrac{175-175}{10}=0{,}00\\ x=x_o & z_o=\dfrac{x_o-175}{10}\end{array}\right\}=p\left(0{,}00<z<\frac{x_o-175}{10}\right)=0{,}3400$$

$$\Phi\left(\frac{x_o-175}{10}\right)-\Phi(0{,}00)=0{,}3400\ ;\ \Phi\left(\frac{x_o-175}{10}\right)-0{,}500=0{,}3400$$

$$\frac{x_o-175}{10}=\Phi^{-1}(0{,}8400)\ ;\ \frac{x_o-175}{10}=1{,}00$$

$$x_o=1{,}00\cdot 10+175=185\text{ cm}$$

4. A una prueba psicotécnica se presentan 100 candidatos de los que solo el 5 contestan correctamente a todas las preguntas. Con una confianza del 99% ¿Cuál es el error máximo que se comete al tomar como proporción en los candidatos ese 5%?

Solución.

Se pide calcular el error máximo para una proporción.

$$\varepsilon = Z_{\alpha/2} \cdot \sqrt{\frac{p_o \cdot q_o}{n}}$$

Nivel de confianza = 1 – α = 0,99 ⇒ α = 0,01

$$Z_{\alpha/2} = \Phi^{-1}\left(1 - \frac{\alpha}{2}\right) = \Phi^{-1}\left(1 - \frac{0{,}01}{2}\right) = \Phi^{-1}(0{,}9950) = 2{,}58$$

Proporción: $p_o = 0{,}5 \Rightarrow q_o = 1 - p_o = 1 - 0{,}5 = 0{,}5$

$$\varepsilon_{max} = 5{,}58 \cdot \sqrt{\frac{0{,}5 \cdot 0{,}5}{100}} = 0{,}129$$

5. Una fábrica de ordenadores elabora 2500 circuitos electrónicos díaros. Si la probabilidad de fabricar un circuito defectuoso es del 2% ¿Cuál es la probabilidad de que, en un día, el número de circuitos defectuosos sea menor de 30?

Solución.

Se pide calcular la probabilidad de que una proporción sea menor o igual que una cierta cantidad.

$\hat{p}$ ≡ proporción de ordenadores defectuosos en una muestra de tamaño n

$$\hat{p} : N_{\hat{p}}\left(p_o, \sqrt{\frac{p_o \cdot q_o}{n}}\right) = N_{\hat{p}}\left(0'02, \sqrt{\frac{0{,}02 \cdot 0{,}98}{2500}}\right) = N_{\hat{p}}(0'02, 0'0028)$$

Se pide: $p\left(\hat{p} < \frac{30}{2500}\right) = p(\hat{p} < 0{,}012)$

El valor de la proporción se tipifica con los parámetros de la distribución.

$$p(\hat{p} < 0{,}012) \underset{N_{\hat{p}}}{=} \left\{ \begin{array}{l} \hat{p} = 0{,}012 \\ z = \dfrac{0{,}012 - 0{,}02}{0{,}0028} \end{array} \right\} = p(z < -2{,}86) = p(z > 2{,}86) = p(\overline{z \le 2{,}86}) = 1 - p(z \le 2{,}86) =$$

$$= 1 - \Phi(2{,}86) = 1 - 0{,}9979 = 0{,}0021$$

$$p\left(\hat{p} < \frac{30}{2500}\right) = 0{,}21\%$$