MATRICES Y DETERMINANTES

EJERCICIOS RESUELTOS

Dada la matriz $A = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 1 & b \end{pmatrix}$, ¿qué relación deben guardar las constantes *a* y *b* para que se verifique la igualdad $A^2 = A$.

Calculemos A^2: $A^2 = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 1 & b \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a & 0 \\ 1 & b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^2 & 0 \\ a+b & b^2 \end{pmatrix}$.

Como se ha de cumplir que $A^2 = A$, tenemos que: $\begin{pmatrix} a^2 & 0 \\ a+b & b^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 1 & b \end{pmatrix}$, y por tanto se obtiene el siguiente sistema de ecuaciones: $\begin{cases} a^2 = a \\ a+b=1 \\ b^2 = b \end{cases}$. De la primera ecuación resulta que $a = 1$ o $a = 0$. Análogamente, de la última ecuación resulta que $b = 1$ o $b = 0$. Para que se verifique también la otra ecuación, las únicas soluciones posibles son $a = 1$ y $b = 0$ o $a = 0$ y $b = 1$. Por tanto, se obtienen dos soluciones: $A_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, $A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

¿Es conmutativo el producto de matrices? Si la respuesta es afirmativa, demuéstralo; si es negativa, da un ejemplo que lo ponga de manifiesto. ¿Qué matrices conmutan con la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$?

El producto de matrices no es siempre posible, y en caso de que sea posible, en general, no es conmutativo.

Un ejemplo podrían ser las matrices $\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ y $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ ya que:

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

Veamos qué matrices $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ conmutan con $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. Debe cumplirse que:

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{pmatrix} a & 2a+b \\ c & 2c+d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a+2c & b+2d \\ c & d \end{pmatrix}$$

De aquí se deduce que: $\begin{cases} a = a+2c \\ 2a+b = b+2d \\ c = c \\ 2c+d = d \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c = 0 \\ a = d \end{cases}$. Por tanto, las matrices buscadas son de la forma $\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a \end{pmatrix}$ para cualquier valor de *a* y *b*.

Considera la matriz $A = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 4 \\ 1 & -4 & -5 \\ -1 & 3 & 4 \end{pmatrix}$. Se pide:

a) **Demuestra que se verifica la igualdad $A^3 + I = O$, siendo I la matriz unidad y O la matriz nula.**

b) **Calcula razonadamente A^{10}.**

a) Comprobemos que se cumple que $A^3 + I = O$.

$$A^2 = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 4 \\ 1 & -4 & -5 \\ -1 & 3 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 3 & 4 \\ 1 & -4 & -5 \\ -1 & 3 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 1 & 4 & 4 \\ -1 & -3 & -3 \end{pmatrix}$$

$$A^3 = A^2 \cdot A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 1 & 4 & 4 \\ -1 & -3 & -3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 3 & 4 \\ 1 & -4 & -5 \\ -1 & 3 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} = -I$$

Por tanto, como $A^3 = -I$, se tiene que $A^3 + I = -I + I = O$.

b)

$$A^{10} = A^3 \cdot A^3 \cdot A^3 \cdot A = (-I) \cdot (-I) \cdot (-I) \cdot A = -I \cdot A = -A$$

Sea M la matriz $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Calcula la matriz J tal que $M = I + J$, siendo I la matriz identidad de orden 3. Calcula también las matrices J^2, J^3 y J^{1994}.

La matriz J es $J = M - I = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. Calculemos sus potencias:

$$J^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$J^3 = J^2 \cdot J = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Todas las restantes potencias dan como resultado la matriz nula O_3 y por tanto $J^{1994} = O_3$.

Una matriz A se llama antisimétrica cuando su traspuesta es igual a su opuesta. Obtén la forma general de una matriz A de orden 2 que sea antisimétrica. Calcula A^2, A^4 y A^{33}.

Para una matriz de orden 2, $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, la igualdad $A^t = -A$ permite obtener o relacionar los elementos a, b, c y d. La anterior igualdad nos permite concluir que:

$$A^t = -A \quad \Leftrightarrow \quad \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -a & -b \\ -c & -d \end{pmatrix} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} a = -a \\ c = -b \\ b = -c \\ d = -d \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} a = 0 \\ c = -b \\ d = 0 \end{cases}$$

Por tanto, todas las matrices antisimétricas de orden 2 son de la forma $A = \begin{pmatrix} 0 & b \\ -b & 0 \end{pmatrix}$.

Para calcular A^2, A^4 y A^{33} hacemos:

$$A^2 = A \cdot A = \begin{pmatrix} 0 & b \\ -b & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & b \\ -b & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -b^2 & 0 \\ 0 & -b^2 \end{pmatrix} = (-b^2) \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = (-b^2) \cdot \mathrm{I}$$

$$A^4 = A^2 \cdot A^2 = (-b^2) \cdot \mathrm{I} \cdot (-b^2) \cdot \mathrm{I} = b^4 \cdot \mathrm{I}$$

$$A^8 = A^4 \cdot A^4 = b^8 \cdot \mathrm{I}$$

$$A^{33} = A^8 \cdot A^8 \cdot A^8 \cdot A^8 \cdot A = b^8 \cdot \mathrm{I} \cdot b^8 \cdot \mathrm{I} \cdot b^8 \cdot \mathrm{I} \cdot b^8 \cdot \mathrm{I} \cdot A = b^{32} \cdot \mathrm{I} \cdot A = b^{32} \cdot A = (-b^{33}) \cdot \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

Halla la matriz $X^2 + Y^2$ si X e Y son dos matrices cuadradas, verificando:

$$\begin{cases} 5X + 3Y = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -4 & 15 \end{pmatrix} \\ 3X + 2Y = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 9 \end{pmatrix} \end{cases}$$

Llamemos $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -4 & 15 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 9 \end{pmatrix}$ y resolvamos el sistema $\begin{cases} 5X + 3Y = A \\ 3X + 2Y = B \end{cases}$. Utilizando el método de reducción, se obtienen las siguientes soluciones: $\begin{cases} X = 2A - 3B \\ Y = -3A + 5B \end{cases}$. Sustituyendo A y B por las correspondientes matrices:

$$X = 2A - 3B = 2 \cdot \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -4 & 15 \end{pmatrix} - 3 \cdot \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ -8 & 30 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3 & -3 \\ -6 & 27 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}$$

$$Y = -3A + 5B = -3 \cdot \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -4 & 15 \end{pmatrix} + 5 \cdot \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -6 & 0 \\ 12 & -45 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 5 & -5 \\ -10 & 45 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & -5 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$$

Operando para obtener $X^2 + Y^2$ se obtiene:

$$X^2 = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -2 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 & 12 \\ -8 & 3 \end{pmatrix} \qquad Y^2 = \begin{pmatrix} -1 & -5 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 & -5 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -9 & 5 \\ -2 & -10 \end{pmatrix}$$

$$X^2 + Y^2 = \begin{pmatrix} -5 & 12 \\ -8 & 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -9 & 5 \\ -2 & -10 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -14 & 17 \\ -10 & -7 \end{pmatrix}$$

Considera la matriz $A = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 4 \\ 1 & -4 & -5 \\ -1 & 3 & 4 \end{pmatrix}$.

a) Siendo I la matriz identidad 3 x 3 y O la matriz nula 3 x 3, prueba que $A^3 + \mathrm{I} = \mathrm{O}$.

b) Calcula A^{10}.

a)

$$A^2 = A \cdot A = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 4 \\ 1 & -4 & -5 \\ -1 & 3 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 3 & 4 \\ 1 & -4 & -5 \\ -1 & 3 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 1 & 4 & 4 \\ -1 & -3 & -3 \end{pmatrix}$$

$$A^3 = A^2 \cdot A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 1 & 4 & 4 \\ -1 & -3 & -3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 3 & 4 \\ 1 & -4 & -5 \\ -1 & 3 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Por tanto $A^3 + \mathrm{I} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \mathrm{O}$.

b) Teniendo en cuenta que $A^3 + \mathrm{I} = \mathrm{O}$, entonces $A^3 = -\mathrm{I}$. Así:

$$A^{10} = A^3 \cdot A^3 \cdot A^3 \cdot A = (-\mathrm{I}) \cdot (-\mathrm{I}) \cdot (-\mathrm{I}) \cdot A = -A = \begin{pmatrix} 0 & -3 & -4 \\ -1 & 4 & 5 \\ 1 & -3 & -4 \end{pmatrix}$$

Considera la matriz $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Calcula $A^t \cdot A$ y $A \cdot A^t$ donde A^t denota la matriz traspuesta de A.

$$A^t = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad A^t A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A\,A^t = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Considera las matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ y $C = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

a) Calcula AB, AC, A^tB^t y C^tA^t, siendo A^t, B^t y C^t las matrices transpuestas de A, B y C, respectivamente.
b) Razona cuáles de las matrices A, B, C y AB tienen matriz inversa y en los casos en que la respuesta sea afirmativa, halla la correspondiente matriz inversa.

a)

$$AB = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \mathrm{I}_2 \text{ (matriz identidad de orden 2)}$$

$$AC = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$$

$$A^tB^t = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

$$C^t A^t = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

b) Para que una matriz tenga inversa tiene que ser cuadrada y además su determinante tiene que ser distinto de cero, por tanto las matrices A, B y C no tienen inversa porque no son cuadradas.

La única que es cuadrada es $AB = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, además su determinante es $\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0$. Luego AB tiene inversa. Ahora bien como la matriz AB es la matriz identidad de orden 2, su inversa es ella misma, es decir $(AB)^{-1} = AB = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = I_2$ (matriz identidad de orden 2).

Determina una matriz *A* simétrica (*A* coincide con su traspuesta) sabiendo que:

$$\boldsymbol{det\,(A) = -7} \qquad \textbf{y} \qquad \boldsymbol{A \cdot \begin{pmatrix} 2 & 6 \\ -1 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 & -12 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}}$$

Como A es una matriz simétrica tiene que ser cuadrada y de la forma $A = \begin{pmatrix} x & y \\ y & z \end{pmatrix}$.

$$|\,A\,| = -7 \quad \Rightarrow \quad \begin{vmatrix} x & y \\ y & z \end{vmatrix} = x\,z - y^2 = -7$$

Por otra parte, tenemos que $\begin{pmatrix} x & y \\ y & z \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 6 \\ -1 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 & -12 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$. Operando:

$$\begin{pmatrix} 2x - y & 6x - 3y \\ 2y - z & 6y - 3z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 & -12 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$$

de donde obtenemos:

$$2x - y = -4$$
$$2y - z = 1$$
$$6x - 3y = -12$$
$$6y - 3z = 3$$

Si observamos el sistema, de las cuatro ecuaciones la 1ª y 3ª son equivalentes y la 2ª y la 4ª también y por tanto el sistema a resolver es el siguiente:

$$\begin{cases} 2x - y = -4 \\ 2y - z = 1 \\ x\,z - y^2 = -7 \end{cases}$$

De $2x - y = -4$ tenemos $x = \dfrac{y-4}{2}$

De $2y - z = 1$ tenemos $z = 2y - 1$.

Sustituyendo estas incógnitas (x, y, z) en la ecuación $xz - y^2 = -7$ tenemos:

$$\left(\frac{y-4}{2}\right) \cdot (2y - 1) - y^2 = -7 \quad \Rightarrow \quad y^2 - 4y - \frac{y}{2} + 2 - y^2 = -7 \quad \Rightarrow \quad y = 2$$

Luego:

$$x = \frac{y-4}{2} = \frac{2-4}{2} = -1 \quad \text{y} \quad z = 2y - 1 = 2 \cdot 2 - 1 = 3$$

Por tanto, la matriz pedida es $A = \begin{pmatrix} x & y \\ y & z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$.

Dada la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$, calcula $(A^t \cdot A^{-1})^2 \cdot A$.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}; \qquad A^t = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}; \qquad |A| = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = 4 - 6 = -2$$

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} \cdot \text{Adj}\,(A^t); \qquad \text{Adj}\,(A^t) = \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} \cdot \text{Adj}\,(A^t) = \frac{1}{-2} \cdot \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A^t \cdot A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{-2} \cdot \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ -3 & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{-2} \cdot \begin{pmatrix} -5 & 1 \\ -4 & 0 \end{pmatrix}$$

$$(A^t \cdot A^{-1})^2 = \frac{1}{-2} \cdot \begin{pmatrix} -5 & 1 \\ -4 & 0 \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{-2} \cdot \begin{pmatrix} -5 & 1 \\ -4 & 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{4} \cdot \begin{pmatrix} 21 & -5 \\ 20 & -4 \end{pmatrix}$$

$$(A^t \cdot A^{-1})^2 \cdot A = \frac{1}{4} \cdot \begin{pmatrix} 21 & -5 \\ 20 & -4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} = \frac{1}{4} \cdot \begin{pmatrix} 6 & 22 \\ 8 & 24 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3/2 & 11/2 \\ 2 & 6 \end{pmatrix}$$

Sea $A = \begin{pmatrix} \operatorname{sen} x & -\cos x & 0 \\ \cos x & \operatorname{sen} x & 0 \\ \operatorname{sen} x + \cos x & \operatorname{sen} x - \cos x & 1 \end{pmatrix}$. ¿Para qué valores de x existe la matriz inversa de A? Calcula dicha matriz inversa.

Para que tenga inversa se ha de cumplir que: $|A| \neq 0$.

$|A| = \operatorname{sen}^2 x + \cos^2 x = 1$ luego exista la inversa de A para cualquier valor de x. Calculémosla:

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} \cdot \text{Adj}(A^t)$$

$$A^t = \begin{pmatrix} \operatorname{sen} x & \cos x & \operatorname{sen} x + \cos x \\ -\cos x & \operatorname{sen} x & \operatorname{sen} x - \cos x \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad ; \quad \text{Adj}(A^t) = \begin{pmatrix} \operatorname{sen} x & \cos x & 0 \\ -\cos x & \operatorname{sen} x & 0 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} \cdot \text{Adj}(A^t) = \begin{pmatrix} \operatorname{sen} x & \cos x & 0 \\ -\cos x & \operatorname{sen} x & 0 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

Considera la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & b & 3 \\ 4 & 1 & -b \end{pmatrix}$.

a) Determina para qué valores del parámetro b existe A^{-1}.
b) Calcula A^{-1} para $b = 2$.

a) Existe A^{-1} si $det\,(A) \neq 0$. $\qquad det\,(A) = \begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & b & 3 \\ 4 & 1 & -b \end{vmatrix} = -b^2 + 4b - 3$

Resolviendo la ecuación $-b^2 + 4b - 3 = 0$ se obtiene $b = 1$ y $b = 3$. Por tanto existe A^{-1} si y solo si $b \neq 1$ y $b \neq 3$.

b) Si $b = 2$, entonces $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 3 \\ 4 & 1 & -2 \end{pmatrix}$ y su matriz inversa vendrá dada por: $A^{-1} = \dfrac{1}{|A|} \cdot \text{Adj}\,(A^t)$

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 3 \\ 4 & 1 & -2 \end{vmatrix} = 1$$

$$A^t = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 4 \\ 0 & 2 & 1 \\ -1 & 3 & -2 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad \text{Adj}\,(A^t) = \begin{pmatrix} -7 & -1 & 2 \\ 12 & 2 & -3 \\ -8 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

Luego:

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} \cdot \text{Adj}\,(A^t) = \frac{1}{1} \cdot \begin{pmatrix} -7 & -1 & 2 \\ 12 & 2 & -3 \\ -8 & -1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -7 & -1 & 2 \\ 12 & 2 & -3 \\ -8 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

Determina a, b y c sabiendo que la matriz $A = \begin{pmatrix} -3 & 1 & 1 \\ 1 & a & 2 \\ -1 & b & c \end{pmatrix}$ verifica $A \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 9 \\ 4 \end{pmatrix}$ y rango(A) = 2.

$$\begin{pmatrix} -3 & 1 & 1 \\ 1 & a & 2 \\ -1 & b & c \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 7 + 2a \\ -1 + 2b + 3c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 9 \\ 4 \end{pmatrix}$$

Igualando términos, tenemos que:

$$\begin{cases} 9 = 7 + 2a \\ 4 = -1 + 2b + 3c \end{cases}$$

de donde $\begin{cases} a = 1 \\ 2b + 3c = 5 \end{cases}$

Por otra parte, tenemos que como rango(A) = 2 y por tanto ha de ser $|A| = 0$.

$$A = \begin{pmatrix} -3 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ -1 & b & c \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad |A| = \begin{vmatrix} -3 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ -1 & b & c \end{vmatrix} = -4\,(c - 2b) + 1\,(-1 - b) = -4c + 7b - 1 = 0$$

Resolvemos el sistema por Cramer $\begin{cases} 2b + 3c = 5 \\ 7b - 4c = 1 \end{cases}$

$$b = \frac{\begin{vmatrix} 5 & 3 \\ 1 & -4 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 7 & -4 \end{vmatrix}} = \frac{23}{29} \qquad\qquad c = \frac{\begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 7 & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 7 & -4 \end{vmatrix}} = \frac{33}{29}$$

Por tanto, $a = 1$; $b = \dfrac{23}{29}$ y $c = \dfrac{33}{29}$.

Determina una matriz X que verifique la ecuación $AX = X - B$ siendo:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad y \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

Se tiene que:

$$AX = X - B \quad \Rightarrow \quad AX - X = -B \quad \Rightarrow \quad (A - \mathrm{I}) \cdot X = -B$$

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad ; \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \end{pmatrix} \quad ; \quad A - \mathrm{I} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Como $|A - \mathrm{I}| = -2 \neq 0$, existe $(A - \mathrm{I})^{-1}$ y por tanto:

$$X = -(A - \mathrm{I})^{-1} \cdot B$$

Calculemos $(A - \mathrm{I})^{-1}$:

$$(A - \mathrm{I})^t = \begin{pmatrix} -1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad \mathrm{Adj}(A - \mathrm{I})^t = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad (A - \mathrm{I})^{-1} = -\frac{1}{2} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Entonces:

$$X = -(A - \mathrm{I})^{-1} \cdot B = -\left(-\frac{1}{2}\right) \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Sean C_1, C_2 y C_3 las columnas primera, segunda y tercera, respectivamente, de una matriz cuadrada A de orden 3 cuyo determinante vale 5. Calcula indicando las propiedades que utilices:

a) El determinante de A^3.
b) El determinante de A^{-1}.
c) El determinante de $2A$.
d) El determinante de una matriz cuadrada cuyas columnas primera, segunda y tercera son, respectivamente $3C_1 - C_3$, $2C_3$ y C_2.

a)

$$|A^3| = |A| \cdot |A| \cdot |A| = 5 \cdot 5 \cdot 5 = 125$$

El determinante de un producto es igual al producto de los determinantes.

b) Como por una parte tenemos que:

$$A \cdot A^{-1} = \mathrm{I} \quad \Rightarrow \quad |A \cdot A^{-1}| = |\mathrm{I}| = 1$$

Y por otra parte:

$$|A| \cdot |A^{-1}| = 5 \cdot |A^{-1}|$$

Entonces:

$$5 \cdot |A^{-1}| = 1 \quad \Rightarrow \quad |A^{-1}| = 1/5$$

El determinante de un producto es igual al producto de los determinantes y el determinante de la matriz unidad es 1.

c)

$$|2A| = 2^3 \cdot |A| = 8 \cdot 5 = 40$$

Al multiplicar 2 por la matriz aparece 2 multiplicando a cada columna. Al calcular el determinante, si una columna está multiplicada por un número, dicho número se puede sacar factor común fuera del determinante. Como hay tres columnas, sale el 2 tres veces multiplicando, esto es 2^3.

d)

$$| 3C_1 - C_3, 2C_3, C_2 | =^{(1)} = - | 3C_1 - C_3, C_2, 2C_3 | =^{(2)} = -2 \cdot | 3C_1 - C_3, C_2, C_3 | =^{(3)} =$$
$$= -2 \cdot | 3C_1 , C_2, C_3 | + 2 \cdot | C_3, C_2, C_3 | =^{(4)} = -6 \cdot | C_1 , C_2, C_3 | + 0 = -6 \cdot 5 = -30$$

Propiedades utilizadas:

(1) Si cambiamos entre sí dos columnas el determinante cambia de signo.

(2) Si una columna está multiplicada por un número dicho número puede salir fuera del determinante factor común, esto es multiplicando al determinante.

(3) Si una columna de un determinante es suma de dos sumandos dicho determinante es igual a la suma de dos determinantes colocando en dicha columna el primer y segundo sumando respectivamente.

(4) Si un determinante tiene dos columnas iguales el determinante es cero y además si una columna está multiplicada por un número dicho número puede salir fuera del determinante factor común multiplicando al determinante.

Considera las matrices $A = \begin{pmatrix} -2 & -2 & 1 \\ -2 & 1 & -2 \\ 1 & -2 & -2 \end{pmatrix}$ y $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$. Siendo I la matriz identidad de orden 3, calcula los valores de λ para los que la matriz $A + \lambda$ I no tiene inversa.

$$A + \lambda \cdot \mathrm{I} = \begin{pmatrix} -2 & -2 & 1 \\ -2 & 1 & -2 \\ 1 & -2 & -2 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & -2 & 1 \\ -2 & 1 & -2 \\ 1 & -2 & -2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix} =$$
$$= \begin{pmatrix} -2+\lambda & -2 & 1 \\ -2 & 1+\lambda & -2 \\ 1 & -2 & -2+\lambda \end{pmatrix}$$

Para que la matriz $A + \lambda$ I no tenga inversa su determinante ha de ser 0, es decir $| A + \lambda \mathrm{I} | = 0$

$$| A + \lambda \mathrm{I} | = \begin{vmatrix} -2+\lambda & -2 & 1 \\ -2 & 1+\lambda & -2 \\ 1 & -2 & -2+\lambda \end{vmatrix} = \lambda^3 - 3\lambda^2 - 9\lambda + 27 = 0$$

Le aplicamos Ruffini a $\lambda^3 - 3\lambda^2 - 9\lambda + 27$ para calcular sus raíces:

	1	–3	9	27
3		3	0	–27
	1	0	–9	0

Luego $\lambda^3 - 3\lambda^2 - 9\lambda + 27 = (\lambda - 3) \cdot (\lambda^2 - 9) = (\lambda - 3) \cdot (\lambda - 3) \cdot (\lambda + 3) = 0$. Por lo tanto la matriz $(A + \lambda \mathrm{I})$ no tiene inversa si $\lambda = 3$ o $\lambda = -3$.

Sabiendo que la matriz $A = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 1 \\ 1 & -4 & -2 \\ -1 & a-1 & a \end{pmatrix}$ tiene rango 2, ¿cuál es el valor de a?

Como la matriz $A = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 1 \\ 1 & -4 & -2 \\ -1 & a-1 & a \end{pmatrix}$ tiene rango 2 y $\begin{vmatrix} 3 & -2 \\ 1 & -4 \end{vmatrix} = -12 + 2 = -10 \neq 0$, tenemos que:

$$|A| = 0 \Rightarrow \begin{vmatrix} 3 & -2 & 1 \\ 1 & -4 & -2 \\ -1 & a-1 & a \end{vmatrix} = -12a + a - 1 - 4 - 4 + 6a - 6 + 2a = -15 - 3a = 0 \Rightarrow a = -5$$

Considera las matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & m & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ **y** $C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

a) ¿Para que valores de m tiene solución la ecuación matricial $A \cdot X + 2B = 3C$?
b) Resuelve la ecuación matricial dada para $m = 1$.

a) $AX + 2B = 3C \longrightarrow AX = 3C - 2B$
Si existiese A^{-1}, multiplicando por la izquierda la expresión $AX = 3C - 2B$ tendremos

$$A^{-1} \cdot A \cdot X = A^{-1} \cdot (3C - 2B) \longrightarrow X = A^{-1} \cdot (3C - 2B)$$

Para que exista A^{-1} su determinante tiene que ser distinto de cero:

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & m & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = m$$

Por tanto el sistema $A \cdot X + 2B = 3C$ tiene solución si solo si $m \neq 0$.
b) Si $m = 1$, calculemos $X = A^{-1} \cdot (3C - 2B)$.

$$(3C - 2B) = 3 \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} - 2 \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 3 & 0 & 3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 2 & 2 \\ 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -2 & -2 \\ -2 & 3 & 0 \\ 3 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 1 \qquad A^t = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \longrightarrow \text{Adj}(A^t) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} \cdot \text{Adj}(A^t) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

Luego:

$$X = A^{-1} \cdot (3C - 2B) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & -2 & -2 \\ -2 & 3 & 0 \\ 3 & 0 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -2 & -2 \\ -5 & 5 & 2 \\ 5 & -3 & 3 \end{pmatrix}$$

Considera la matriz $A = \begin{pmatrix} 2 & t & 0 \\ t & 2 & 1 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. **Calcula los valores de t para los que el determinante de A es positivo y halla el mayor valor que alcanza dicho determinante.**
Calculemos $|A|$:

$$|A| = \begin{vmatrix} 2 & t & 0 \\ t & 2 & 1 \\ 3 & 0 & 1 \end{vmatrix} = -t^2 + 3t + 4$$

Dicho determinante es una función cuadrática, es decir, $|A| = f(t) = -t^2 + 3t + 4$. Para saber donde el $|A|$ es positivo, debemos resolver la inecuación $-t^2 + 3t + 4 > 0$. Para ello, primero resolvemos la ecuación $-t^2 + 3t + 4 = 0$, cuyas soluciones son $t = -1$ y $t = 4$.

- Si $-\infty < t < -1 \Rightarrow f(t)$ es negativo, puesto que $f(-2) = -6 < 0$.
- Si $-1 < t < 4 \Rightarrow f(t)$ es positivo puesto que $f(0) = 4 > 0$.
- Si $4 < t < +\infty \Rightarrow f(t)$ es negativo puesto que $f(5) = -36 < 0$

Por tanto el determinante es positivo si $t \in (-1, 4)$.
Para maximizar el valor del determinante, calculemos los máximos de $|A| = f(t) = -t^2 + 3t + 4$.

$$f'(t) = -2t + 3 \Rightarrow f'(t) = 0 \Rightarrow -2t + 3 = 0 \Rightarrow t = 3/2.$$

$f''(t) = -2 < 0 \;\; \forall\, t$, luego $t = 3/2$ nos da un máximo que vale $f(3/2) = -(3/2)^2 + 3(3/2) + 4 = 25/4$.

Considera la matriz $A = \begin{pmatrix} a & b & c \\ 2a & -b & 3c \\ 3a & 0 & 4c \end{pmatrix}$ donde a, b y c son no nulos.

a) Determina el número de columnas de A que son linealmente independientes.
b) Calcula el rango de A y razona si la matriz tiene inversa.

a) El número de columnas linealmente independientes de la matriz coincide con el número de sus filas linealmente independientes y es igual al rango de la matriz. Calculemos $|A|$:

$$|A| = \begin{vmatrix} a & b & c \\ 2a & -b & 3c \\ 3a & 0 & 4c \end{vmatrix} = a \cdot b \cdot c \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 3 \\ 3 & 0 & 4 \end{vmatrix} = a \cdot b \cdot c \cdot 0 = 0$$

Como $|A| = 0$, el rango no es 3 y no tiene 3 filas independientes, a lo sumo tendrá dos. Veamos si podemos encontrar un menor de orden dos no nulo:

$$\begin{vmatrix} a & b \\ 2a & -b \end{vmatrix} = -ab - 2ab = -3ab \neq 0 \text{ (por ser } a \text{ y } b \text{ no nulos)}$$

Luego A tiene 2 columnas linealmente independientes.
b) El rango de A coincide con el número de filas o columnas linealmente independientes de A. Por tanto el rango$(A) = 2$
Como $|A| = 0$, la matriz A no tiene inversa.

Calcula el valor del determinante $\begin{vmatrix} a+1 & a & a & a \\ a & a+1 & a & a \\ a & a & a+1 & a \\ a & a & a & a+1 \end{vmatrix}$.

Sustituyamos la primera columna por la suma de las cuatro columnas que forman el determinante.

$$\begin{vmatrix} 4a+1 & a & a & a \\ 4a+1 & a+1 & a & a \\ 4a+1 & a & a+1 & a \\ 4a+1 & a & a & a+1 \end{vmatrix}$$

En la primera columna aparece siempre el mismo término $(4a + 1)$, y por tanto, lo podemos sacar fuera del determinante. Así:

$$(4a+1)\cdot\begin{vmatrix}1 & a & a & a\\ 1 & a+1 & a & a\\ 1 & a & a+1 & a\\ 1 & a & a & a+1\end{vmatrix}$$

Restemos a cada fila la primera, y el determinante que así resulta, lo podemos desarrollar por los términos de la primera columna:

$$(4a+1)\cdot\begin{vmatrix}1 & a & a & a\\ 1 & a+1 & a & a\\ 1 & a & a+1 & a\\ 1 & a & a & a+1\end{vmatrix} = (4a+1)\cdot\begin{vmatrix}1 & a & a & a\\ 0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{vmatrix} = (4a+1)\cdot(-1)^{1+1}\cdot 1\cdot\begin{vmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{vmatrix} =$$

$$= (4a+1)\cdot(-1)^2\cdot 1\cdot 1 = (4a+1)$$

Resuelve la ecuación $\boldsymbol{det\ (A - x\mathrm{I}) = 0}$**, siendo** $A = \begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 2 & 2 & 4\\ 1 & 1 & 2\end{pmatrix}$**, I la matriz unidad de orden 3 y** $\boldsymbol{x \in \mathbb{R}}$**.**

La ecuación a resolver es : $\begin{vmatrix}1-x & 0 & 0\\ 2 & 2-x & 4\\ 1 & 1 & 2-x\end{vmatrix} = 0$. Desarrollemos el determinante (mediante la regla de Sarrus):

$$(1-x)\cdot(2-x)^2 - 4\cdot(1-x) = 0$$

Operando, queda $-x^3 + 5x^2 - 4x = 0$, que factorizándolo mediante la regla de Ruffini, se convierte en:

$$x\cdot(x-1)\cdot(x-4) = 0$$

Las soluciones de la ecuación son por tanto $x = 0$, $x = 1$ y $x = 4$.

Sea $A = \begin{pmatrix}a & 1 & 0\\ 0 & 1 & 1\\ 1 & a & 0\end{pmatrix}$**. Halla el valor o valores de** $\boldsymbol{a}$ **para los que la matriz A no tiene inversa. Halla** A^{-1} **para** $\boldsymbol{a = 2}$**.**

Una matriz no tiene inversa si su determinante es nulo. Veamos por tanto para qué valores se anula el determinante de A.

$|A| = \begin{vmatrix}a & 1 & 0\\ 0 & 1 & 1\\ 1 & a & 0\end{vmatrix} = 1 - a^2 \quad \Rightarrow$ Dicho determinante se anula para $a = 1$ y $a = -1$. Por tanto, la matriz A no tiene inversa si a vale 1 o -1. Para cualquier otro valor de a sí existe la matriz inversa. Calculémosla para $a = 2$.

$$A = \begin{pmatrix}2 & 1 & 0\\ 0 & 1 & 1\\ 1 & 2 & 0\end{pmatrix} \qquad A^{-1} = \frac{1}{|A|}\cdot \mathrm{Adj}\,(A^t) \qquad |A| = 1 - 2^2 = -3$$

$$A^t = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad \text{Adj}\,(A^t) = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -2 \\ -1 & -3 & 2 \end{pmatrix}$$

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} \cdot \text{Adj}\,(A^t) = \frac{1}{-3} \cdot \begin{pmatrix} -2 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -2 \\ -1 & -3 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2/3 & 0 & -1/3 \\ -1/3 & 0 & 2/3 \\ 1/3 & 1 & -2/3 \end{pmatrix}$$

Determina los valores de *m* que anulan el determinante $\begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 \\ m & m+1 & m \\ 2m & 2m+1 & 2m+1 \end{vmatrix}$**.**

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 \\ m & m+1 & m \\ 2m & 2m+1 & 2m+1 \end{vmatrix} = (2m^2 + 3m + 1) + 0 + (-2m^2) - 0 - (2m^2 + m) - (-2m^2 - m) = 3m + 1$$

Por tanto, el determinante se anula para $m = \frac{-1}{3}$.

Sea A una matriz cuadrada tal que $A^3 = I$ (matriz identidad). ¿Cuánto vale *det* (A)?. Si $A^n = I$, cuánto vale *det* (A)?.

Utilizando la propiedad de los determinantes, relativa a la multiplicación de matrices:

$$det\,(A \cdot B) = det\,(A) \cdot det\,(B)$$

obtenemos:

$$det\,(A^3) = det\,(A) \cdot det\,(A) \cdot det\,(A) = (det\,(A))^3$$

Luego $det\,(A^3) = det\,(I) = 1$, $(det\,(A))^3 = 1$ y por tanto $det\,(A) = 1$.

En el caso $A^n = I$, $(det\,(A^n)) = 1$ y $det\,(A)$ es 1 o -1 si n es par y únicamente 1 si n es impar.

Determina, según los valores de *a*, el rango de las siguientes matrices:

$$\textbf{a)}\ A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 7 & 1 & 1 \\ a & 2 & 3 \end{pmatrix} \qquad \textbf{b)}\ B = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -4 & 6 \\ 1 & 1 & 4 & 4 \\ 1 & 0 & -4 & a \end{pmatrix}$$

a) Calculando menores complementarios se tiene: $\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 7 & 1 \end{vmatrix} = -13 \neq 0$, y el rango de A es, al menos, 2.

$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 7 & 1 & 1 \\ a & 2 & 3 \end{vmatrix} = 3 + 42 + 2a - 3a - 2 - 42 = 1 - a$. Por tanto, si $a = 1$, el rango de A será 2. Para cualquier otro valor de a, el rango de la matriz será 3.

b) Como $\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 2 \neq 0$, el rango de B es, al menos 2.

Los posibles menores de orden 3 son: $\begin{vmatrix} 3 & 1 & -4 \\ 1 & 1 & 4 \\ 1 & 0 & -4 \end{vmatrix} = 0$ y $\begin{vmatrix} 3 & 1 & 6 \\ 1 & 1 & 4 \\ 1 & 0 & a \end{vmatrix} = 2a - 2$.

Si a = 1, el rango de B es 2 y para cualquier otro valor de a, el rango de la matriz B es 3.

Dada la matriz $\begin{pmatrix} 1 & 1/n \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, calcula: a) La potencia enésima A^n. b) La matriz inversa A^{-1}.

a) Calculemos las sucesivas potencias de A:

$$A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 1/n \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1/n \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2/n \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad A^3 = \begin{pmatrix} 1 & 2/n \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1/n \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 3/n \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

De manera análoga, la potencia enésima de A es $A^n = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

b) La matriz inversa de A se calcula como $A^{-1} = \dfrac{1}{|A|} \cdot \text{Adj}\,(A^t)$

$$A^t = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1/n & 1 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad \text{Adj}\,(A^t) = \begin{pmatrix} 1 & -1/n \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad A^{-1} = \frac{1}{|A|} \cdot \text{Adj}\,(A^t) = \begin{pmatrix} 1 & -1/n \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$